

Les matrices à signes alternants et le groupe quantique  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

Adrien DAUPHIN

# Table des matières

- 1 Introduction** **2**
- 1.1 Dénombrement de matrices à signes alternants . . . . . 2
- 1.2 Stratégie . . . . . 2
- 2 Identités génériques** **4**
- 2.1 Premier pas . . . . . 4
- 2.2 Théorème de Yang-Baxter ou relation triangle-étoile . . . . . 6
- 2.3 Calcul de la fonction de partition . . . . . 7
- 3 Groupes quantiques et équation de Yang-Baxter** **12**
- 3.1 Algèbre de Hopf . . . . . 12
- 3.2 Définition et quelques représentations de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  . . . . . 13
- 3.3 Construction et définition de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$  . . . . . 15
- 3.4 Les R-matrices entre modules irréductibles de dimension 4 . . . . . 17
- 3.5 Théorème de Yang-Baxter avec les R-matrices . . . . . 19
- 3.6 Deuxième preuve du théorème 2.4 . . . . . 19
- 4 Spécialisation de la fonction de partition  $Z(n; X, Y)$**  **24**
- 4.1 Relation entre  $A(n)$  et  $Z(n; X, Y)$  . . . . . 24
- 4.2 Fin de la démonstration . . . . . 25

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Dénombrement de matrices à signes alternants

**Définition 1.1.** Une matrice à signes alternants, ou ASM, de taille  $n$  est une matrice carrée de taille  $n$ , composée de 0, 1 et  $-1$ , telle que :

- la somme de chaque élément d'une ligne ou d'une colonne est égale à 1.
- les signes des éléments non-nuls d'une ligne ou d'une colonne alternent.

On note  $A(n)$  le nombre des ASM de taille  $n$ .

**Exemple 1.2.** Voici un exemple d'une ASM de taille 4 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Remarque 1.3.** Les matrices de permutations sont des ASM particulières, en effet ce sont des ASM sans termes négatifs. On peut donc déjà affirmer que :

$$n! \leq A(n).$$

**Remarque 1.4.** La définition 1.1 implique que le premier et le dernier éléments non-nuls de chaque ligne et chaque colonne sont égaux à 1. Plus particulièrement aucun élément de la première et la dernière ligne et de la première et dernière colonne ne seront égaux à  $-1$ . Ainsi, il n'y aura qu'un seul élément non-nul, et égal à 1, dans chacune de ces lignes et colonnes particulières.

**Théorème 1.5** (Zeilberger). *Le nombre d'ASM de taille  $n$  est égal à :*

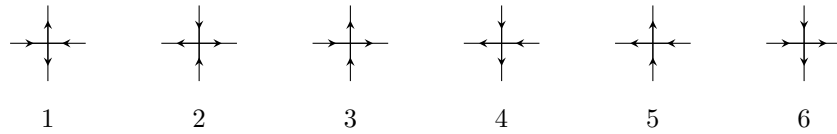
$$A(n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!} = \frac{1!4!7! \cdots (3n-2)!}{n!(n+1)! \cdots (2n-1)!}.$$

Les premières valeurs seront :  $A(1) = 1$ ,  $A(2) = 2$ ,  $A(3) = 7$ ,  $A(4) = 42$ ,  $A(5) = 429$ ,  $A(6) = 7436$ . . . On remarque donc que la suite tend rapidement vers l'infini, d'où l'impossibilité de compter les ASM à la main. Ainsi le but de ce mémoire sera de donner une des démonstrations de ce théorème, celle de Greg Kuperberg ([3]), et d'expliquer d'où viennent certains résultats au fil de la démonstration.

### 1.2 Stratégie

**Définition 1.6.** Une configuration de glace carrée, ou square ice, de taille  $n$  est une orientation sur les arêtes d'une grille carrée de côté  $n$ , dans laquelle chaque sommet a exactement deux arêtes entrantes et deux arêtes sortantes, les arêtes horizontales extérieures pointent à l'intérieur et les arêtes verticales extérieures pointent à l'extérieur.

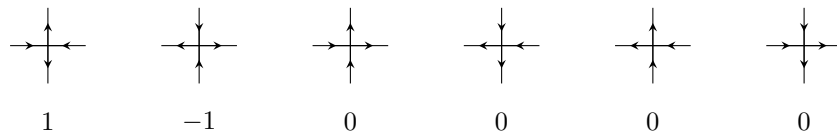
En fait dans une telle configuration, comme chaque sommet a exactement deux arrêtes entrantes et deux sortantes, on a exactement  $\binom{4}{2} = 6$  orientations possible pour un sommet, c'est-à-dire les 6 configurations locales suivantes :



Le *six-vertex model* est l'ensemble des graphiques (nommés états ou *states*) où chacun de ses sommets est comme ci-dessus et affecté d'un coefficient.

On admet la proposition suivante :

**Proposition 1.7.** *On peut convertir une configuration de glace carrée en une ASM, par la correspondance suivante :*



Cette conversion est bijective.

En particulier le nombre des ASM de taille  $n$ ,  $A(n)$ , est égal au nombre de configurations de glace carrée de taille  $n$ .

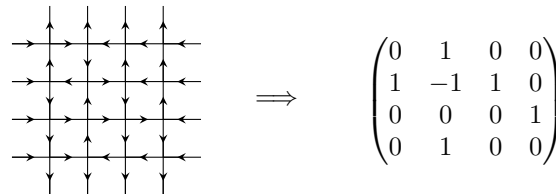
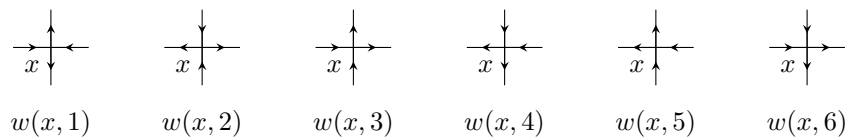


FIGURE 1.1 – Une configuration de glace carrée et l'ASM correspondante

Par la suite, on va considérer les configurations de glace carrée comme des *six-vertex models*, c'est-à-dire que chaque sommet de la configuration sera affecté d'un poids  $w(x, i)$  dépendant d'un paramètre  $x$  et de sa configuration locale  $i$  parmi l'une des six possibles :



On définit le poids total d'un état, en particulier d'une configuration de glace carrée, comme le produit des poids de tous ses sommets. On s'intéressera à la somme des poids de toutes les configurations pour une certaine taille  $n$ , ce qui définit une fonction appelée fonction de partition, dépendante des choix des coefficients de chaque configuration locale et de la fonction de poids. Par un bon choix de ces derniers, on définira une fonction dépendante de plusieurs paramètres qu'on spécialise après de sorte à trouver le nombre de configuration de glace carré, et particulièrement des ASM's.

# Chapitre 2

## Identités génériques

Dans cette partie, on donne la première partie de la preuve de G. Kuperberg. Il s'agit de calculer la fonction de partition définie précédemment avec un bon choix du poids de chaque configuration locale, cette fonction dépendra seulement du choix de la taille  $n$  et de  $2n$  indéterminées associées aux lignes et colonnes de toutes configurations de glace carrée de taille  $n$ .

### 2.1 Premier pas

Soit  $h$  un nombre complexe ou une indéterminée. On pose  $q = e^h$  et  $[x] = \frac{q^{x/2} - q^{-x/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$ . Tout au long de ce chapitre, nous allons nous intéresser aux polynômes de Laurent demi-entiers, c'est-à-dire les éléments de  $A[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ , où  $A$  est un anneau, tel que la différence entre deux exposants est un entier. Donc  $P$  est un polynôme de Laurent demi-entier à coefficient dans  $A$  si  $P$  ou  $t^{1/2}P$  est un polynôme de Laurent ( $P \in A[t, t^{-1}]$  ou  $t^{1/2}P \in A[t, t^{-1}]$ ). Ainsi, pour  $q$  fixé,  $[x]$  est un polynôme de Laurent demi-entier en  $q^x$  à coefficients dans  $A = \mathbb{Q}(q)$ .

**Remarque 2.1.** Si  $x$  est un entier positif, on a :

$$\begin{aligned} [x] &= \frac{q^{x/2} - q^{-x/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = q^{\frac{1-x}{2}} \left( \frac{q^x - 1}{q - 1} \right) \\ &= q^{\frac{1-x}{2}} (q^{x-1} + q^{x-2} + \dots + q^0) \\ &= q^{\frac{x-1}{2}} + q^{\frac{x-3}{2}} + \dots + q^{-\frac{x-1}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi pour  $q \rightarrow 1$  ( $h \rightarrow 0$ ), on obtient  $[x] \rightarrow x$ . On peut généraliser cette limite pour  $x$  quelconque, par un développement limité de  $[x]$  pour  $h$  petit :

$$\begin{aligned} [x] &= \frac{e^{hx/2} - e^{-hx/2}}{e^{h/2} - e^{-h/2}} \\ &= \frac{hx + o(h^2)}{h + o(h^2)} \\ &= x + o(h). \end{aligned}$$

**Définition 2.2.** On nomme  $R$ -matrice de  $x$ , noté  $R(x)$ , le sommet désigné par  $x$  :

$$\begin{array}{c} | \\ \hline x \\ \hline | \end{array}$$

qui définit l'ensemble des poids suivants :

$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \leftarrow \rightarrow \\ \updownarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \leftarrow \rightarrow \\ \updownarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \leftarrow \rightarrow \\ \updownarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \leftarrow \rightarrow \\ \updownarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \leftarrow \rightarrow \\ \updownarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \leftarrow \rightarrow \\ \updownarrow \end{array}$
$-q^{-x/2}$	$-q^{x/2}$	$[x - 1]$	$[x - 1]$	$[x]$	$[x]$

Les poids ci-dessus sont invariants par rotation de  $180^\circ$ , d'où :

$$\frac{\quad}{x \mid} = \frac{\mid}{\quad} x$$

**Remarque 2.3.** On étend la définition 2.2 à des configurations locales où l'on a des arcs de cercles au lieu d'arêtes qui se coupent transversalement. C'est-à-dire, partant d'une réunion de courbes non orientée, on attribue un poids à chaque choix d'orientation des extrémités de courbes. Ainsi si  $p$  est le sommet désigné par  $x$ , on pose les conventions suivantes sur les arcs en  $p$  :

- si la tangente en  $p$  est verticale et bien orientée, le poids associé à l'arc est 1 ;

$$\begin{array}{cccc} \curvearrowright & \curvearrowleft & \curvearrowleft & \curvearrowright \\ & & & \\ & & & 1 \end{array}$$

