Jérôme Germoni
Institut Girard Desargues
GDT algèbres clusters
9 octobre 2003

# Introduction aux algèbres clusters II

**Données de base** : On travaille sur $\mathbb{Z}$. On fixe deux entiers $1 \leq n \leq m$. On se donne un groupe abélien libre $\mathbb{P}$ de rang $m-n$ (écrit multiplicativement) et des générateurs $x_{n+1}, \ldots, x_m$. Ainsi, l'algèbre de groupe de $\mathbb{P}$ est une algèbre de polynômes de Laurent : $R = \mathbb{Z}\mathbb{P} = \mathbb{Z}[x_{n+1}^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}]$. On se donne également un corps ambiant $\mathcal{F}$ isomorphe à un corps de fractions rationnelles en $m$ indéterminées sur $\mathbb{Q}$.

## I Définitions

**1° Rappel** : très informellement, on a suggéré qu'une algèbre clusters est une $R$-algèbre munie d'une famille de générateurs $X \cup X_1 \cup \ldots$ regroupés en clusters $X$, $X_1$,..., tels que si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $X_j = X \setminus \{x_j\} \cup \{x'_j\}$ sont deux clusters voisins, on a une relation d'échange du type

$$x_j x'_j = * \prod x_i^{\star} + * \prod x_i^{\star},$$

où "$*$" désigne des éléments inversibles de $R$ et "$\star$" des entiers. On veut maintenant coder les coefficients et les exposants d'une façon uniforme.

**2° Graines**

**Définition 1 (Matrice anti-symétrisable)** *Une matrice carrée $B$ est anti-symétrisable s'il existe une matrice carrée $D$, diagonale à coefficients dans $\mathbb{N}^*$, telle que $DB$ soit anti-symétrique.*

**Définition 2 (Graine)** *Une graine est un couple $\Sigma = (X, \tilde{B})$, où*
- *le* cluster $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *est une base de transcendance de $\mathcal{F}$ sur $R = \mathbb{Z}\mathbb{P}$ ;*
- *$\tilde{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont le bloc principal $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est anti-symétrisable.*

Ces données codent la relation d'échange

$$(\heartsuit) \qquad x_j\, x'_j = \prod_{i,\ b_{ij}>0} x_i^{b_{ij}} + \prod_{i,\ b_{ij}>0} x_i^{-b_{ij}} \quad (1 \leq j \leq n)$$

entre le cluster $X$ et le cluster voisin $X_j = X \setminus \{x_j\} \cup \{x'_j\}$.
Plus précisément, étant donné une graine $\Sigma = (X, \tilde{B})$ et $1 \leq j \leq n$, on peut définir $x'_j$ par la relation $(\heartsuit)$, donc le cluster $X_j$, qu'on qualifie de voisin de $X$.

**3° Exemple**[1] : $\mathrm{Gr}(2,5)$. On note $\mathcal{A}_2$ la $\mathbb{Z}\mathbb{P}$-algèbre présentée par générateurs $u_{ij}$, $1 \leq i < j \leq 5$ et relations

$$\forall i < j < k < l, \quad u_{ik}\, u_{jl} = u_{ij} u_{kl} + u_{il} u_{jk},$$

où

$$\mathbb{Z}\mathbb{P} = \mathbb{Z}[u_{12}^{\pm 1}, u_{23}^{\pm 1}, u_{34}^{\pm 1}, u_{45}^{\pm 1}, u_{15}^{\pm 1}].$$

Rappelons qu'on a identifié $\{1, \ldots, 5\}$ aux sommets d'un pentagone régulier et les variables $u_{ij}$ aux côtés et aux diagonales de ce pentagone. Les $u_{ij}$ correspondant aux diagonales (avec $i$ et $j$ non

[1] Voir l'exposé I.

voisins) sont appelés variables clusters et, pour les distinguer, on les notera désormais en gras : ce sont $\mathbf{u}_{24}, \mathbf{u}_{25}, \mathbf{u}_{35}, \mathbf{u}_{13}, \mathbf{u}_{14}$. On les a déjà regroupées en clusters :

$$\{\mathbf{u}_{24}, \mathbf{u}_{25}\}, \{\mathbf{u}_{35}, \mathbf{u}_{25}\}, \{\mathbf{u}_{35}, \mathbf{u}_{13}\}, \{\mathbf{u}_{14}, \mathbf{u}_{13}\}, \{\mathbf{u}_{14}, \mathbf{u}_{24}\}.$$

