Représentations irréductibles du groupe symétrique et dualité de Schur-Weyl

Cave Maxime

6 juillet 2017

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'établir la correspondance entre certains $\mathfrak{S}_n$-modules et certains $\mathrm{GL}(V)$-modules, aussi appelé dualité de Schur-Weyl, dans la décomposition en représentations irréductibles du produit tensoriel $V^{\otimes n} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ fois}}$, qui sera défini dans la partie 1.1, où V sera un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Tous les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie.
Nous allons tout d'abord à déterminer explicitement les représentations irréductibles du groupe symétrique pour ensuite exhiber certaines représentations irréductibles du groupe linéaire.

1 Préliminaires

Dans cette partie nous allons énoncer certains résultats sur le produit tensoriel et de théorie des représentations des groupes ou algèbres unitaires connus ou non et essentiels à la suite du mémoire.

1.1 Produit tensoriel

On énonce tout d'abord la propriété universelle que vérifie le produit tensoriel.

Lemme 1.1. *Soient U, V des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Il existe un espace vectoriel W et une unique application bilinéaire $\tau : U \times V \to U \otimes_{\mathbb{C}} V$ tel que pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E et toute appliation bilinéaire b de $U \times V$ dans E il existe une unique application linéaire $\phi : W \to E$ tel que $b(u, v) = \phi \circ \tau(u, v)$.*

Définition 1.2. *L'espace vectoriel défini dans le lemme s'appelle produit tensoriel de U et V et se note $U \otimes_{\mathbb{C}} V$. Cet espace est unique à isomorphisme près.*

On a les propriétés suivantes du produit tensoriel.

Proposition 1.3. *Soient U, V et W trois $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.*
(1) $U \otimes_{\mathbb{C}} (V \oplus W) \simeq (U \otimes_{\mathbb{C}} V) \oplus (U \otimes_{\mathbb{C}} W)$.
(2) $U \otimes_{\mathbb{C}} (V \otimes_{\mathbb{C}} W) \simeq (U \otimes_{\mathbb{C}} V) \otimes_{\mathbb{C}} W$.
(3) $U \otimes_{\mathbb{C}} V \simeq V \otimes_{\mathbb{C}} U$.
(4) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, V) \simeq U^* \otimes_{\mathbb{C}} V$, *où U^* désigne le dual de U.*

En itérant la construction précédente, on peut construire le produit tensoriel $V_1 \otimes_{\mathbb{C}} \cdots \otimes_{\mathbb{C}} V_n$ ou les V_i sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On construit le produit tensoriel $V^{\otimes n}$ de n copies de V. Si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de V alors les $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$ où $(i_k, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, d\}^n$ est une base de $V^{\otimes n}$. Cet espace vectoriel est engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$

où $v_i \in V$ pour tout i. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement à droite sur les tenseurs décomposables $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ de $V^{\otimes n}$

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \cdot \sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Cette action s'étend par linéarité à des combinaisons linéaires de tenseurs décomposables et donc à $V^{\otimes n}$.

On définit les tenseurs symétriques et alternés

$$\mathrm{Sym}^n(V) = \left\{ v \in V^{\otimes n};\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \cdot v = v \right\}.$$

et

$$\mathrm{Alt}^n(V) = \left\{ v \in V^{\otimes n};\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \sigma \cdot v = \varepsilon(\sigma) v \right\}.$$

Ainsi que les projections

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_1 \cdot \cdots \cdot v_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \in \mathrm{Sym}^n(V)$$

et

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \in \mathrm{Alt}^n(V)$$

1.2 Représentations des groupes

1.2.1 Premiers résultats

Nous allons tout d'abord énoncer des résultats connus concernant les représentations des groupes finis sans démonstration.

Soit G un groupe fini. On appellera G-module un espace vectoriel sur lequel G agit linéairement, c'est à dire une représentation de G, et on notera gv l'action de $g \in G$ sur $v \in V$. De manière équivalente, on dira aussi qu'une représentation de G est un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

On définit ensuite la notion de morphisme de G-modules ou morphisme G-linéaire.

Définition 1.4. *Si V et W sont deux G-modules on définit l'ensemble des application G-linéaires*

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)\ ;\ \forall v \in V, \forall g \in G,\ \phi(gv) = g\phi(v) \}.$$

Étant données deux représentations V et W de G, on peut naturellement faire de $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ des représentations de G et les isomorphisme de la proposition 1.3 sont des isomorphismes de représentations.

Lemme 1.5 (Schur)**.** *Soit V et W deux G-modules irréductibles et $\phi \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ alors*
(1) *Soit ϕ est un isomorphisme, soit $\phi = 0$.*
(2) *Si $V = W$ alors $\phi = \lambda \mathrm{Id}$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Proposition 1.6 (Réciproque du lemme de Schur)**.** *Soit V un G-module. Si $\mathrm{Hom}_G(V, V) \cong \mathbb{C}$ alors V est un G-module irréductible.*

Théorème 1.7 (Maschke)**.** *Soit V un G-module et W un sous-espace vectoriel de V stable par G. Il existe un sous-espace W' stable par G tel que $V = W \oplus W'$.*

Corollaire. *Tout G-module est somme directe de G-modules irréductibles.*

Si les $\{W_i\}_i$ sont les sous-représentations irréductibles de V et $n_i = \dim \mathrm{Hom}_G(W_i, V)$ la multiplicité de W_i, *i.e*, $V = \bigoplus_i W_i^{\oplus n_i}$, on dira que $W_i^{\oplus n_i}$ est la composante W_i-isotypique de V.