- si la tangente en  $p$  est horizontale et orientée vers la droite, le poids associé à l'arc est 1 ;

$$\begin{array}{cc} \curvearrowright & \curvearrowleft \\ & \\ & 1 \end{array}$$

- si la tangente en  $p$  est horizontale, orientée vers la gauche et si la concavité de l'arc est vers le haut, le poids associé à l'arc est  $-q^{-1/2}$  ;

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ -q^{-1/2} \end{array}$$

- si la tangente en  $p$  est horizontale, orientée vers la gauche et si la concavité de l'arc est vers le bas, le poids associé à l'arc est  $-q^{1/2}$  ;

$$\begin{array}{c} \curvearrowleft \\ -q^{1/2} \end{array}$$

- si la tangente en  $p$  est mal orientée, c'est-à-dire qu'elle possède les deux orientations, le poids associé à l'arc est 0.

$$\begin{array}{cccccccc} \curvearrowright & \curvearrowleft & \curvearrowleft & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowleft & \curvearrowleft & \curvearrowright \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & 0 \end{array}$$

Avec les conventions précédentes on peut exprimer  $R(x)$  de la façon suivante :

$$\frac{\times}{x} = [x] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \left( \right.$$

Par exemple, on a bien l'égalité suivante :

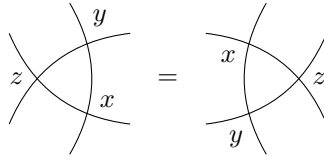
$$\begin{aligned} \frac{\times}{x} &= [x] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} + [x-1] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \left( \right. \\ -q^{x/2} &= [x](-q^{1/2} \times 1) + [x-1](1 \times 1) \end{aligned}$$

Cette extension nous permet aussi d'établir deux autres relations :

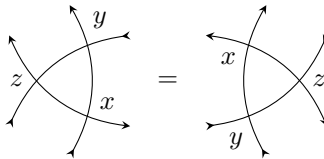
$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} = \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \curvearrowright \end{array} = \mid \qquad \bigcirc = -q^{1/2} - q^{-1/2} = -[2]$$

## 2.2 Théorème de Yang-Baxter ou relation triangle-étoile

**Théorème 2.4** (Yang-Baxter). *Si  $x = y + z$ , les  $R$ -matrices  $R(x)$ ,  $R(y)$  et  $R(z)$  satisfont à l'égalité :*



On va tout d'abord voir le sens de ce théorème, aussi appelé la relation triangle-étoile (ou *delta-star*). C'est en fait une égalité sur les différentes fonctions de partition possibles à partir de ces deux graphes. C'est-à-dire que si l'on oriente les six arêtes extérieures de la même façon pour le graphique de gauche que celui de droite, on a égalité des fonctions de partitions. Par exemple, voici l'une de ces égalités :

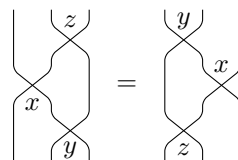


qui nous donne la relation suivante après avoir trouvé tous les états possibles de ces deux graphes :

$$(-q^{x/2})(-q^{-y/2})[z] - q^{z/2}[x-1][y] = -q^{z/2}[x][y-1]$$

L'égalité du théorème résume  $2^6 = 64$  égalités. En fait 44 d'entre elles sont nulles car aucune de ces orientations n'a un état autorisé par le modèle de *six-vertex*, on ne peut vérifier ce dernier sur un tel graphe que si l'on a autant d'arêtes extérieures pointant vers l'intérieur que vers l'extérieur. On a donc  $\binom{6}{3} = 20$  égalités non évidentes, et en fait on a 10 égalités répétées deux fois par invariance par rotation de  $180^\circ$  des deux graphes. On pourrait vérifier ces égalités à la main, mais grâce aux formules de la remarque 2.3, on va réduire le calcul à une seule égalité.

**Démonstration.** On va tout d'abord réarranger l'égalité comme ceci :



Il s'agit donc de prouver une relation d'invariance d'un des deux graphes par rotation de  $180^\circ$ . Partons du graphe de gauche : on le découpe en remplaçant, grâce aux relations de la remarque 2.3, une configuration locale où deux arêtes se croisent par une somme de deux configurations non croisées. Après calculs, on trouve :

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right) = \left( [x][y][z] + [x-1][y][z-1] + [x-1][y-1][z] - [2][x-1][y][z] \right) \left| \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right. \\
& + [x][y-1][z-1] \left| \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right. + [x][y-1][z] \left| \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right. \\
& + [x-1][y-1][z-1] \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right. + [x][y][z-1] \left| \begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Les trois derniers termes sont invariants par rotation par  $180^\circ$  pour tout  $x, y$  et  $z$ , tandis que les graphes des deux premiers termes sont échangés par cette rotation. Il nous reste donc à prouver que le coefficient de ces deux graphes sont égaux si  $x = y + z$ , c'est-à-dire que

$$[x][y][z] + [x-1][y][z-1] + [x-1][y-1][z] - [2][x-1][y][z] = [x][y-1][z-1].$$

D'autre part, par un calcul immédiat, on a  $[-a] = -[a]$  et

$$[a][b] - [a+1][b-1] = [a-b+1]$$

pour  $a$  et  $b$  quelconques. Ainsi, si  $x = y + z$  :

$$\begin{aligned}
[x-1][y][z-1] + [z][x][y] + [z][x-1]([y-1] - [2][y]) &= [x-1][y][z-1] + [z][x][y] - [z][x-1][y+1] \\
&= [x-1][y][z-1] + [z]([x][y] - [x-1][y+1]) \\
&= [x-1][y][z-1] + [z][y-x+1] \\
&= [x-1][y][z-1] - [x-y][z-1] \\
&= [x][y-1][z-1]. \square
\end{aligned}$$

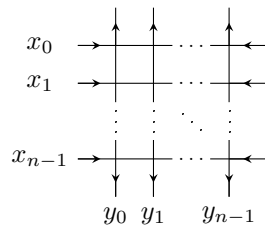
## 2.3 Calcul de la fonction de partition

Par commodité, posons la notation suivante :

$$x \begin{array}{c} | \\ \hline | \\ y \end{array} = x-y \begin{array}{c} | \\ \hline | \end{array}$$

de sorte à affecter des paramètres aux lignes et colonnes des configurations de glaces carrés plutôt qu'à chaque sommet.

**Définition 2.5.** On pose  $Z(n; X, Y)$  la fonction de partition des configurations de glace carrée de taille  $n$  affectées des coefficients  $X = (x_0, \dots, x_{n-1})$  aux lignes horizontales et  $Y = (y_0, \dots, y_{n-1})$  aux lignes verticales, en d'autres termes, pour les configurations de glace carrée de cette forme :





**Lemme 2.6.** *La fonction  $Z(n; X, Y)$  est symétrique en les  $x_i$  et en les  $y_i$ .*

**Démonstration.** On va s'intéresser aux ligne  $i$  et  $i + 1$ . On introduit un sommet affecté du coefficient  $x_{i+1} - x_i$  par la gauche de la configuration, ce dernier ne pourra prendre qu'une seule des 6 orientations possibles, qui est affectée du poids  $[x_{i+1} - x_i]$ , d'où après correction de l'exposant dans [3] :

$$[x_{i+1} - x_i] \begin{array}{c} x_i \rightarrow \\ x_{i+1} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \dots | \\ | \dots | \end{array} \leftarrow = \begin{array}{c} x_{i+1} \\ x_i \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \dots | \\ | \dots | \end{array} \leftarrow$$

Par suite, en utilisant le théorème 2.4, on obtient :

$$\begin{array}{c} x_{i+1} \\ x_i \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \dots | \\ | \dots | \end{array} \leftarrow = \begin{array}{c} x_{i+1} \rightarrow \\ x_i \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \dots | \\ | \dots | \end{array} \leftarrow = \dots = \begin{array}{c} x_{i+1} \rightarrow \\ x_i \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \dots | \\ | \dots | \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

De même, le sommet affecté du coefficient  $x_{i+1} - x_i$  dans la dernière égalité ne peut prendre qu'une des 6 orientations possible, aussi affectée du poids  $[x_{i+1} - x_i]$ , d'où :

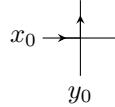
$$\begin{array}{c} x_i \rightarrow \\ x_{i+1} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \dots | \\ | \dots | \end{array} \leftarrow = \begin{array}{c} x_{i+1} \rightarrow \\ x_i \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} | \dots | \\ | \dots | \end{array} \leftarrow$$

ce qui prouve que  $Z(n; X, Y)$  est symétrique en  $x_i$  et  $x_{i+1}$  pour tout  $i$ , or on sait que les transpositions  $(i, i + 1)$  engendrent  $\mathfrak{S}_n$ , donc  $Z(n; X, Y)$  est symétrique en tout les  $x_i$ . Le même argument est utilisé pour la symétrie en les  $y_i$ .  $\square$

**Lemme 2.7.** *Si  $x_i = y_j + 1$ , alors*

$$Z(n; X, Y) = -q^{-1/2} \left( \prod_{k \neq j} [x_i - y_k] \right) \left( \prod_{k \neq i} [x_k - y_j] \right) Z(n - 1; X \setminus x_i, Y \setminus y_i).$$

**Démonstration.** On s'intéresse d'abord au cas  $i = j = 0$ , on suppose donc  $x_0 = y_0 + 1$ . La configuration



ne peut prendre que deux orientations possibles, dont on calcule le poids :

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ x_0 \rightarrow \leftarrow \\ \downarrow \\ y_0 \end{array} = -q^{-(x_0 - y_0)/2} = -q^{-1/2}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ x_0 \rightarrow \rightarrow \\ \uparrow \\ y_0 \end{array} = [x_0 - y_0 - 1] = 0$$

Toute configuration de glace carrée dont le sommet de ligne  $x_0$  et de colonne  $y_0$  qui suit la seconde orientation ci-dessus sera donc de poids nul. D'autre part, si ce dernier sommet est de la première orientation, tout sommet de la ligne de  $x_k$  et de la colonne de  $y_0$  de poids non nul, pour  $k \neq 0$ , aura pour orientation



donc affecté du poids  $[y_0 - x_k]$ . De même, tout sommet de la ligne  $x_0$  et de la colonne de  $y_k$ , pour  $k \neq 0$ , sera de la forme



donc affecté du poids  $[y_k - x_0]$ . De plus, par l'orientation des sommets de la ligne  $x_0$  et de la colonne  $y_0$ , les configurations restreinte aux lignes  $X \setminus x_0$  et aux colonnes  $Y \setminus y_0$  sont toutes les configurations de glace carrée de la fonction de partition  $Z(n; X \setminus x_0, Y \setminus y_0)$ . On obtient donc :

$$Z(n; X, Y) = -q^{-1/2} \left( \prod_{k \neq 0} [x_0 - y_k] \right) \left( \prod_{k \neq 0} [x_k - y_0] \right) Z(n-1; X \setminus x_0, Y \setminus y_0).$$