Notre cluster de référence sera $X = \{\mathbf{u}_{24}, \mathbf{u}_{25}\}$. Il a deux clusters voisins, $X_1 = \{\mathbf{u}_{35}, \mathbf{u}_{25}\}$ et $X_2 = \{\mathbf{u}_{14}, \mathbf{u}_{24}\}$, le passage de l'un aux autres étant caractérisé par les relations suivantes :

$$(1) \qquad \mathbf{u}_{24}\mathbf{u}_{35} = \mathbf{u}_{25}u_{34} + u_{23}u_{45},$$

$$(2) \qquad \mathbf{u}_{25}\mathbf{u}_{14} = u_{12}u_{45} + \mathbf{u}_{24}u_{15}.$$

On va rendre compte de ces deux relations par la matrice (anti-symétrisable) :

$$\tilde{B} = \begin{array}{cc} \mathbf{u}_{24} & \mathbf{u}_{25} \\ \left(\begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right) & \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathbf{u}_{24} \\ \mathbf{u}_{25} \\ u_{12} \\ u_{23} \\ u_{34} \\ u_{45} \\ u_{15} \end{array}$$

Ceci signifie que si on applique la relation générale ($\heartsuit$) à la matrice ci-dessus, avec les noms de variables indiqués, on obtient bien les deux relations (1) et (2). Si $x_1 = \mathbf{u}_{24}$ et $x_2 = \mathbf{u}_{25}$, alors $x'_1 = \mathbf{u}_{35}$ et $x'_2 = \mathbf{u}_{14}$.
Le contexte général actuel a donc au moins un rapport avec les cas étudiés dans l'exposé I...

## 4° Remarques

**a)** Dans le produit $\prod x_i^{|b_{ij}|}$, on trouve d'une part des variables clusters (pour $i \leq n$), d'autre part des "constantes" (pour $i \geq n+1$).

**b)** On a dit qu'une matrice carrée $B$ est anti-symétrisable s'il existe $D$ diagonale à coefficients dans $\mathbb{N}^*$ telle que $DB$ est anti-symétrique. En particulier, $B$ est "sign-skew-symmetric", c'est-à-dire que $b_{jj} = 0$ et que $b_{ij}$ et $b_{ji}$ sont de signes opposés ou simultanément nuls.
Dans la relation ($\heartsuit$), cela entraîne que $x_j$ n'intervient pas dans le membre de droite, et qu'une variable cluster $x_i$ ($i \leq n$) intervient au plus dans 1 des deux monômes.

**c)** Quand on a une matrice antisymétrisable $B$, il est tentant de lui associer

- un carquois $Q(B)$ dont les sommets sont $\{1, 2, \ldots, n\}$, où l'on met une flèche $i \to j$ si $b_{ij} > 0$ ; notons que si $|b_{ij}| \leq 1$ pour tout $i, j$, la donnée de $Q(B)$ détermine $B$. On dit alors qu'on est "dans le cas carquois" ;
- une matrice de Cartan généralisée $A(B) = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ définie par : $a_{ii} = 2$ et $a_{ij} = -|b_{ij}|$. Noter que $A(B)$ est symétrisable si, et seulement si $B$ est anti-symétrisable.

L'étude (complète) du cas $n = 2$ montre de forts liens (conjecturaux pour $n$ quelconque) entre l'algèbre clusters associée à $(X, \tilde{B})$ et l'algèbre de Kac-Moody associée à $A(B)$. Voir l'exposé de Lionel Richard (à venir).

## 5° Propagation des clusters et des relations

**Principe** *La structure des clusters et des relations d'échange est parfaitement déterminée, de façon uniforme, par une graine.*

L'idée est la suivante : à partir d'une graine, on a vu comment définir $n$ clusters voisins. On va alors associer à chacun de ces clusters une “matrice $\tilde{B}$”, ce qui donnera $n$ nouvelles graines. En itérant, on obtiendra l'ensemble des variables clusters. Ceci se fait par le processus de mutation que l'on présente maintenant.

