Institut Girard Desargues
GDT algèbres clusters
2 octobre 2003

Introduction aux algèbres clusters I

Notes d'un exposé plus que fortement inspiré par ceux de S. Fomin sur le sujet. On trouvera une bibliographie sur `http://igd.univ-lyon1.fr/~chapoton/gdtclusters.html`.

I Introduction – motivations

On se place sur $\mathbb{C}$.

1° Présentation

a) Une *algèbre (à) clusters* est la donnée

- d'une algèbre A commutative intègre sur un anneau de polynômes (de Laurent) R
- munie d'une famille de générateurs, les *variables clusters*, regroupés en "paquets", les *clusters*, non disjoints, tous de même cardinal n, que l'on appelle le rang de A.

Pour engendrer l'algèbre A, on a besoin de toutes les variables clusters. En revanche, pour engendrer le corps des fractions de A, les variables appartenant à 1 cluster suffisent.

b) On dit que deux clusters t et t' sont voisins si on passe de l'un à l'autre en échangeant une variable cluster de t et de t', le produit de ces deux variables étant une somme de monômes en les autres variables clusters.
Plus précisément, on demande qu'il existe $x \in t$ et $x' \in t'$ tels que

$$t' = t \setminus \{x\} \cap \{x'\};$$

si on note $t = \{x, y_2, \ldots, y_n\}$, on a ainsi : $t' = \{x', y_2, \ldots, y_n\}$. Il existe alors entre t et t' une relation de la forme

$$x\, x' = M_1 + M_2,$$

où M_1 et M_2 sont des monômes en $y_2, \ldots, y_n$ qui satisfont certains axiomes que l'on ne donne pas ici.

c) On construit alors le *graphe d'échange* de l'algèbre clusters, en prenant pour sommets les clusters et en mettant une arête entre deux sommets voisins. On demande que ce graphe soir

- connexe : deux clusters peuvent être joints par une chaîne de clusters voisins ;
- "n-régulier : tout cluster possède n clusters voisins.

2° Intérêt

Evidemment, l'intérêt de la structure clusters, ce sont les générateurs ! Plus précisément, on s'efforce de montrer que des algèbres qui interviennent "dans la nature" sont munies de telles structures additionnelles, ce qui donne :

- des propriétés combinatoires (assez souvent, le graphe d'échange provient d'un polytope convexe simple) ;
- des bases monômiales (*cf.* théorie du monôme standard et bases de Gröbner) ;
- des propriétés géométriques, encore en cours d'exploration, liées à des structures de Poisson.

3° Origines et champs d'application

On trouve des algèbres clusters dans les domaines suivants :

- matrices totalement positives (matrices réelles dont tous les mineurs sont strictement positifs) et doubles cellules de Bruhat (intersections de la forme $BuB \cap B^- vB^-$, où B (resp. B^-) est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures)).
- base canonique duale et théorie du monôme standard ;
- représentations de carquois, qui permettent d'interpréter catégoriquement certaines constructions ;

- espaces de Teichmüller.

La théorie est née des efforts de Fomin et Zelevinsky dans les deux premiers domaines, que Lusztig avait mis en relation dès 1994.

II Exemple prototypique : SL_2

a) On munit l'algèbre des fonctions de SL_2, $A = \mathbb{C}[\mathrm{SL}_2] = \mathbb{C}[a,b,c,d]/(ad-bc-1)$ d'une structure d'algèbre cluster de rang 1.
L'algèbre de base est : $R = \mathbb{C}[b,c]$.
On a exactement deux clusters : $t = \{a\}$ et $t' = \{d\}$, et le passage de l'un à l'autre est caractérisé par la relation :

$$a\,d = 1 + bc,$$

où l'on considère 1 et bc comme des monômes en $t \setminus \{a\} = t' \setminus \{d\} = \emptyset$.
b) Intérêts de cette présentation
D'une part, on obtient une base R-linéaire en considérant les monômes en les clusters, i.e. $(a^m)_{m\in\mathbb{N}} \cup (d^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
D'autre part, une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est totalement positive si et seulement si $a,b,c > 0$.
La raison en est la relation de type cluster : $d = (1+bc)/a$, qui exprime d comme un polynôme de Laurent à coefficients positifs.