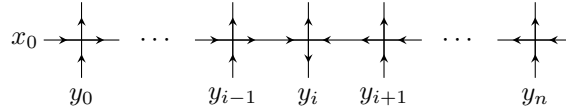
Le cas général s'obtient par symétrie grâce au lemme 2.6.  $\square$

**Lemme 2.8.** *L'élément  $q^{nx_0} Z(n; X, Y)$  est un polynôme en  $q^{x_0}$  de degré au plus  $n-1$ .*

**Démonstration.** Dans chaque configuration de glace carrée, seuls les sommets de la ligne  $x_0$ , c'est-à-dire la première ligne, font apparaître des termes en  $q^{x_0/2}$ , c'est-à-dire  $n$  sommets. De plus, à la ligne  $x_0$ , il ne peut y avoir que 3 configurations différentes : les configurations 1, 3 et 5 de la définition 1.6. La configuration 1, c'est à dire



apparaît exactement une fois, la première ligne sera en fait de la forme suivante pour  $i$  convenable :



Ce dernier point peut s'expliquer par la remarque 1.4, c'est-à-dire que sur la première ligne d'une ASM, on n'a qu'un 1 et  $n-1$  zéros. D'autre part, le poids de la configuration 1 est de la forme  $-q^{(y_i - x_0)/2}$  et

$$\left( -q^{x_0/2} \right) \left( -q^{(y_i - x_0)/2} \right) = -q^{y_i/2}$$

est un polynôme constant. Tandis que le poids des deux configurations 3 et 5 sont de la forme  $[x_0 - y_i]$  ou  $[x_0 - y_i - 1]$  et  $q^{x_0/2}[x_0 - y_i]$  ou  $q^{x_0/2}[x_0 - y_i - 1]$  sont des polynômes de degré 1 en  $q^{x_0}$ . Le poids d'une configuration de glace carrée de taille  $n$  affecté des coefficients  $X$  et  $Y$  auquel on multiplie  $-q^{nx_0/2}$  est donc un polynôme de degrés  $n-1$  en  $q^{x_0}$ , ainsi la fonction de partition  $Z(n; X, Y)$  est la somme de polynômes de degré  $n-1$ .  $\square$

**Théorème 2.9** (Izergin, Korepin). *La fonction de répartition  $Z(n; X, Y)$  est donnée par*

$$Z(n; X, Y) = \frac{(-1)^n \left( \prod_{i=0}^{n-1} q^{(y_i - x_i)/2} \right) \left( \prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1] \right)}{\left( \prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left( \prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} \det M,$$

où  $M$  est la matrice carrée de taille  $n$  dont les coefficients sont :

$$M_{i,j} = \frac{1}{[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]}.$$

**Démonstration.** On nommera  $Z'(n; X, Y)$  le membre de droite,  $D$  le déterminant de  $M$ ,  $P$  le numérateur et  $Q$  le dénominateur de sorte que

$$Z'(n; X, Y) = \frac{P}{Q} D.$$

On va démontrer que  $Z'$  vérifie les trois lemmes précédents. Il est aisé de vérifier le lemme 2.6. En effet, échanger deux  $x_i$  ou deux  $y_j$  revient à échanger deux lignes ou deux colonnes de  $M$ , d'où  $D$  est antisymétrique en les  $x_i$  et les  $y_j$ . Puis par simple vérification,  $P$  est symétrique et  $Q$  antisymétriques en les  $x_i$  et les  $y_j$  d'où la symétrie de  $Z'$ .

Vérifions les hypothèses du lemme 2.7. En développant le déterminant par la première colonne on a

$$D = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{[x_k - y_0][x_k - y_0 - 1]} D_k$$

où  $D_k$  est le déterminant de la matrice  $M$  sans la  $k$ -ième ligne et la première colonne. Ainsi

$$Z'(n; X, Y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n+j} \left( \prod_{i=0}^{n-1} q^{(y_i - x_i)/2} \right) \left( \prod_{(i,j) \neq (k,0)} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1] \right)}{\left( \prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j] \right) \left( \prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j] \right)} D_k.$$

On suppose  $x_0 = y_0 + 1$ . Comme  $[x_0 - y_0 - 1] = 0$ , tout les termes de la somme sont nuls sauf le premier, celui où  $k = 0$ . On en déduit donc :

$$Z'(n; X, Y) = \frac{-q^{(y_0 - x_0)/2} \left( \prod_{i \neq 0} [x_i - y_0][x_i - y_0 - 1] \right) \left( \prod_{j \neq 0} [x_0 - y_j][x_0 - y_j - 1] \right)}{\left( \prod_{i \neq 0} [x_i - x_0] \right) \left( \prod_{j \neq 0} [y_0 - y_j] \right)} Z'(n-1; X \setminus x_0, Y \setminus y_0).$$

Puis on conclut avec l'hypothèse  $x_0 = y_0 + 1$  dans la formule ci-dessus.

Vérifions le lemme 2.8. On pose

$$P' = \prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j][x_i - y_j - 1], \quad A = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} q^{(y_i - x_i)/2}$$

tel que  $P = AP'$ . Le facteur  $P'$  est un polynôme de Laurent en  $q^{x_i}$  (et  $q^{y_j}$ ) car le produit  $[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$  l'est. Le produit  $P'D$  sera aussi un polynôme de Laurent en  $q^{x_i}$  car  $M$  est la matrice des inverses de  $[x_i - y_j][x_i - y_j - 1]$ . De plus  $P'D$  est antisymétrique en les  $x_i$  d'où  $P'D = VR$  où  $R$  est un polynôme de Laurent symétrique et  $V$  le polynôme de Vandermonde en les  $q^{x_i}$ , c'est-à-dire

$$V = \prod_{0 \leq j < i < n} (q^{x_i} - q^{x_j}).$$

D'autre part

$$\frac{q^{x_i} - q^{x_j}}{[x_i - x_j]} = (q^{1/2} - q^{-1/2}) q^{x_i/2} q^{x_j/2}.$$

qui est un polynôme de Laurent demi-entier en les  $q^{x_i}$ . Ainsi  $Z'(n, X, Y)$  est bien un polynôme de Laurent demi-entier en  $q^{x_0}$  en particulier.

On s'intéresse maintenant au degré et à la valuation de  $Z'$ . Comme  $[x_0 - k]$  est de degré  $1/2$  et de valuation  $-1/2$  en  $q^{x_0}$ , on trouve facilement que

$$\begin{aligned} \deg(P'D) &= n - 1, & \text{val}(P'D) &= 1 - n, \\ \deg(Q) &= \frac{n-1}{2}, & \text{val}(Q) &= \frac{1-n}{2}, \\ \deg(A) &= -1/2, & \text{val}(A) &= -1/2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \deg(Z'(n; X, Y)) &\leq \deg(A) + \deg(P'D) - \text{val}(Q) = \frac{n-2}{2}, \\ \text{val}(Z'(n; X, Y)) &\geq \text{val}(A) + \text{val}(P'D) - \deg(Q) = -\frac{n}{2}, \end{aligned}$$

Et donc  $q^{n x_0/2} Z'(n, X, Y)$  est bien un polynôme en  $q^{x_0}$  de degré au plus  $n - 1$ .

Prouvons maintenant l'égalité de  $Z$  et  $Z'$  par récurrence. On a  $Z'(0) = 1 = Z(0)$ . Supposons qu'il existe  $n$  tel que  $Z'(n-1; X, Y) = Z(n-1; X, Y)$ . On pose  $T(q^{x_0}) = q^{nx_0/2}Z(n, X, Y)$  et  $T'(q^{x_0}) = q^{nx_0/2}Z'(n, X, Y)$ , qui sont deux polynômes de degrés au plus  $n-1$  d'après le lemme 2.7. De plus,  $T$  et  $T'$  prennent la même valeur en  $n$  points. En effet on a  $T(q^{y_j+1}) = T'(q^{y_j+1})$  par hypothèse de récurrence et le lemme 2.7. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a  $T = T'$  et ainsi  $Z(n; X, Y) = Z'(n; X, Y)$ . Par récurrence on conclut que  $Z = Z'$ .  $\square$

## Chapitre 3

# Groupes quantiques et équation de Yang-Baxter

Dans cette partie nous allons comprendre d'où vient le résultat du théorème de Yang-Baxter et proposer une deuxième preuve, se reportant à l'article de Jimbo [2]. Ce dernier résulte de la théorie des représentations d'une structure d'algèbre non triviale, le groupe quantique  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ .

### 3.1 Algèbre de Hopf

Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre unitaire sur un corps  $\mathbb{K}$ . On dira que  $(A, \Delta, \varepsilon, S)$  est une algèbre d'Hopf si :

- (i) Il existe  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$  et  $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{K}$  des homomorphismes d'algèbres et  $S : A \rightarrow A$  un anti-homomorphisme d'algèbre.

C'est-à-dire que  $\Delta$ ,  $\varepsilon$  et  $S$  sont linéaires, envoient  $1_A$  sur  $1_A$  et pour tout  $a, b \in A$  :

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \quad \varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b), \quad S(ab) = S(b)S(a).$$

Les applications  $\Delta$ ,  $\varepsilon$  et  $S$  se nomment le coproduit, la counité et l'antipode respectivement.

- (ii) De plus  $\Delta$ ,  $\varepsilon$  et  $S$  possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta &= (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ (\varepsilon \otimes \text{Id}) \circ \Delta &= \text{Id} = (\text{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \\ m \circ (S \otimes \text{Id}) \circ \Delta &= \varepsilon = m \circ (\text{Id} \otimes S) \circ \Delta \end{aligned}$$

où  $m : A \otimes A \rightarrow A$  est le produit usuel  $m(a \otimes b) = ab$ .