## 6° Mutation

**Définition 3** *On dit qu'une matrice $\tilde{B}' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ est obtenue à partir de $\tilde{B}$ par mutation dans la direction $k \in \{1, \dots, n\}$, et on écrit $\tilde{B}' = (b'_{ij})_{i,j} = \mu_k(\tilde{B})$ si*

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } k = j \text{ ;} \\ b_{ij} + \dfrac{|b_{ik}|b_{kj} + b_{ik}|b_{kj}|}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie assez facilement les faits suivants :

**Propriété** *On a :*
- $\mu_k(\mu_k(\tilde{B})) = \tilde{B}$ ;
- $\tilde{B}$ *anti-symétrisable* $\Longrightarrow$ $\mu_k(\tilde{B})$ *anti-symétrisable ;*
- $\operatorname{rg} \mu_k(\tilde{B}) = \operatorname{rg} \tilde{B}$.

Les deux premières propriétés sont souhaitables : d'une part, la relation entre $x_k$ et $x'_k$ étant symétrique, on veut retomber sur la graine de départ après deux mutations dans la même direction en sens inverse ; d'autre part, la deuxième propriété garantit que $(X_k, \mu_k(\tilde{B}))$ est encore une graine. La troisième propriété aura son importance plus tard.

**Définition 4** *Etant donné une graine $\Sigma = (X, \tilde{B})$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit $x'_k \in \mathcal{F}$ par la relation $(\heartsuit)$ (avec $j = k$). Alors, $\mu_k(\Sigma) = (X \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\}, \mu_k(\tilde{B}))$ est une graine, appelée graine obtenue de $\Sigma$ par mutation dans la direction $k$.*

**Définition 5** *On appelle équivalence par mutation et on note $\sim$ la relation d'équivalence engendrée par les mutations : $\Sigma \sim \Sigma'$ si, et seulement s'il existe des entiers $k_1, \dots, k_t \in \{1, \dots, n\}$ telle que $\Sigma = \Sigma_0$, $\Sigma_s = \mu_{k_s}(\Sigma_{s-1})$ pour $s \in \{1, \dots, t\}$ et $\Sigma_t = \Sigma'$.*

## 7° Exemple : $\mathrm{Gr}(2, 5)$.

Pour montrer que la formule de mutation a un “contenu”, si artificielle ou parachutée qu'elle semble, on va effectuer une mutation à partir de la graine $(\{\mathbf{u}_{24}, \mathbf{u}_{25}\}, \tilde{B})$. On a déjà vu que le cluster voisin $X_1$ était $\{\mathbf{u}_{35}, \mathbf{u}_{25}\}$. On calcule mécaniquement :

$$\mu_1(\tilde{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathbf{u}_{35} & \mathbf{u}_{25} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{u}_{35} \\ \mathbf{u}_{25} \\ u_{12} \\ u_{23} \\ u_{34} \\ u_{45} \\ u_{15} \end{array} \end{array}$$

Si on écrit la relation $(\heartsuit)$ relative à la première colonne de $\mu_1(\tilde{B})$, on retrouve la relation de départ

$$\mathbf{u}_{24}\mathbf{u}_{35} = \mathbf{u}_{25}u_{34} + u_{23}u_{45},$$

ce qui ne devrait étonner personne ($b'_{1j} = -b_{1j}$). Mais si on écrit la formule ($\heartsuit$) relative à la deuxième colonne de $\mu_1(\tilde{B})$, on définit une nouvelle variable cluster $\tilde{x}'_2 =$ "$\mathbf{u}_{13}$" par la relation

$$\mathbf{u}_{25}\text{“}\mathbf{u}_{13}\text{”} = \mathbf{u}_{35}u_{12} + u_{23}u_{15}.$$

Il est clair que cette nouvelle variable cluster n'est autre que $\mathbf{u}_{13}$. Vu la symétrie qui règne entre les variables, on se doute qu'on peut retrouver toutes les variables clusters $\mathbf{u}_{ij}$ et toutes les relations entre elles par mutations successives à partir de la donnée de la graine initiale.