III Drapeaux dans $\mathbb{C}^3$: SL_3/N

On veut étudier l'algèbre des fonctions sur la variété affine SL_3/N, où N est le groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Convenons de noter (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
On fait agir SL_3 sur

$$Y = \left\{(u,w) \in \mathbb{C}^3 \times \bigwedge^2 \mathbb{C}^3,\ u \neq 0,\ w \neq 0\right\}, \qquad X = \Big\{(u,w) \in Y,\ u \wedge w = 0\Big\}.$$

Notons que pour $(u,w) \in X$, il existe $v \in \mathbb{C}^3$ tel que $w = u \wedge v$. En effet, si on complète u en une base (u,x,y) de $\mathbb{C}^3$, si on écrit $w = \alpha\, u \wedge x + \beta\, u \wedge y + \gamma\, x \wedge y$, on a : $0 = u \wedge w = \gamma\, u \wedge x \wedge y$, d'où $\gamma = 0$ et $v = \alpha\, x + \beta\, y$ convient. Ainsi, à tout élément de X est associé un drapeau $(\mathbb{C}u, \mathbb{C}u \oplus \mathbb{C}v)$.
On sait que SL_3 est 2-transitif sur $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$: pour $u, v \in \mathbb{C}^3$, on écrit les colonnes de coordonnées des deux vecteurs dans la base canonique et on complète en une matrice g de déterminant 1 ; alors $ge_1 = u$ et $ge_2 = v$. Avec la remarque précédente, il en résulte que SL_3 agit transitivement sur X.
Une ligne de calcul permet de montrer que le stabilisateur de $(e_1, e_1 \wedge e_2) \in X$ est N. Au bilan :

$$X \simeq G/N.$$

Pour $(u,w) \in Y$, on note $u = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3$ et $w = x_{12}\, e_1 \wedge e_2 + x_{23}, e_2 \wedge e_3 + x_{13}\, e_1 \wedge e_3$. La relation $u \wedge w = 0$ s'écrit alors :

$$u \wedge w = 0 \iff x_1 x_{23} - x_2 x_{13} + x_3 x_{12} = 0.$$

Il en résulte :

$$\mathbb{C}[\mathrm{SL}_3/N] \simeq \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_{12}, x_{23}, x_{13}]/(x_1 x_{23} - x_2 x_{13} + x_3 x_{12}).$$

On peut alors décrire une structure cluster de rang 1 : $R = \mathbb{C}[x_1, x_3, x_{12}, x_{23}]$, deux clusters $\{x_2\}$ et $\{x_{13}\}$, une relation d'échange : $x_2 x_{13} = x_1 x_{23} + x_3 x_{12}$.
Comme pour SL_2, on obtient une base R-linéaire de $\mathbb{C}[X]$ en considérant les monômes en les clusters et donc une base $\mathbb{C}$-linéaire avec les produits de monômes en les clusters par les monômes de variables non clusters. Cette base est exactement la base que donne la théorie du monôme standard. En particulier, les sous-SL_3-modules de $\mathbb{C}[X]$ sont engendrés sur $\mathbb{C}$ par des parties de cette base.