En d'autres termes si  $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes a_i$  on a :

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta(a_i) \otimes b_i &= \sum_i a_i \otimes \Delta(b_i) \\ \sum_i \varepsilon(a_i) b_i &= a = \sum_i a_i \varepsilon(b_i) \\ \sum_i S(a_i) b_i &= \varepsilon(a) 1_A = \sum_i a_i S(b_i). \end{aligned}$$

L'utilité de la notion d'algèbre de Hopf par la suite viendra du coproduit  $\Delta$ . En effet si  $V$  et  $W$  sont deux  $A$ -modules,  $V \otimes W$  n'est pas en général un  $A$ -module mais un  $A \otimes A$  module. Il devient un  $A$ -module grâce à l'existence du coproduit  $\Delta$ .

**Exemple 3.1.** Soit  $G$  un groupe fini. La  $\mathbb{C}$ -algèbre

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g : a_g \in \mathbb{C} \right\}$$

muni des homomorphismes d'algèbre  $\Delta$ ,  $\varepsilon$  et de l'anti-homomorphisme d'algèbre  $S$  définies par :

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \quad S(g) = g^{-1},$$

où  $g \in G$ , est une algèbre de Hopf. En effet  $\Delta$ ,  $\varepsilon$  et  $S$  vérifient clairement (i). Soit  $g \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \Delta \otimes \text{Id} \circ \Delta(g) &= (\Delta \otimes \text{Id})(g \otimes g) = g \otimes g \otimes g = (\text{Id} \otimes \Delta)(g \otimes g) = (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(g) \\ (\varepsilon \otimes \text{Id}) \circ \Delta(g) &= (\varepsilon \otimes \text{Id})(g \otimes g) = 1g = (\text{Id} \otimes \varepsilon)(g \otimes g) = (\text{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(g) \\ m \circ (S \otimes \text{Id}) \circ \Delta(g) &= m \circ (S \otimes \text{Id})(g \otimes g) = gg^{-1} = \varepsilon(g) = g^{-1}g = m \circ (\text{Id} \otimes S)(g \otimes g) = m \circ (\text{Id} \otimes S) \circ \Delta(g), \end{aligned}$$

d'où les opérateurs vérifient bien (ii).

### 3.2 Définition et quelques représentations de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

**Définition 3.2.** Soit  $q \in \mathbb{C}$  générique (en fait il suffit que  $q \neq 0, \pm 1$ ). On définit  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre présentée par générateurs  $e, f, K^{\pm 1}$  et relations :

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= K^{-1}K = 1, \\ KeK^{-1} &= q^2e, \quad KfK^{-1} = q^{-2}f, \\ [e, f] &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

On peut d'abord remarquer la représentation triviale de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ ,  $V = \mathbb{C}v$ , donnée par

$$ev = fv = 0, \quad K^{\pm 1}v = v.$$

Plus intéressant, nous allons étudier la représentation de degré 2 de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Soit  $V = \mathbb{C}v_+ + \mathbb{C}v_-$ . On pose les relations suivantes :

$$\begin{aligned} K.v_{\pm} &= q^{\pm 1}v_{\pm}, \\ e.v_+ &= 0, \quad e.v_- = v_+, \\ f.v_+ &= v_-, \quad f.v_- = 0. \end{aligned}$$

L'espace  $V$  muni des opérations ci-dessus est un  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module, c'est donc une représentation de degré 2 et, si  $V$  est muni de la base  $\{v_+, v_-\}$ ,  $e, f, K$  s'écrit dans  $\text{End}(V)$  :

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.3.** L'algèbre  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  est en fait une déformation du groupe de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Rappelons que :

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) / a + d = 0 \right\} = \ker(\text{tr}) = \mathbb{C}e + \mathbb{C}f + \mathbb{C}h$$

où

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$K = \exp(\lambda.h) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix},$$

où  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $q = e^\lambda$ .

Les éléments  $e, f$  et  $K$  définis ci-dessus vérifient les relations de la définition 3.2. Ces relations sont en fait une déformation des égalités  $[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$  dans  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  au sens où on les retrouve quand  $\lambda \rightarrow 0$  (i.e  $q \rightarrow 1$ ).

Nous allons maintenant munir  $A = U_q(\mathfrak{sl}_2)$  d'une structure d'algèbre de Hopf. Ils nous faut  $\Delta, \varepsilon$  et  $S$  vérifiant les relations (i) et (ii) de la section 3.1.

**Proposition 3.4.** Soit  $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ ,  $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{C}$  et  $S : A \longrightarrow A$  tel que :

$$\begin{aligned}\Delta(e) &= e \otimes 1 + K \otimes e, \quad \Delta(f) = f \otimes K^{-1} + 1 \otimes f, \quad \Delta(K^{\pm 1}) = K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1}, \\ \varepsilon(e) &= \varepsilon(f) = 0, \quad \varepsilon(K^{\pm 1}) = 1, \\ S(e) &= -K^{-1}e, \quad S(f) = -fK, \quad S(K^{\pm 1}) = K^{\mp 1}.\end{aligned}$$

Alors  $(A, \Delta, \varepsilon, S)$  est une algèbre de Hopf.

**Démonstration.** On va vérifier la première relation qui définit une algèbre de Hopf :

$$(\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta = (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta(e) &= e \otimes 1 \otimes 1 + K \otimes e \otimes 1 + K \otimes K \otimes e = (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(e) \\ (\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta(f) &= f \otimes K^{-1} \otimes K^{-1} + 1 \otimes f \otimes K^{-1} + 1 \otimes 1 \otimes f = (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(f) \\ (\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta(K^{\mp 1}) &= K^{\mp 1} \otimes K^{\mp 1} \otimes K^{\mp 1} = (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(K^{\mp 1}).\end{aligned}$$

Les deux autres relations se vérifient aussi aisément et sont laissées au lecteur. D'autre part vérifions que  $\Delta$  conserve les relations de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  :

$$\begin{aligned}\Delta(KeK^{-1}) &= \Delta(K)\Delta(e)\Delta(K^{-1}) \\ &= (K \otimes K)(e \otimes 1 + K \otimes e)(K^{-1} \otimes K^{-1}) \\ &= KeK^{-1} \otimes 1 + K \otimes KeK^{-1} \\ &= q^2(e \otimes 1 + K \otimes e) = \Delta(q^2e) \\ \Delta([e, f]) &= \Delta(e)\Delta(f) - \Delta(f)\Delta(e) \\ &= (e \otimes 1 + K \otimes e)(f \otimes K^{-1} + 1 \otimes f) - (f \otimes K^{-1} + 1 \otimes f)(e \otimes 1 + K \otimes e) \\ &= ef \otimes K^{-1} + e \otimes f + Kf \otimes eK^{-1} + K \otimes ef - fe \otimes K^{-1} - e \otimes f - fK \otimes K^{-1}e - K \otimes fe \\ &= [e, f] \otimes K^{-1} + K \otimes [e, f] \\ &= \frac{1}{q-q^{-1}} (K \otimes K^{-1} - K^{-1} \otimes K^{-1} + K \otimes K - K \otimes K^{-1}) \\ &= \frac{1}{q-q^{-1}} (\Delta(K) - \Delta(K^{-1})) = \Delta\left(\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right).\end{aligned}$$

La relation  $KK^{-1} = K^{-1}K = 1$  est évidente à vérifier tandis que la relation  $KfK^{-1} = q^{-2}f$  est vérifié par un calcul similaire fait précédemment. La vérification que  $S$  et  $\varepsilon$  conservent aussi les relations de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  sont laissées au lecteur.  $\square$

Ainsi pour  $V$  (où  $V \simeq \mathbb{C}^2$ ) un  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module,  $V^{\otimes n}$  sera aussi un  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module, et plus particulièrement  $V \otimes V$ . On va ainsi trouver les  $R : V \otimes V \longmapsto V \otimes V$ , appelées les  $R$ -matrices, tel que  $R$  soit un morphisme de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules. C'est-à-dire il faut que :  $X.R = R.X$  où  $X = \Delta(e)$ ,  $\Delta(f)$  ou  $\Delta(K)$ .

**Proposition 3.5.** Les  $R$ -matrices de  $V \otimes V$  dans  $V \otimes V$  sont de la forme :

$$R = \alpha \text{Id}_{V \otimes V} + (\alpha + \beta)P,$$

pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , où

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-q^{-1}}{q+q^{-1}} & \frac{1}{q+q^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q+q^{-1}} & \frac{-q}{q+q^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.6.** La matrice  $P$  ci dessus a un déterminant nul et une trace égale à  $-1$ , ainsi on a

$$P^2 = -P.$$

**Démonstration.** Soit  $R : V \otimes V \longmapsto V \otimes V$ , un morphisme de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules.

Les matrices seront écrites dans la base  $B = \{v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_- v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-\}$  de  $V \otimes V$ .

Dans celle-ci

$$\Delta(K) = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2} \end{pmatrix},$$

qui possède donc 3 valeurs propres  $q^2, 1, q^{-2}$ . Or  $R$  doit conserver les valeurs propres de  $\Delta(K)$  d'où  $R$  sera de la forme

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Soit  $w_2 = \Delta(f)(v_+ \otimes v_+) = q^{-1}v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_-$ . On vérifie aisément que

$$0 \xleftarrow[\Delta(e)]{v_+ \otimes v_+} \xrightarrow[\Delta(e)]{\Delta(f)} w_2 \xleftarrow[\Delta(e)]{v_- \otimes v_-} \xrightarrow[\Delta(e)]{\Delta(f)} 0.$$

Ce schéma décrit l'action de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  sur les vecteurs  $v_+ \otimes v_+, w_2, v_- \otimes v_-$ . On ne fait pas apparaître  $\Delta(K)$  car ce dernier ne fait sortir que la valeur propre liée à chacun de ces vecteur ( $q^2, 1, q^{-2}$  respectivement). Ainsi on a un sous  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module engendré par ses 3 vecteurs donc de dimension 3, noté  $L(2)$  (le schéma montre la stabilité de  $L(2)$ ). De plus  $L(2)$  est irréductible : il suffit de prendre un élément  $w$  de  $L(2)$ , appliquer  $\Delta(e)$  ou  $\Delta(e)^2$  on obtient  $*v_+ \otimes v_+$  puis par  $\Delta(f)$  on récupère les deux autres vecteurs.

Soit  $w_0 = v_+ \otimes v_- - qv_- \otimes v_+$ . On a

$$0 \xleftarrow[\Delta(e)]{w_0} \xrightarrow{\Delta(f)} 0$$

Ainsi, on obtient un second sous  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module engendré par  $w_0$ , noté  $L(0)$ , évidemment irréductible car de dimension 1.