En résumé, comme annoncé ci-dessus, le processus de mutation permet la propagation des clusters et des relations d'échange. On en arrive enfin à la définition principale :

**8° Algèbres (à) clusters**

**Rappel** : on a fixé deux entiers $1 \leq n \leq m$, un corps $\mathcal{F}$ isomorphe au corps des fractions rationnelles en $m$ indéterminées, $\mathcal{F} \simeq \mathbb{Q}(u_1, \ldots, u_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$, et le sous-anneau $\mathbb{ZP} = \mathbb{Z}[x_{n+1}^{\pm 1}, \ldots, x_m^{\pm 1}] \subset \mathcal{F}$. Une graine est la donnée d'une partie $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, base de transcendance de $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{Frac}(\mathbb{ZP})$, et d'une matrice $\tilde{B} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ dont le bloc principal est anti-symétrisable.

**Définition 6** *Etant donné une graine $\Sigma = (X, \tilde{B})$, on appelle algèbre (à) clusters engendrée par $\Sigma$ la sous-$\mathbb{ZP}$-algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Sigma)$ de $\mathcal{F}$ engendrée par la réunion des clusters $X'$, lorsque $(X', \tilde{B}')$ décrit l'ensemble des graines équivalentes à $\Sigma$ :*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Sigma) = \Big\langle X' \;|\; (X', \tilde{B}') \sim (X, \tilde{B}) \Big\rangle_{\mathbb{ZP}\text{-algèbre}}.$$

**9° Remarque** : Un des buts actuels de la théorie est de munir l'algèbre des fonctions d'une double cellule de Bruhat d'une structure d'algèbre clusters.

Plus précisément, soit $G$ un groupe algébrique semi-simple complexe, $B$ et $B_-$ deux sous-groupes de Borel opposés, $W$ le groupe de Weyl ; une double cellule de Bruhat est une intersection $G^{u,v} = BuB \cap B_-vB_-$, où $u, v \in W$. Ces variétés interviennent naturellement dans le paramétrage des éléments totalement positifs de $G$.

Berenstein, Fomin et Zelevinsky savent, de façon combinatoire, définir une graine $\Sigma_{u,v}$ à partir de ces données, et espèrent que l'algèbre clusters associée est bien $\mathbb{C}[G^{u,v}]$. Pour l'instant, on sait que $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ "contient" l'algèbre clusters. (A suivre.)

## II Phénomène de Laurent

**1° Exemple** : $\mathrm{Gr}(2,5)$. Gardons pour cluster de référence $X = \{\mathbf{u}_{24}, \mathbf{u}_{25}\}$, et exprimons toutes les variables clusters en fonction de $X$ par mutations successives dans les directions 1 et 2 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{35} &= \frac{u_{34}\,\mathbf{u}_{25} + u_{23}u_{45}}{\mathbf{u}_{24}} \\
\mathbf{u}_{13} &= \frac{u_{23}u_{15} + u_{12}\mathbf{u}_{35}}{\mathbf{u}_{25}} \\
\mathbf{u}_{13} &= \frac{u_{23}u_{15}\mathbf{u}_{24} + u_{12}u_{34}\,\mathbf{u}_{25} + u_{12}u_{23}u_{45}}{\mathbf{u}_{25}\mathbf{u}_{24}} \\
\mathbf{u}_{14} &= \frac{u_{45}\,\mathbf{u}_{13} + u_{34}u_{15}}{\mathbf{u}_{35}} \\
&= \frac{u_{23}u_{15}u_{45}\mathbf{u}_{24} + u_{12}u_{34}u_{45}\mathbf{u}_{25} + u_{12}u_{23}u_{45}^2 + u_{34}u_{15}\mathbf{u}_{24}\mathbf{u}_{25}}{\mathbf{u}_{25}\mathbf{u}_{24}} \times \\
&\qquad \times \frac{\mathbf{u}_{24}}{u_{34}\,\mathbf{u}_{25} + u_{23}u_{45}} \\
&= \text{SIMPLIFICATION !} \\
\mathbf{u}_{14} &= \frac{u_{15}\mathbf{u}_{24} + u_{12}u_{45}}{\mathbf{u}_{25}}
\end{aligned}$$

La simplification semble miraculeuse. C'est un peu exagéré de le dire ici, puisqu'on aurait pu obtenir la dernière relation comme la relation d'échange en mutant $(X, \tilde{B})$ dans la direction 2. Mais c'est un phénomène général : il est évident, grâce aux relations d'échange, que toutes les variables clusters s'expriment comme fractions rationnelles d'un cluster donné. En fait, les fractions qui interviennent sont toujours des polynômes de Laurent.