IV Un vrai bel exemple : $\mathrm{Gr}(2, n+3)$

a) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère la variété $X = \mathrm{Gr}(2, n+3)$ des plans de $\mathbb{C}^{n+3}$. On notera $(e_1, \ldots, e_{n+3})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+3}$.
Le plan engendré par deux vecteurs non colinéaires $u, v \in \mathbb{C}^{n+3}$ est décrit par $w = u \wedge v \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+3}$: cela signifie que, à un scalaire près, w ne dépend que du plan engendré par u et v. On a alors :

$$w \wedge w = (u \wedge v) \wedge (u \wedge v) = -u \wedge u \wedge v \wedge v = 0.$$

Or, il est classique et amusant de montrer que la réciproque est vraie : pour $w \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+3}$, si $w \wedge w = 0$, alors il existe $u, v \in \mathbb{C}^{n+3}$ tels que $w = u \wedge v$. On dit alors que w est *décomposable*.
Ainsi, la donnée d'un plan de $\mathbb{C}^{n+3}$ est équivalente à la donnée de (la droite contenant) un élément $w \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+3}$ tel que $w \wedge w = 0$. Notons X_n la sous-variété de $\mathbb{C}^{n+3}$ formée de ces éléments :

$$X_n = \left\{ w \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n+3}, \quad w \wedge w = 0 \right\}.$$

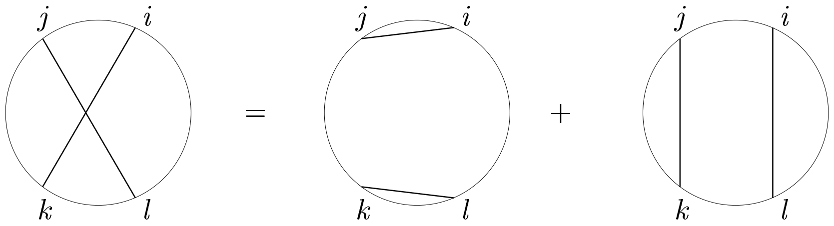
Passons en coordonnées : si on écrit $w = \sum_{i<j} x_{ij}\, e_i \wedge e_j$, on a :

$$w \wedge w = \sum_{i<j<k<l} (x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk}) e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l.$$

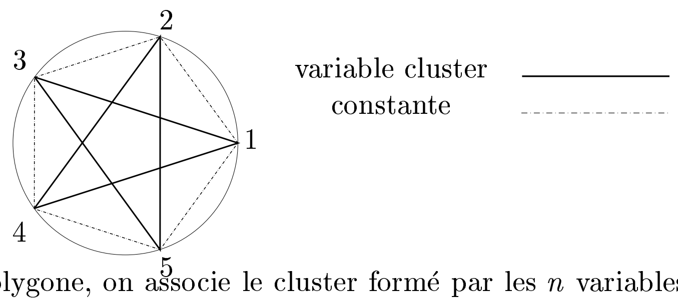
Ainsi, l'algèbre $A_n = \mathbb{C}[X_n]$ est un quotient de $\mathbb{C}[x_{ij}\,, i<j]$ par l'idéal engendré par $x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk}$ pour tout $i<j<k<l$. En fait, il se trouve que cet idéal est réduit, et on a donc :

$$A_n = \mathbb{C}[X_n] = \mathbb{C}[x_{ij}\,, i<j] / \left(x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk}, i<j<k<l \right).$$