On a  $V \otimes V = L(2) \oplus L(0)$ , où  $L(2)$  et  $L(0)$  irréductibles et non isomorphes. Donc par le lemme de Schur la restriction de  $R$  à  $L(2)$  (respectivement  $L(0)$ ) est une homothétie. Inversement, pour  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{C}$  et  $R$  tel que  $R|_{L(2)} = \alpha Id_{L(2)}$  et  $R|_{L(0)} = \beta Id_{L(0)}$ ,  $R$  est un morphisme de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules. D'autre part on a

$$v_+ \otimes v_- = \frac{qw_2 - q^{-1}w_0}{q + q^{-1}}, \quad v_- \otimes v_+ = \frac{w_2 + w_0}{q + q^{-1}}.$$

On obtient ainsi  $R$  :

$$\begin{aligned} R(v_+ \otimes v_+) &= \alpha v_+ \otimes v_+ \\ R(v_+ \otimes v_-) &= \frac{\alpha qw_2 - \beta q^{-1}w_0}{q + q^{-1}} = \frac{\alpha q - \beta q^{-1}}{q + q^{-1}} v_+ \otimes v_- + \frac{\alpha + \beta}{q + q^{-1}} v_- \otimes v_+ \\ R(v_- \otimes v_+) &= \frac{\alpha w_2 + \beta w_0}{q + q^{-1}} = \frac{\alpha + \beta}{q + q^{-1}} v_+ \otimes v_- + \frac{\alpha q^{-1} - \beta q}{q + q^{-1}} v_- \otimes v_+ \\ R(v_- \otimes v_-) &= \alpha v_- \otimes v_-, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha q - \beta q^{-1}}{q + q^{-1}} & \frac{\alpha + \beta}{q + q^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha + \beta}{q + q^{-1}} & \frac{\alpha q^{-1} - \beta q}{q + q^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (\alpha + \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-q^{-1}}{q + q^{-1}} & \frac{1}{q + q^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q + q^{-1}} & \frac{-q}{q + q^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \square$$

### 3.3 Construction et définition de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$

**Définition 3.7.** Soit  $q \in \mathbb{C}$  générique. On définit  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre présentée par générateurs  $e_0, f_0, K_0, e_1, f_1, K_1$  et relations :

$$\begin{aligned} [e_i, f_i] &= \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad [e_i, f_j] = 0, \\ K_i e_i K_i^{-1} &= q^2 e_i, \quad K_i f_i K_i^{-1} = q^{-2} f_i, \\ K_i e_j K_i^{-1} &= q^{-2} e_j, \quad K_i f_j K_i^{-1} = q^2 f_j, \\ \sum_{p=0}^3 (-1)^p e_i^{3-p} e_j e_i^p &= 0, \\ \sum_{p=0}^3 (-1)^p f_i^{3-p} f_j f_i^p &= 0, \end{aligned}$$



où  $i \neq j \in \{0, 1\}$ . Les deux dernières relations sont appelées relations de Serre.

**Proposition 3.8.** Soit  $x \in \mathbb{C}^*$ . Il existe un homomorphisme d'algèbres  $\varphi_x : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \mapsto U_q(\mathfrak{sl}_2)$  tel que :

$$\begin{aligned}\varphi_x(e_0) &= xf, \quad \varphi_x(f_0) = x^{-1}e, \quad \varphi_x(K_0) = K^{-1}, \\ \varphi_x(e_1) &= e, \quad \varphi_x(f_1) = f, \quad \varphi_x(K_1) = K.\end{aligned}$$

**Démonstration.** La démonstration est facile et est laissée au lecteur.  $\square$

**Remarque 3.9.** L'algèbre  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  est une déformation de  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ , lui-même l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$  où

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}].$$

On peut facilement démontrer que les éléments

$$\begin{aligned}e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e \otimes 1, & f_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f \otimes 1, & h_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h \otimes 1, \\ e_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = e \otimes t, & f_0 &= \begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f \otimes t^{-1}, & h_0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -h \otimes 1\end{aligned}$$

engendrent  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$  où  $e, f, h$  sont les générateurs de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  vus précédemment. En posant  $K_i = \exp(\lambda.h_i)$  et  $q = e^\lambda$  où  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $e_i, f_i, K_i$  respectent bien les relations de la définition 3.7. Ces relations sont une déformation des suivantes dans  $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$  :

$$[e_i, f_i] = h_i, \quad [e_i, f_j] = 0, \quad [h_i, e_i] = -[h_j, e_i] = 2e_i, \quad [h_i, f_i] = -[h_j, f_i] = -2f_i$$

où  $i \neq j \in \{0, 1\}$ , au sens où on retrouve ces dernières égalités en faisant tendre  $\lambda \rightarrow 0$  (i.e  $q \rightarrow 1$ ).

On peut voir une certaine analogie entre  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  et  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . En effet si  $V = \mathbb{C}v_+ + \mathbb{C}v_-$  est une représentations de degré 2 de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ , et soit  $x \in \mathbb{C}^*$ , on peut définir  $V = V(x)$  comme une représentation de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  comme ceci :

$$X.w = \varphi_x(X)w \text{ où } X \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2) \text{ et } w \in V$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}K_1.v_\pm &= q^{\pm 1}v_\pm, \quad K_0.v_\pm = q^{\mp 1}v_\pm, \\ e_1.v_+ &= 0, \quad e_1.v_- = v_+, \\ f_1.v_+ &= v_-, \quad f_1.v_- = 0, \\ e_0.v_+ &= xv_-, \quad e_0.v_- = 0, \\ f_0.v_+ &= 0, \quad f_0.v_- = x^{-1}v_+.\end{aligned}$$

Ainsi,  $V(x)$  est un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -module, et dans la base  $\{v_+, v_-\}$ ,  $e_i, f_i, K_i$  s'écrit dans  $End(V(x))$

$$\begin{aligned}e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \\ e_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad f_0 = \begin{pmatrix} 0 & x^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On va munir  $A = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  d'une structure d'algèbre de Hopf semblable à celle de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  :

**Proposition 3.10.** Soit  $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ ,  $\varepsilon : A \mapsto \mathbb{C}$  et  $S : A \mapsto A$  tel que :

$$\begin{aligned}\Delta(e_i) &= e_i \otimes 1 + K_i \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes f_i, \quad \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i \\ \varepsilon(e_i) &= \varepsilon(f_i) = 0, \quad \varepsilon(K_i) = 1 \\ S(e_i) &= -K_i^{-1}e_i, \quad S(f_i) = -f_iK_i, \quad S(K_i) = K_i^{-1}\end{aligned}$$

Alors  $(A, \Delta, \varepsilon, S)$  est une algèbre de Hopf.

**Démonstration.** La preuve est aussi facile que pour le cas de  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  et est laissée au lecteur.  $\square$

Ainsi pour  $V(w)$  et  $V(z)$  deux représentations de degré 2 de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ , où  $w, z \in \mathbb{C}^*$ ,  $V(w) \otimes V(z)$  est aussi un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -module.

### 3.4 Les R-matrices entre modules irréductibles de dimension 4

Soit  $V(w)$  et  $V(z)$  deux représentations de degrés 2 de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ , où  $w, z \in \mathbb{C}^*$ . On va chercher les R-matrices,  $R : V(w) \otimes V(z) \rightarrow V(z) \otimes V(w)$  seulement dans le cas où ces deux modules sont irréductibles, c'est-à-dire les R-matrices bijectives.

**Proposition 3.11.** *Si  $zw^{-1} \neq q^2$  alors  $V(w) \otimes V(z)$  est irréductible.*

**Démonstration.** On pose

$$\begin{aligned} w_1 &= \Delta(f_1)(v_+ \otimes v_+) = q^{-1}v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_- \\ w_0 &= \Delta(e_0)(v_+ \otimes v_+) = wv_- \otimes v_+ + zq^{-1}v_+ \otimes v_- = zq^{-1}(wz^{-1}qv_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_-) \end{aligned}$$

Si  $zw^{-1} = q^2$ , on a  $w_0 = zq^{-1}w_1$ . On peut facilement vérifier qu'on se retrouve dans le même cas que la proposition 3.5, c'est-à-dire que :  $V(w) \otimes V(z) = L(2) \oplus L(0)$ .

Si non l'action de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  sur  $v_+ \otimes v_+, w_1, w_0, v_- \otimes v_-$  (qui forme donc une base) fonctionne comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \uparrow \Delta(e_1) & & \uparrow \Delta(f_0) \\ & & v_+ \otimes v_+ & & \\ \Delta(f_1) \swarrow & & & & \Delta(e_0) \searrow \\ w_1 & & & & w_0 \\ \Delta(e_1, \Delta(f_0)) \swarrow & & & & \Delta(e_1, \Delta(f_0)) \searrow \\ & & & & \\ \Delta(f_1, \Delta(e_0)) \swarrow & & & & \Delta(f_1, \Delta(e_0)) \searrow \\ & & & & \\ \Delta(e_1) \swarrow & & & & \Delta(f_0) \searrow \\ & & v_- \otimes v_- & & \\ \Delta(f_1) \downarrow & & & & \Delta(e_0) \downarrow \\ & & 0 & & \end{array}$$

C'est-à-dire qu'il n'existe pas de combinaison de  $w_0$  et  $w_1$  annulé par les  $\Delta(e_i)$  et  $\Delta(f_i)$ . En effet dans le cas où  $zw^{-1} = q^2$ , l'intersection des noyaux de  $\Delta(e_1)$  et  $\Delta(f_0)$  ( $\Delta(e_0)$  et  $\Delta(f_1)$  resp.) est  $v_+ \otimes v_+$  ( $v_- \otimes v_-$  resp.). Ainsi on vérifie aisément que  $V(w) \otimes V(z)$  est irréductible.  $\square$

On va désormais supposer que  $zw^{-1} \neq q^{\pm 2}$ . Ainsi  $V(w) \otimes V(z)$  et  $V(z) \otimes V(w)$  sont irréductibles. On va utiliser la même méthode que la Proposition 3.5 pour trouver les R-matrices.