## 2° "Borne supérieure" d'une graine

**Définition 7** *Etant donnée une graine $\Sigma = (X, \tilde{B})$ et ses graines voisines $\Sigma_k = \mu_k(\Sigma) = (X_k, \mu_k(\tilde{B}))$, on appelle "borne supérieure" de $\Sigma$ (upper bound) l'algèbre des polynômes de Laurent en $X$ et ses clusters voisins :*

$$\mathcal{U}(\Sigma) = \mathbb{ZP}[X^{\pm 1}] \cap \mathbb{ZP}[X_1^{\pm 1}] \cap \cdots \cap \mathbb{ZP}[X_n^{\pm 1}],$$

*où $X^{\pm 1} = (x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1})$ et $X_k^{\pm 1} = (x_1^{\pm 1}, \ldots, x_k'^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1})$*

**Remarque** : On peut se demander pourquoi $\mathcal{U}(\Sigma)$ contient plus que $\mathbb{ZP}$. On a en toute généralité :

$$\langle x_1, x_1', \ldots, x_n, x_n' \rangle_{\mathbb{ZP}\text{-algèbre}} \subset \mathcal{U}(\Sigma).$$

En effet, $x_k$ appartient à $X$ et à $X_j$ si $j \neq k$. Or, la relation ($\heartsuit$) exprime $x_k$ comme un polynôme de Laurent en $X_k$ ; ainsi, $x_k \in \mathcal{U}(\Sigma)$. Cette même relation exprime $x_k'$ comme un polynôme en $x_j$ $(j \neq k)$ divisé par $x_k$, qui est par la remarque précédente un polynôme de Laurent en $X_j$ (si $j \neq k$). D'où le fait que $x_k'$ appartient à $\mathcal{U}(\Sigma)$.
Le théorème 4 donne une condition suffisante pour que l'inclusion ci-dessus soit une égalité.

**Théorème 1** *Si la graine $\Sigma = (X, \tilde{B})$ est de rang maximal ($\operatorname{rg} \tilde{B} = n$), alors $\mathcal{U}(\Sigma)$ est invariant par mutations :*

$$\Sigma' \sim \Sigma \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U}(\Sigma') = \mathcal{U}(\Sigma).$$

**Définition 8** *Etant donné une graine $\Sigma$, on appelle algèbre cluster supérieure (upper cluster algebra) l'intersection des bornes supérieures des graines équivalentes à $\Sigma$ par mutation :*

$$\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}(\Sigma) = \bigcap_{\Sigma' \sim \Sigma} \mathcal{U}(\Sigma').$$

Par exemple, d'après le théorème 1, si $\operatorname{rg} \tilde{B} = n$, alors $\overline{\mathcal{A}}(\Sigma) = \mathcal{U}(\Sigma)$.

## 3° Le théorème principal

**Théorème 2 (Phénomène de Laurent)** *Pour toute graine $\Sigma$, on a :*

$$\mathcal{A}(\Sigma) \subset \overline{\mathcal{A}}(\Sigma).$$

*En d'autres termes, dans une algèbre clusters, toute variable cluster est un polynôme de Laurent en n'importe quel autre cluster.*

## 4° Remarques

**a)** Pour motiver ces considérations, revenons au cas de $G^{u,v}$. Berenstein, Fomin et Zelevinsky savent démontrer que $\mathbb{C}[G^{u,v}]$ est isomorphe à l'algèbre cluster supérieure $\overline{\mathcal{A}}(\Sigma_{u,v})$ de la graine $\Sigma_{u,v}$ qu'ils définissent. Ils espèrent montrer que

**b)** Ainsi, que ce soit en toute généralité ou dans le cas de $G^{u,v}$, c'est une question importante de savoir si l'inclusion $\mathcal{A}(\Sigma) \subset \overline{\mathcal{A}}(\Sigma)$ est une égalité. On sait qu'en général, ce n'est pas le cas, par exemple avec la graine définie par

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le paragraphe suivant, on donne une condition suffisante pour avoir égalité.