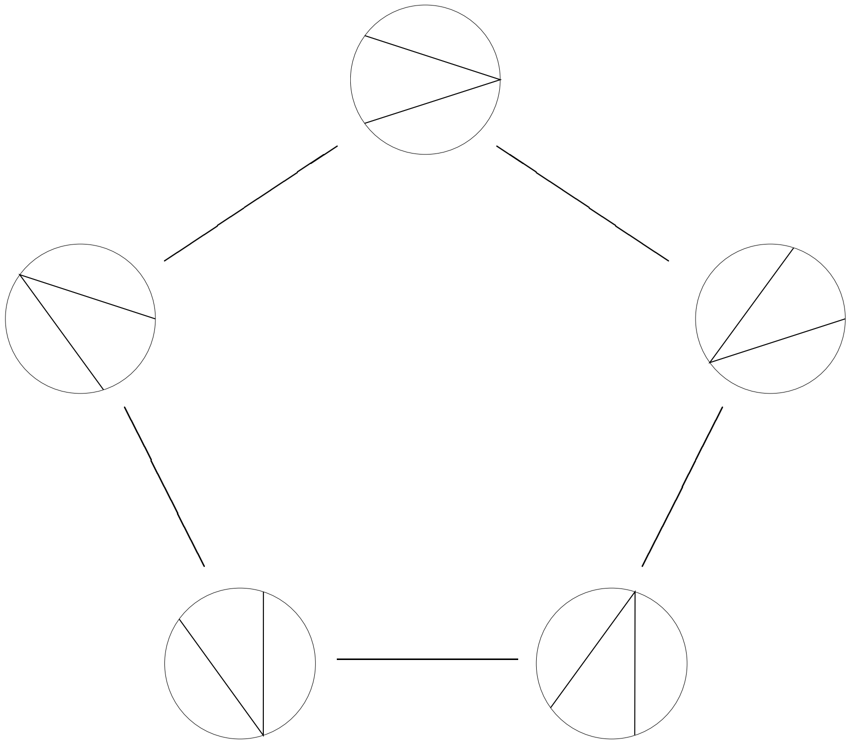
b) On veut une représentation graphique de la situation. On numérote les sommets d'un polygone régulier à $n+3$ côtés par $1, 2, \ldots, n+3$ (et on convient que $n+4 = 1$). Les variables x_{ij} sont alors représentés par le segment $[i, j]$. On représente un monôme par un dessin du disque marqué de quelques segments de ce type. Par exemple, les trois dessins suivants représentent respectivement $x_{ik}x_{jl}$, $x_{ij}x_{kl}$ et $x_{il}x_{jk}$:



c) On peut maintenant décrire la structure clusters sur A_n. On prend alors pour algèbre de base : $R = \mathbb{C}[x_{i,i+1}\,, i = 1, \ldots, n+3]$. Les variables clusters sont les x_{ij} où i et j sont des sommets non voisins du polygone.



A toute triangulation du polygone, on associe le cluster formé par les n variables clusters associées aux diagonales qui interviennent dans la triangulation. Voici le graphe d'échange pour $n = 2$:



d) Voici maintenant cinq propriétés quasiment miraculeuses qui proviennent de la structure clusters.

Propriété 1 *Les monômes en les clusters forment une base R_n-linéaire de A_n.*

Par "monôme en les clusters", on entend un produit de variables clusters qui appartiennent au même cluster. Cette propriété est vraie pour la plupart des algèbres clusters "intéressantes".

Voici une "monstration" rapide de cette propriété : on représente un monôme quelconque en les x_{ij} par un dessin comme ci-dessus, en marquant les diagonales et les côtés qui représentent les variables. S'il n'y a pas d'intersection entre ces différents segments, c'est que le monôme est un monôme en un cluster. En effet, un cluster, c'est une triangulation, c'est-à-dire un ensemble de diagonales et de côtés qui ne se croisent pas et qui est maximal.
Or, si on prend un monôme quelconque, si on choisit une intersection quelconque de deux diagonales, c'est-à-dire deux variables x_{ik} et x_{jl} avec $i < j < k < l$, et si on applique la relation d'échange ci-dessus, on obtient une somme de monômes qui ont chacun au moins une intersection de moins que le monôme initial. Par récurrence sur le nombre d'intersection, on montre ainsi que tout monôme est une somme de monômes en les clusters.
Pour l'indépendance linéaire des monômes, on doit pouvoir s'en tirer avec un argument de filtration (*dixit* le spécialiste mondial des filtrations, Ph. Caldero).