Dans la base  $B = \{v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-\}$  on a :

$$\Delta(K_1) = \Delta(K_0)^{-1} = \Delta(K) = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2} \end{pmatrix},$$

d'où  $R$  sera de la forme

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

On va s'intéresser à la R-matrice  $R_0$  tel que  $R_0(v_+ \otimes v_+) = v_+ \otimes v_+$  afin de faciliter les calculs (par irréductibilité et le lemme de Schur, les autres R-matrices seront égales à un scalaire près). On a :

$$\begin{aligned} R_0(v_- \otimes v_-) &= \frac{1}{q + q^{-1}} R_0(\Delta(f_1)^2(v_+ \otimes v_+)) \\ &= \frac{1}{q + q^{-1}} \Delta(f_1)^2(R_0(v_+ \otimes v_+)) \\ &= \frac{1}{q + q^{-1}} \Delta(f_1)^2(v_+ \otimes v_+) \\ &= v_- \otimes v_-. \end{aligned}$$

D'autre part les égalités  $R_0(\Delta(e_0)(v_+ \otimes v_+)) = \Delta(e_0)(v_+ \otimes v_+)$  et  $R_0(\Delta(f_1)(v_+ \otimes v_+)) = \Delta(f_1)(v_+ \otimes v_+)$  nous donnent le système :

$$\begin{cases} q^{-1}R_0(v_- \otimes v_+) + R_0(v_+ \otimes v_-) = q^{-1}v_- \otimes v_+ + v_+ \otimes v_- \\ wR_0(v_- \otimes v_+) + zq^{-1}R_0(v_+ \otimes v_-) = zv_- \otimes v_+ + wq^{-1}v_+ \otimes v_-, \end{cases}$$

résoluble pour  $zw^{-1} \neq q^2$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} R_0(v_+ \otimes v_-) &= \frac{q-q^{-1}}{q-zw^{-1}q^{-1}}v_+ \otimes v_- + \frac{1-zw^{-1}}{q-zw^{-1}q^{-1}}v_- \otimes v_+ \\ R_0(v_- \otimes v_+) &= \frac{1-zw^{-1}}{q-zw^{-1}q^{-1}}v_+ \otimes v_- + \frac{q-q^{-1}}{z^{-1}wq^{-1}}v_- \otimes v_+ \end{aligned}$$

On voit que  $R_0$  ne dépend que du quotient de  $w$  et  $z$ .

On pose  $zw^{-1} = q^{2x}$ . D'où

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q-q^{-1}}{q-q^{2x-1}} & \frac{1-q^{2x}}{q-q^{2x-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1-q^{2x}}{q-q^{2x-1}} & \frac{q-q^{-1}}{q^{1-2x}-q^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi tout isomorphisme  $R : V(w) \otimes V(z) \rightarrow V(z) \otimes V(w)$  de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -module s'écrira  $R = \alpha R_0$  où  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ .

Soit  $v = q^2$ . Si  $[x] = \frac{v^{1/2}-v^{-1/2}}{v^{1/2}-v^{-1/2}} = \frac{q^x-q^{-x}}{q-q^{-1}}$ , on va s'intéresser à la  $R$ -matrice  $R = [x-1]R_0$ .

Par un rapide calcul on trouve :

$$R = \begin{pmatrix} [x-1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^{-x/2} & [x] & 0 \\ 0 & [x] & -v^{x/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [x-1] \end{pmatrix} = [x-1]\text{Id} + [x]P \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^{-1/2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -v^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.12.** On peut déjà voir une similitude entre la décomposition de  $R$  ci-dessus et les relations de la remarque 2.3, en faisant l'identification suivante :

$$P = \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \quad \text{Id} = \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \quad \left( \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \right)$$

On peut remarquer que la relation suivante est préservé pour  $P$  :

$$-[2]P = P^2 = \begin{array}{c} \frown \\ \bigcirc \\ \smile \end{array} = -[2] \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array}$$

On résume les résultats de cette section :

**Proposition 3.13.** Soit  $w, z \in \mathbb{C}$  et  $x \in \mathbb{C}$  tel que  $zw^{-1} = q^{2x}$ . Si  $x \neq \pm 1$  alors il existe un isomorphisme  $R(w, z) : V(w) \otimes V(z) \rightarrow V(z) \otimes V(w)$  unique à scalaire près. C'est :

$$R(w, z) = \begin{pmatrix} [x-1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^{-x/2} & [x] & 0 \\ 0 & [x] & -v^{x/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [x-1] \end{pmatrix} = [x-1]\text{Id} + [x]P$$

où

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v^{-1/2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -v^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 3.5 Théorème de Yang-Baxter avec les R-matrices

Soit  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$  tel que  $w_i w_j^{-1} \neq q^{\pm 2}$  pour tout  $i \neq j$ .  
On pose  $R_{ij} = R(w_i, w_j)$  l'isomorphisme définie dans la proposition 3.13. Pour tout  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  :

$$\begin{aligned} \text{Id} \otimes R_{ij} &: V(w_k) \otimes V(w_i) \otimes V(w_j) \mapsto V(w_k) \otimes V(w_j) \otimes V(w_i), \\ R_{ij} \otimes \text{Id} &: V(w_i) \otimes V(w_j) \otimes V(w_k) \mapsto V(w_j) \otimes V(w_i) \otimes V(w_k) \end{aligned}$$

sont donc tous deux des isomorphismes de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -modules.

On s'intéresse au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & V(w_1) \otimes V(w_2) \otimes V(w_3) & \\ & \swarrow R_{12} \otimes \text{Id} & \searrow \text{Id} \otimes R_{23} \\ V(w_2) \otimes V(w_1) \otimes V(w_3) & & V(w_1) \otimes V(w_3) \otimes V(w_2) \\ \downarrow \text{Id} \otimes R_{13} & & \downarrow R_{13} \otimes \text{Id} \\ V(w_2) \otimes V(w_3) \otimes V(w_1) & & V(w_3) \otimes V(w_1) \otimes V(w_2) \\ & \swarrow R_{23} \otimes \text{Id} & \nwarrow \text{Id} \otimes R_{12} \\ & V(w_3) \otimes V(w_2) \otimes V(w_1) & \end{array}$$

On obtient ainsi deux isomorphismes entre  $V(w_1) \otimes V(w_2) \otimes V(w_3)$  et  $V(w_3) \otimes V(w_2) \otimes V(w_1)$  :

$$\begin{aligned} P &= (R_{23} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes R_{13})(R_{12} \otimes \text{Id}) \\ Q &= (\text{Id} \otimes R_{12})(R_{13} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes R_{23}) \end{aligned}$$

Ainsi  $PQ^{-1}$  est un automorphisme de  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -module  $V(w_1) \otimes V(w_2) \otimes V(w_3)$ .

**Théorème 3.14.** [1] *Le produit tensoriel  $V(w_1) \otimes \dots \otimes V(w_r)$  est irréductible si et seulement si  $V(w_i) \otimes V(w_j)$  l'est pour tout  $i \neq j$ .*

Ainsi  $V(w_1) \otimes V(w_2) \otimes V(w_3)$  par le théorème précédent. On peut aussi, au lieu d'utiliser ce théorème, prouver l'irréductibilité de  $V(w_1) \otimes V(w_2) \otimes V(w_3)$  par une méthode plus calculatoire. On trouvera en annexe un script maple le prouvant (ici).

Comme  $PQ^{-1}$  est un automorphisme du  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -module irréductible  $V(w_1) \otimes V(w_2) \otimes V(w_3)$ , d'après le lemme de Schur,  $PQ^{-1}$  est une homothétie. En posant

$$w_2 w_1^{-1} = q^{2x}, \quad w_3 w_2^{-1} = q^{2y}, \quad w_3 w_1^{-1} = q^{2z},$$

on a :

$$P(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) = [x-1][y-1][z-1]v_+ \otimes v_+ \otimes v_+ = Q(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+).$$

On en déduit aisément que  $P = Q$ , donc que

$$(R_{23} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes R_{13})(R_{12} \otimes \text{Id}) = (\text{Id} \otimes R_{12})(R_{13} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes R_{23}).$$

### 3.6 Deuxième preuve du théorème 2.4

Intéressons nous à la R-matrice  $R : V(w) \otimes V(z) \mapsto V(z) \otimes V(w)$  avec

$$R = \begin{pmatrix} [x-1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-x/2} & [x] & 0 \\ 0 & [x] & -q^{x/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [x-1] \end{pmatrix}$$

où  $zw^{-1} = q^{2x}$  dans la base  $B = (v_+ \otimes v_+, v_+ \otimes v_-, v_- \otimes v_+, v_- \otimes v_-)$ . On va représenter  $R$  de la façon suivante

$$R = \begin{array}{c} V(w) \otimes V(z) \\ \begin{array}{c} \swarrow x \searrow \\ \downarrow \\ \swarrow \searrow \\ V(z) \otimes V(w) \end{array} \end{array}$$

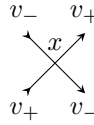
On fixe une orientation sur la représentation en graphe de  $R$  ci-dessus, par exemple :



Puis on associe un vecteur à chaque extrémité :

- le vecteur  $v_+$  si l'arête est orientée vers le haut,
- le vecteur  $v_-$  si l'arête est orientée vers le bas.

C'est-à-dire pour l'exemple :



Les deux vecteurs du haut définissent un élément  $v_\varepsilon = v_{\varepsilon_1} \otimes v_{\varepsilon_2}$  de la base  $B$  dans  $V(w) \otimes V(z)$  et les deux du bas un élément  $v_\eta = v_{\eta_1} \otimes v_{\eta_2}$  de la base  $B$  dans  $V(z) \otimes V(w)$ . Dans l'exemple on a  $v_\varepsilon = v_- \otimes v_+ = v_{-+}$  et  $v_\eta = v_+ \otimes v_- = v_{+-}$ . On définit le poids du graphe orienté par le coefficient de l'image de  $v_\varepsilon$  par  $R$  le long de  $v_\eta$ . Par exemple :

$$\begin{array}{c} \swarrow x \searrow \\ \downarrow \\ \swarrow \searrow \end{array} = [x]$$

On retrouve ainsi les six configurations locales de la définition 2.2 associées aux bons poids, et toute autre configuration possible sera de poids nul. On remarque que les graphes orientés sont donc aussi symétriques par rotation par  $180^\circ$ , c'est équivalent à dire que la matrice  $R$  est symétrique.