**c)** Lorsque $\tilde{B}$ est "de type fini", c'est-à-dire quand la matrice de Cartan généralisée $A(B)$ est la matrice de Cartan d'un système de racine fini $\Phi$, on peut montrer que le nombre de variables clusters est fini. Si, de plus, le carquois associé ne contient pas deux flèches concaténables, il y a une bijection entre les variables clusters et l'ensemble $\Phi^+ \cup (-\Pi)$ des racines "presque positives", définie en considérant les dénominateurs des variables clusters exprimées comme polynômes de Laurent d'un cluster fixé. (Ici, $\Pi$ est une base de $\Phi$ et $\Phi^+$ le système de racines positives associé.)
Pour ces considérations, voir les articles "Y-systems", "Clusters algebras II" et "Polytopal realizations", ainsi que l'exposé de F. Chapoton dans le GDT (à venir).

## III Acyclicité

1° **Rappel** : Etant donné une graine $\Sigma = (X, \tilde{B})$, on définit un carquois $Q$ ainsi :

- ses sommets sont $\{1, \ldots, n\}$ ;
- il y a une arête orientée $i \to j$ si $b_{ij} > 0$.

**Définition 9** *On dit que $\Sigma$ est acyclique si $Q$ ne contient pas de cycle orienté.*

**Remarque** : si deux graines sont équivalentes par mutation, il est possible que l'une soit acyclique alors que l'autre non.

L'intérêt de cette notion est double.

2° D'une part, il fournit un critère facile à vérifier pour que l'algèbre cluster supérieur soit en fait l'algèbre cluster. On sera très content lorsqu'on pourra l'appliquer à la graine $\Sigma_{u,v}$ associée à $G^{u,v}$.

**Théorème 3** *Si $\Sigma$ est une graine acyclique de rang maximal, alors l'algèbre clusters et l'algèbre clusters supérieure de $\Sigma$ coïncident :*

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \overline{\mathcal{A}}(\Sigma).$$

3° D'autre part, dans le cas acyclique, on a un théorème de structure extrêmement précis, qui répond au-delà de toute espérance à nos préoccupations sur la fabrication de bases. Ici, on a en vue la théorie du monôme standard.
Avant d'énoncer le théorème, rappelons quelques notations et complétons-les. Pour une graine $\Sigma = (X, \tilde{B})$, où $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\tilde{B} = (b_{ij})$, on définit $x'_j$ par la relation

$$(\heartsuit) \qquad x_j\, x'_j = \prod_{i,\ b_{ij}>0} x_i^{b_{ij}} + \prod_{i,\ b_{ij}>0} x_i^{-b_{ij}} = P_j(X) \quad (1 \leq j \leq n).$$

**Théorème 4 (Structure dans le cas acyclique)** *Supposons que la graine $\Sigma$ soit acyclique, et soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Sigma)$ l'algèbre clusters associée. Alors*
(i) *$\mathcal{A}$ est engendrée par $x_1, x'_1, \ldots, x_n, x'_n$ comme $\mathbb{ZP}$-algèbre ;*
(ii) *les monômes en $x_1, x'_1, \ldots, x_n, x'_n$ qui ne contiennent aucun produit $x_j x'_j$ forment une base $\mathbb{ZP}$-linéaire de $\mathcal{A}$ ;*
(iii) *les polynômes $x_j x'_j - P_j(X)$ $(j = 1, \ldots, n)$ engendrent l'idéal des relations entre $x_1, \ldots, x'_n$ et fournissent donc une présentation de $\mathcal{A}$ ;*
(iv) *ils forment une base de Gröbner de cet idéal pour tout ordre pour lequel $x'_j \gg x_j$ (i.e. tout ordre pour lequel un monôme contenant une lettre primée est supérieur à un monôme en les $x_j$).*

## IV Schéma de la preuve du phénomène de Laurent

Le théorème 1 semblait seulement un énoncé technique. En fait, c'est là que se situe le nœud de l'affaire. Une fois qu'il est démontré, le phénomène de Laurent (théorème 2) se déduit sans trop de peine. (Paragraphe à prendre avec des pincettes...)