Propriété 2 (Phénomène de Laurent) *Pour tout cluster t et toute variable cluster x', x' est un polynôme de Laurent en t.*

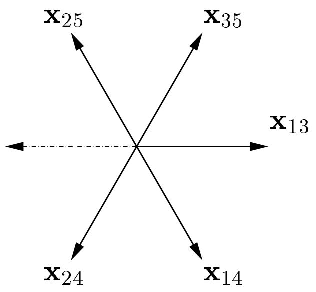
Cette propriété est vraie pour *toute* algèbre cluster, et même dans des contextes plus larges.
Il est clair, d'après les relations d'échange, que x' est une fraction rationnelle en les variables de t. Le fait que ce soit en fait un polynôme de Laurent est non trivial, et repose sur des simplifications "miraculeuses", comme le montre l'exemple de $\mathrm{Gr}(2,5)$ $(n=2)$.
On fixe $t = \{x_{24}, x_{25}\}$, et on exprime toutes les variables clusters en fonction de t en tournant dans le pentagone :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{24} &= \frac{1}{\mathbf{x}_{24}^{-1}}\\
\mathbf{x}_{25} &= \frac{1}{\mathbf{x}_{25}^{-1}}\\
\mathbf{x}_{35} &= \frac{x_{34}\,\mathbf{x}_{25} + x_{23}x_{45}}{\mathbf{x}_{24}}\\
\mathbf{x}_{13} &= \frac{x_{23}x_{15} + x_{12}\mathbf{x}_{35}}{\mathbf{x}_{25}}\\
\mathbf{x}_{13} &= \frac{x_{23}x_{15}\mathbf{x}_{24} + x_{12}x_{34}\,\mathbf{x}_{25} + x_{12}x_{23}x_{45}}{\mathbf{x}_{25}\mathbf{x}_{24}}\\
\mathbf{x}_{14} &= \frac{x_{45}\,\mathbf{x}_{13} + x_{34}x_{15}}{\mathbf{x}_{35}}\\
&= \frac{x_{23}x_{15}x_{45}\mathbf{x}_{24} + x_{12}x_{34}x_{45}\mathbf{x}_{25} + x_{12}x_{23}x_{45}^2 + x_{34}x_{15}\mathbf{x}_{24}\mathbf{x}_{25}}{\mathbf{x}_{25}\mathbf{x}_{24}}\times\\
&\qquad \times \frac{\mathbf{x}_{24}}{x_{34}\,\mathbf{x}_{25} + x_{23}x_{45}}\\
&= \text{SIMPLIFICATION !}\\
\mathbf{x}_{14} &= \frac{x_{15}\mathbf{x}_{24} + x_{12}x_{45}}{\mathbf{x}_{25}}
\end{aligned}
$$

Evidemment, l'expression finale de x_{14} s'obtient par la relation d'échange entre $\{x_{24}, x_{25}\}$ et $\{x_{24}, x_{14}\}$. Mais la complexité de la première expression en aurait fait douter plus d'un... Ainsi :

Propriété 3 *Ca boucle en un nombre fini d'étapes.*

Mais regardons de plus près les dénominateurs qui apparaissent dans les expressions ci-dessus. On a fixé $t = \{x_{24}, x_{25}\}$ comme cluster de références. On repère alors le monôme $x_{24}^a x_{25}^b$ par le vecteur $a\alpha + b\beta$ d'un plan vectoriel engendré par α et β :



Propriété 4 *Via les dénominateurs, les variables clusters sont en bijection avec l'ensemble des racines presque positives* $\Phi^+ \cup (-\Pi)$ *d'un système de racines.*

Pour un système de racines Φ, la donnée d'une base Π définit un système de racines positives Φ^+. Les racines presque positives sont par définition les éléments de $\Phi^+ \cup (-\Pi)$.
Revenons au graphe d'échange pour $n = 2$: c'est un pentagone. En général :

Propriété 5 *Le graphe d'échange est le* 1*-squelette (sommets + arêtes) d'un polytope convexe simple de* $\mathbb{R}^n$*. Ses faces de dimension* $n-1$ *sont en bijection naturelle avec les variables clusters (la variable cluster associée à une face est l'intersection des clusters associés aux sommets qui bordent la face).*

Cette propriété a été démontrée pour toute algèbre cluster *de type fini* par Fomin-Zelevinsky-Chapoton. Pour n quelconque, le graphe d'échange de $\mathrm{Gr}(2, n+3)$ est l'associaèdre de Stasheff de dimension n (Fomin-Zelevinsky).