Soit  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$  tel que  $w_i w_j^{-1} \neq q^{\pm 2}$  pour tout  $i \neq j$ . On étend la notation en graphe afin de représenter les isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Id} \otimes R_{ij} &: V(w_k) \otimes V(w_i) \otimes V(w_j) \mapsto V(w_k) \otimes V(w_j) \otimes V(w_i), \\ R_{ij} \otimes \text{Id} &: V(w_i) \otimes V(w_j) \otimes V(w_k) \mapsto V(w_j) \otimes V(w_i) \otimes V(w_k) \end{aligned}$$

définies dans la section précédente, en notant l'identité par un segment vertical, c'est-à-dire :

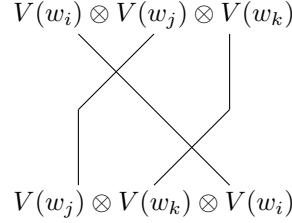
$$\begin{aligned} \text{Id} \otimes R_{ij} &= \begin{array}{c} V(w_k) \otimes V(w_i) \otimes V(w_j) \\ \begin{array}{c} \downarrow \quad \swarrow \searrow \\ \downarrow \quad \downarrow \\ V(w_k) \otimes V(w_j) \otimes V(w_i) \end{array} \end{array} \\ R_{ij} \otimes \text{Id} &= \begin{array}{c} V(w_i) \otimes V(w_j) \otimes V(w_k) \\ \begin{array}{c} \swarrow \searrow \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \\ V(w_j) \otimes V(w_i) \otimes V(w_k) \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

On fixe une orientation à ce graphe. Si le segment représentant l'identité est bien orienté, le poids associé à ce segment est 1 sinon le poids associé est nul. Ainsi le poids associé au graphe orienté est égal au produit du poids associé à la représentation orientée de  $R_{ij}$  et du poids associé au segment orienté représentant l'identité. Par exemple, si  $w_j w_i^{-1} = q^{2x}$  :

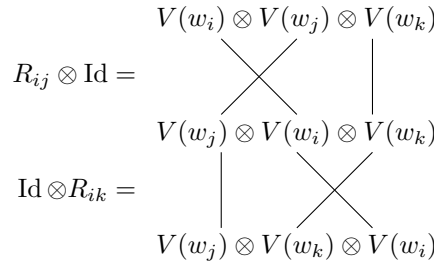
$$\begin{array}{c} \swarrow x \searrow \\ \downarrow \\ \swarrow \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} = [x]$$

**Remarque 3.15.** On considère la représentation graphique de  $R_{ij} \otimes \text{Id}$ , et on l'oriente. On associe un vecteur à chaque orientation, en considérant que le segment identité a deux orientations, une à chaque extrémité. Ainsi, les trois vecteurs du haut nous donnent un vecteur  $v_\varepsilon$  dans  $V(w_i) \otimes V(w_j) \otimes V(w_k)$  et les trois vecteurs du bas un vecteur  $v_\eta$  dans  $V(w_k) \otimes V(w_j) \otimes V(w_i)$ . Le poids associé au graphe orienté défini précédemment est en fait égal à l'image de  $v_\varepsilon$  par  $R_{ij} \otimes \text{Id}$  le long de  $v_\eta$ . Dans l'exemple ci-dessus on a  $v_\varepsilon = v_- \otimes v_+ \otimes v_-$  et  $v_\eta = v_+ \otimes v_- \otimes v_-$ . On peut procéder de même pour la représentation graphique de  $\text{Id} \otimes R_{ij}$ .

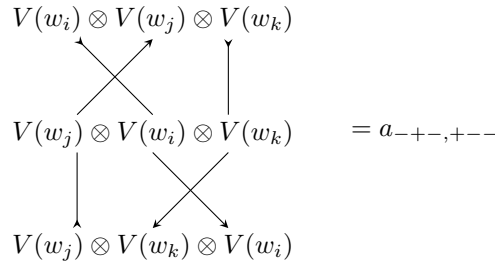
On va maintenant constater que la notation est compatible à la composition. Par exemple, on représente  $A = (\text{Id} \otimes R_{ik}) \circ (R_{ij} \otimes \text{Id})$  :



On note  $A = (a_{\varepsilon, \varepsilon'})_{\varepsilon, \varepsilon' \in \{+, -\}^3}$  comme la matrice carrée de taille 8 indexée par les triplets  $\varepsilon \in \{+, -\}^3$ . On peut découper le graphe pour remarquer la représentation de  $R_{ij} \otimes \text{Id}$  et celle de  $\text{Id} \otimes R_{ik}$  :



Fixons une orientation partielle à la représentation graphique de  $A$  : on n'oriente que les extrémités du graphe. Les extrémités nous donnent deux vecteurs  $v_\varepsilon$  en haut et  $v_\eta$ , le poids associé à ce graphe doit être égal à l'image de  $v_\varepsilon$  par  $A$  le long de  $v_\eta$ , c'est-à-dire le coefficient matriciel  $a_{\varepsilon, \eta}$ . Par exemple :

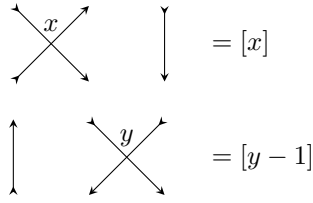


Or, on a

$$a_{\varepsilon, \eta} = \sum_{\theta \in \{+, -\}^3} (\text{Id} \otimes R_{ik})_{\varepsilon, \theta} (R_{ij} \otimes \text{Id})_{\theta, \varepsilon},$$

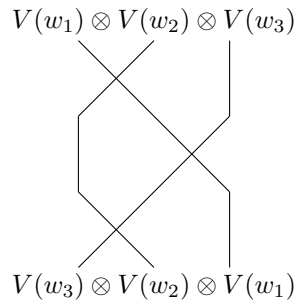
pour tout  $\varepsilon, \eta \in \{+, -\}^3$ . Le poids associé au graphe orienté partiellement est donc bien la somme des poids associés à chaque orientation possible de ce même graphe. Dans l'exemple, si  $w_j w_i^{-1} = q^{2x}$  et

$w_k w_i^{-1} = q^{2y}$ , voici l'une des orientations possibles, celle pour  $\theta = (+, -, -)$  :

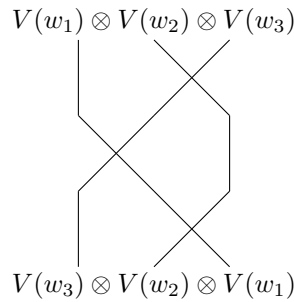


dont le poids associé est  $[x][y - 1]$ . En fait, c'est la seule orientation de poids non nul dans l'exemple, on peut donc en déduire que  $a_{-+-, +--} = [x][y - 1]$ . La composition est bien respectée par sa représentation graphique.

Prenons maintenant la représentation graphique de  $P = (R_{23} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes R_{13})(R_{12} \otimes \text{Id})$  :



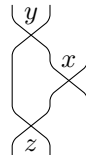
et celle de  $Q = (\text{Id} \otimes R_{12})(R_{13} \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes R_{23})$  :



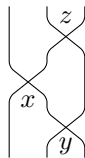
Comme  $P = Q$ , les poids associés aux orientations partielles des deux graphes sont égaux. De plus, en posant

$$\begin{aligned} w_2 w_1^{-1} &= q^y, \\ w_3 w_1^{-1} &= q^x, \\ w_3 w_2^{-1} &= q^z, \end{aligned}$$

on a  $q^{y+z} = w_2 w_1^{-1} w_3 w_2^{-1} = w_3 w_1^{-1} = q^x$ , donc que  $x = y + z$ , l'hypothèse du théorème 2.4. Et en arrondissant les angles, on peut écrire  $P$  de la façon suivante :



De même pour  $Q$  qui peut s'écrire comme suit :



L'égalité des orientations partielles des représentations de  $P$  et  $Q$  est en fait exactement la relation de Yang-Baxter (le théorème 2.4).

**Remarque 3.16.** L'explication de la relation triangle-étoile étoile était un travail long, mais c'est la véritable origine de ce théorème.



## Chapitre 4

# Spécialisation de la fonction de partition $Z(n; X, Y)$

### 4.1 Relation entre $A(n)$ et $Z(n; X, Y)$

On considère la spécialisation de  $Z$  suivante :

$$Z_{\frac{1}{2}}(n) = Z(n; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0).$$

Ainsi chaque sommet est désigné par la valeur  $\frac{1}{2}$ . Les poids de la  $R$ -matrice  $R(\frac{1}{2})$  sont  $-q^{-1/4}$ ,  $-q^{1/4}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$  respectivement.

Dans toutes configurations de glace de taille  $n$ , on a :

- $n$  sommets de configuration 1 de plus que de configurations 2
- autant de sommets de configuration 3 que de configuration 4
- autant de sommets de configuration 5 que de configuration 6

Le premier points s'explique par le fait que la somme des éléments d'une ligne dans une ASM est égal à 1, la somme de tout les éléments de cette ASM est donc égale à  $n$ , on aura  $n$  "1" de plus que de "-1". De plus le premier points, c'est-à-dire la différence entre le nombre de sommets de configuration 1 et de configuration 2, fixe les orientations des arêtes extérieures. Donc les sommets de configuration 3, 4, 5 et 6 ne changent pas l'orientation des arêtes extérieures, et un calcul rapide nous donne les points 2 et 3.

**Définition 4.1.** Soit  $x \in \mathbb{C}$ . On définit  $A(n, x)$  comme le poids total des ASM's de taille  $n$ , où le poids d'une ASM est égal à  $x^k$  où  $k$  est le nombre de ses coefficients égaux à  $-1$ .

Soit une configuration de glace carrée de taille  $n$  dont les lignes sont affectées par  $X = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$  et les colonnes par  $Y = (0, \dots, 0)$ . On suppose qu'on a  $k$  sommets de configuration 2, c'est-à-dire que l'ASM liée a  $k$  coefficients égaux à  $-1$ . Il en résulte qu'elle a  $n + k$  sommets de configuration 1, et  $n^2 - n - k$  sommets de configuration 3, 4, 5 et 6, et donc son poids est :

$$\omega_{\frac{1}{2}}(k) = \left[\frac{1}{2}\right]^{n^2-n} (-1)^n q^{-n/4} \left[\frac{1}{2}\right]^{-2k}.$$

On en déduit que :

$$A(n, x) = \left[\frac{1}{2}\right]^{n-n^2} (-1)^n q^{n/4} Z_{\frac{1}{2}}(n),$$

où  $x = \left[\frac{1}{2}\right]^{-2} = [2] + 2$ . Pour  $h = \frac{4i\pi}{3}$ , on a  $x = 1$  et donc

$$A(n) = A(n, x) = (-1)^n q^{n/4} Z_{\frac{1}{2}}(n).$$

Malheureusement, le déterminant dans le théorème 2.9 pour  $Z_{\frac{1}{2}}(n)$  est singulier. On va donc considérer une spécialisation de  $Z(n; X, Y)$  proche de  $Z_{\frac{1}{2}}(n)$  afin d'utiliser ce théorème.