### 1° Une notion utile : "coprime seed"

**Définition 10** *Soit $\Sigma = (X, \tilde{B})$ une graine, notons comme ci-dessus*

$$P_j = \prod_{i,\ b_{ij}>0} x_i^{b_{ij}} + \prod_{i,\ b_{ij}>0} x_i^{-b_{ij}}.$$

*On dit que $\Sigma$ est première (coprime) si les polynômes $(P_j)_{j=1,\dots,n}$ sont premiers entre eux deux à deux (i.e. si, pour $j \neq k$, $P_j$ et $P_k$ n'ont pas de facteur commun).*

### 2° Sur la preuve du théorème 1

**Proposition** *Soit $\Sigma = (X, \tilde{B})$ une graine. Si $\operatorname{rg} \tilde{B} = n$, alors toute graine équivalente à $\Sigma$ est première.*

Cette proposition résulte des deux lemmes suivants.

**Lemme 1** *$\Sigma$ n'est pas première si, et seulement s'il existe deux colonnes de $\tilde{B}$ proportionnelles, le rapport de proportionnalité $a/b$ étant le quotient de deux entiers impairs $a$ et $b$.*

**Sketch** : Le joli argument pour le sens direct est fondé sur le polygône de Newton des polynômes $P_j$. Rappelons que c'est l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^m$ des exposants $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ des monômes $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ qui interviennent dans le polynôme, et que le polygône d'un produit est la somme de Minkowsky des polygônes des facteurs. Les binômes sont caractérisés par le fait que leur polygône de Newton sont des segments ; leurs diviseurs ont donc des polygônes qui sont des segments qui leur sont parallèles.
La réciproque est facile : si deux colonnes $j$ et $k$ de $\tilde{B}$ sont proportionnelles, on peut écrire $P_j = L^a + M^b$ et $P_k = L^b + M^b$, où $L$ et $M$ sont des monômes, et le binôme $L + M$ est un diviseur commun.

**Lemme 2** *Le rang d'une matrice est invariant par mutation : $\operatorname{rg} \mu_k(\tilde{B}) = \operatorname{rg} \tilde{B}$.*

**Sketch** : On peut se débrouiller pour écrire $\mu_k(\tilde{B}) = Q\tilde{B}P$, où $P$ et $Q$ sont deux matrices inversibles.

**Théorème 1** *Si $\Sigma' = \mu_k(\Sigma)$ et $\Sigma'$ et $\Sigma$ sont premières, alors $\mathcal{U}(\Sigma') = \mathcal{U}(\Sigma)$.*

**Sketch** : La preuve est technique. En gros, on se ramène au rang 2 ($n = 2$) et on travaille (calculs explicites).

### 3° Sur le phénomène de Laurent

On commence par supposer que toute graine $\Sigma'$ équivalente à $\Sigma$ est première. Alors, d'après le théorème ci-dessus, l'algèbre cluster supérieure $\overline{\mathcal{A}}(\Sigma)$ est égale à $\mathcal{U}(\Sigma')$ pour toute graine $\Sigma' = (X', \tilde{B}')$ équivalente à $\Sigma$, et $\mathcal{U}(\Sigma')$ contient évidemment l'algèbre engendrée par $X'$. Il en résulte que $\overline{\mathcal{A}}(\Sigma)$ contient $\mathcal{A}(\Sigma)$, qui est l'algèbre engendrée par les différents $X'$.
Ensuite, un "vieil" argument, c'est-à-dire un argument qui se trouvait déjà dans "Clusters algebras I" (celui de Fomin-Zelevinsky, pas le premier exposé !), permet d'enlever cette hypothèse. Il consiste à rendre la situation plus générique, en considérant certains coefficients comme des indéterminées ("freeze certain non-cluster variables").