## 4.2 Fin de la démonstration

Dans cette section, on fixe  $h = \frac{4i\pi}{3}$ , i.e  $q = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ . On considère la spécialisation de  $Z$  suivante :

$$Z_{\frac{1}{2}}(n, \varepsilon) = Z\left(n; \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} + 2\varepsilon, \dots, \frac{1}{2} + n\varepsilon, 0, -\varepsilon, \dots, (1-n)\varepsilon\right),$$

de manière que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_{\frac{1}{2}}(n, \varepsilon) = Z_{\frac{1}{2}}(n) = (-1)^n q^{-n/4} A(n).$$

D'après le théorème 2.9, on a :

$$Z_{\frac{1}{2}}(n, \varepsilon) = \frac{(-1)^n q^{-n/4} q^{-n^2\varepsilon/2} \prod_{0 \leq i, j < n} [(i+j+1)\varepsilon + \frac{1}{2}][\frac{1}{2} + (i+j+1)\varepsilon - \frac{1}{2}]}{\prod_{0 \leq j < i < n} [(i-j)\varepsilon]^2} \det M,$$

dont les coefficients de la matrice  $M$  sont :

$$M_{ij} = \frac{1}{[(i+j+1)\varepsilon + \frac{1}{2}][\frac{1}{2} + (i+j+1)\varepsilon - \frac{1}{2}]}.$$

On pose  $s = q^\varepsilon$ . Un rapide calcul donne

$$[k\varepsilon + \frac{1}{2}][k\varepsilon - \frac{1}{2}] = \frac{s^k + 1 + s^{-k}}{-3}$$

et

$$[k\varepsilon]^2 = \frac{(s^{k/2} - s^{-k/2})^2}{-3}.$$

La fonction de partition devient :

$$Z_{\frac{1}{2}}(n, \varepsilon) = \frac{(-1)^{n(3n+1)/2} 3^{-n(n+1)/2} q^{-n/4} s^{-n^2/2} \prod_{0 \leq i, j < n} (s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)})}{\prod_{0 \leq j < i < n} (s^{(i-j)/2} - s^{(j-i)/2})^2} \det M,$$

dont les coefficients de la matrice  $M$  sont :

$$M_{ij} = \frac{-3}{s^{i+j+1} + 1 + s^{-(i+j+1)}}.$$

On va calculer le déterminant de  $M$  grâce aux deux lemmes suivants, où l'on étend notre notation en crochet, en posant  $[x]_t = \frac{t^{x/2} - t^{-x/2}}{t^{1/2} - t^{-1/2}}$ .

**Lemme 4.2** (Cauchy). *Soit  $X = (x_0, \dots, x_{n-1})$  et  $Y = (y_0, \dots, y_{n-1})$  des variables, et soit  $T(n; X, Y)$  la matrice carrée de taille  $n$  dont les coefficients sont :*

$$T(n; X, Y)_{ij} = \frac{1}{[x_i - y_j]_t}.$$

Alors

$$\det T(n; X, Y) = \frac{\left( \prod_{0 \leq j < i < n} [x_i - x_j]_t \right) \left( \prod_{0 \leq i < j < n} [y_i - y_j]_t \right)}{\prod_{0 \leq i, j < n} [x_i - y_j]_t}.$$

**Démonstration.** On nommera  $Q$  le numérateur du membre de droite,  $P$  le dénominateur et  $D$  le dénominateur de  $T(n; X, Y)$ , de sorte que l'on doit prouver que  $D = \frac{Q}{P}$ . En utilisant un raisonnement similaire dans le cas de la démonstration du théorème 2.9, on prouve que  $R = \frac{P}{Q}D$  est un polynôme de

degré 0 en toutes les variables, c'est-à-dire une constante. Soit  $D'$  le terme diagonal dans le déterminant  $D$ , c'est-à-dire :

$$D' = \prod_{0 \leq i < n} \frac{1}{[x_i - y_i]_t}.$$

Le terme  $\frac{P}{Q}D'$  est le seul non-divisible par les  $[x_i - y_i]_t$ . Pour la spécialisation  $x_i = y_i$ , on a  $\frac{P}{Q}D' = 1$  et que tous les autres termes de  $R$  sont nuls. On trouve donc  $R = 1$ , c'est-à-dire  $D = \frac{Q}{P}$ .  $\square$

On pose  $T(n) = T(n; 1, 2, \dots, n, 0, -1, -2, \dots, 1 - n)$  la matrice carrée de taille  $n$  dont les coefficients sont

$$T(n)_{ij} = \frac{1}{[i + j + 1]_t}$$

et d'après le lemme 4.2

$$\det T(n) = \frac{\prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t^2}{\prod_{0 \leq i, j < n} [i + j + 1]_t}.$$

**Lemme 4.3.** Soit  $S(n; s, t)$  la matrice carrée de taille  $n$  dont les coefficients sont :

$$S(n; s, t)_{ij} = \frac{s^{(i+j+1)/2} - s^{-(i+j+1)/2}}{t^{(i+j+1)/2} - t^{-(i+j+1)/2}}$$

Alors

$$\det S(n; s, t) = \frac{1}{(t^{1/2} - t^{-1/2})^n} \left( \prod_{0 \leq j < i < n} [i - j]_t^2 \right) \left( \prod_{0 \leq i, j < n} \frac{s^{1/2}t^{(i-j)/2} - s^{-1/2}t^{(j-i)/2}}{[i + j + 1]_t} \right)$$

**Démonstration.** Pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a

$$S(n; t^k, t)_{ij} = [k]_{t^{i+j+1}}.$$

Or, d'après la remarque 2.1, si  $x$  est un entier positif :

$$[x]_q = \sum_{l=0}^{x-1} q^{l-(x-1)/2},$$

d'où

$$S(n; t^k, t)_{ij} = \sum_{l=0}^{k-1} A(t^{l-(k-1)/2})_{ij},$$

où la matrice  $A(z)$  dont les coefficients sont

$$A(z)_{ij} = z^{i+j+1}$$

est de rang 1. On en déduit que le rang de  $S(n; t^k, t)$  est au plus  $k$ , d'où il existe  $P$  et  $Q$  tel que

$$P^{-1}S(n; t^k, t)Q = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_k \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n-k} \right).$$

Donc les  $n-k$  dernières colonnes de la matrice  $P^{-1}S(n; s, t)Q$  sont divisibles par  $(s - t^k)$ , c'est-à-dire que  $(s - t^k)^{n-k}$  divise  $\det S(n; s, t)$ . De même  $(s - t^{-k})^{n-k}$  divise  $\det S(n; s, t)$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

D'autre part

$$\begin{aligned}
R(s, t) &= \prod_{0 \leq i, j < n} s^{1/2} t^{(i-j)/2} - s^{-1/2} t^{(j-i)/2} = \prod_{0 \leq i, j < n} t^{(i-j)/2} s^{-1/2} (s - t^{(j-i)}) \\
&= \prod_{-n < k < n} (t^{-k/2} s^{-1/2} (s - t^k))^{\text{Card}(\{(i, j) \in \{0, \dots, n-1\}^2 / i-j=k\})} \\
&= \prod_{-n < k < n} t^{-k(n-|k|)/2} s^{(|k|-n)/2} (s - t^k)^{n-|k|} \\
&= s^{-n^2/2} \left( \prod_{-n < k < n} (s - t^k)^{n-|k|} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\prod_{-n < k < n} (s - t^k)^{n-|k|}$$

est un polynôme en  $s$  de degrés  $n^2$ . Or  $s^{n^2/2}(\det S(n; s, t))$  est aussi un polynôme en  $s$  de degré  $n^2$ . Donc la factorisation de  $\det S(n; s, t)$  par  $R(s, t)$  nous donne un polynôme en  $s$  de degré 0. De plus, on peut écrire :

$$S(n; s, t)_{ij} = \left( s^{(i+j+1)/2} - s^{-(i+j+1)/2} \right) \frac{T(n)_{ij}}{t^{1/2} - t^{-1/2}}.$$

Le coefficient dominant de  $\det S(n; s, t)$  est donc

$$\frac{\det T(n)}{(t^{1/2} - t^{-1/2})^n}.$$

On conclut ainsi que :

$$\det S(n; s, t) = \frac{\det T(n)}{(t^{1/2} - t^{-1/2})^n} R(s, t). \square$$

On a  $-M/3 = S(n; s, s^3)$ , et son déterminant est donné par le lemme 4.3. La fonction de partition devient donc :

$$\begin{aligned}
Z_{1/2}(n; \varepsilon) &= \frac{(-1)^{n(3n+1)/2} 3^{-n(n+1)/2} q^{-n/4} s^{-n^2/2} \prod_{0 \leq i, j < n} [3(i+j+1)]_s}{\prod_{0 \leq j < i < n} (s^{1/2} - s^{-1/2})^2 [i-j]_s^2} \\
&+ \frac{(-3)^n}{[3]_s^n (s^{1/2} - s^{-1/2})^n} \left( \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s^2}{[3]_s^2} \right) \left( \prod_{0 \leq i, j < n} \frac{[3]_s [3(i-j)+1]_s (s^{1/2} - s^{-1/2})}{[3(i+j+1)]_s} \right) \\
&= (-1)^{n(3n+1)/2} (-1)^n q^{-n/4} s^{-n^2/2} \left( \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s}{3[i-j]_s} \right) \\
&\frac{\prod_{0 \leq j < i < n} [3(i-j)]_s [3(i-j)+1]_s (-[3(i-j)-1]_s)}{\left( \prod_{0 \leq j < i < n} [i-j]_s \right) \left( \prod_{0 \leq i, j < n} [3(i+j+1)]_s \right)} \\
&= (-1)^n q^{-n/4} s^{-n^2/2} \left( \prod_{0 \leq j < i < n} \frac{[3(i-j)]_s}{3[i-j]_s} \right) \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\prod_{1 \leq j \leq 3i+1} [j]_s}{\prod_{1 \leq j \leq n+i} [j]_s} \right).
\end{aligned}$$

Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (i.e  $s \rightarrow 1$ ), d'après la remarque 2.1 les crochets disparaissent, et on obtient :

$$Z_{1/2}(n) = (-1)^n q^{-n/4} \left( \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} \right).$$

Et on conclut :

$$A(n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!} = \frac{1!4!7! \cdots (3n-2)!}{n!(n+1)! \cdots (2n-1)!}.$$

# Bibliographie

- [1] V. Chari et A. Pressley. Quantum affine algebras. *Communications in Mathematical Physics*, 1991.
- [2] M. Jimbo. Topics from representations of  $u_q(\mathfrak{g})$  - an introductory guide to physicists. *Quantum group and quantum integrable systems*, 1992.
- [3] G. Kuperberg. Another proof of the alternating sign matrix conjecture. *International Mathematics Research Notes*, 1996.