Proposition 1.8. *Le nombre de G-module(s) irréductible(s) est égale au nombre de classe(s) d'équivalence(s) de G.*

1.2.2 Représentation régulière

Dans cette partie nous définissons la représentation régulière pour ensuite introduite l'algèbre d'un groupe.

Définition 1.9. *La représentation régulière de G, notée R, correspond à l'action de G sur lui-même par translation à gauche.*

Proposition 1.10. *Si les $\{W_i\}$ sont les différents G-modules irréductibles alors on a la décomposition en G-modules*

$$R = \bigoplus_i W_i^{\oplus m_i}.$$

Avec $m_i = \dim W_i = \dim \mathrm{Hom}_G(W_i, R)$.

Proposition 1.11. *Le nombre de G-modules irréductibles est égale au nombre de classes de conjugaison de G.*

1.2.3 Algèbre du groupe

Définition 1.12. *Soit A une algèbre. On appelle structure de A-module sur un espace vectoriel V la donnée d'un morphisme d'algèbre $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.*

Lorsque G est un groupe fini on définit l'algèbre du groupe $\mathbb{C}G$ comme étant l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base $(e_g)_{g\in G}$ muni de la structure d'algèbre suivante : $e_g \cdot e_h = e_{gh}$. On a donc $\dim(\mathbb{C}G) = |G|$ et ses éléments sont de la forme $\sum_{g\in G} a_g e_g$ avec $a_g \in \mathbb{C}$.
Si V est un G-module, on peut étendre l'action à $\mathbb{C}G$ ce qui fait de V un $\mathbb{C}G$-module. En effet la représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ s'étend par linéarité en $\widetilde{\rho} : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V)$. Inversement si V est un $\mathbb{C}G$-module, en ne regardant que l'action des éléments e_g $(g \in G)$, on a une action de G sur V et donc V a une structure de G-module. Ainsi, tout G-module est un $\mathbb{C}G$-module et inversement. De plus tout G-module irréductible est un $\mathbb{C}G$-module irréductible, et inversement. Ainsi, en faisant agir $\mathbb{C}G$ par translation à gauche sur $\mathbb{C}G$, on a également la décomposition en $\mathbb{C}G$-modules irréductibles suivante

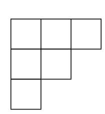
$$\mathbb{C}G = \bigoplus_i W_i^{\oplus m_i}.$$

2 Représentations irréductibles du groupe symétrique

Dans toute la suite, A désignera $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, l'algèbre du groupe symétrique. On s'intéressera tout d'abord aux tableaux de Young ainsi que l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur ces derniers. En général, les représentations irréductibles d'un groupe fini G sont de la forme $\mathbb{C}Gu$ où $u \in \mathbb{C}G$ est un idempotent , c'est à dire vérifiant $u^2 = u$. Nous allons calculer explicitement des idempotents c_i de sorte à ce que les Ac_i soient les $\mathfrak{S}_n$-modules irréductibles.

2.1 Symétriseurs et tableaux de Young

Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ une partition de n, c'est à dire, $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ et $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant 0$.On note $\lambda \vdash n$. On munit l'ensemble des partitions de n de l'ordre lexicographique, c'est à dire, si λ et μ sont deux partitions de n on écrit $\lambda < \mu$ si pour $i_0 = \min\{i \,;\, \lambda_i \neq \mu_i\}$ on a $\lambda_{i_0} < \mu_{i_0}$. On appelle diagramme de Young associé à la partition λ un tableau tel que la i-ème ligne possède λ_i cases, pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Par exemple, le diagramme de Young suivant représente la partition $(3, 2, 1)$ de 6. :



On appelle ensuite tableau de Young associé à λ, noté T_λ le diagramme précédent obtenu en remplissant chaque case avec un nombre différent entre 1 et n. Par exemple, en reprenant le diagramme précédent :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

On définit alors l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur un tableau de Young T_λ comme suit : à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et T_λ on associe le tableau de Young σT_λ obtenu en appliquant σ aux coefficients de T_λ. Prenons par exemple $\sigma = (1\ 2\ 5) \in \mathfrak{S}_6$ et appliquons le au tableau précédent :

$$\sigma \cdot \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 6 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Ainsi, si k est en position (i,j) dans T_λ alors $\sigma(k)$ est en position (i,j) de σT_λ.
On définit ensuite

$$P(T_\lambda) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ ; \ \sigma \text{ préserve chaque ligne de } T_\lambda\}$$

$$Q(T_\lambda) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \ ; \ \sigma \text{ préserve chaque colonne de } T_\lambda\}$$

En exemple nous prendrons $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$. On trouve que $P(T_\lambda) = \{\mathrm{id}, (12)\}$ et $Q(T_\lambda) = \{\mathrm{id}, (13)\}$. On remarque que $P(T_\lambda) \cap Q(T_\lambda) = \{\mathrm{id}\}$ et que $P(T_\lambda)$ et $Q(T_\lambda)$ sont des sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$. En effet, soit $\sigma \in P \cap Q$ et $k \in T_\lambda$. L'entrée k est dans une ligne et une colonne donc $\sigma(k) = k$. Cela étant vrai pour tout k dans T_λ on a bien $\sigma = \mathrm{id}$.

On définit

$$a(T_\lambda) := \sum_{p \in P(T_\lambda)} e_p \in A \quad \text{et} \quad b(T_\lambda) := \sum_{q \in Q(T_\lambda)} \varepsilon(q) e_q \in A$$

Enfin on pose $c(T_\lambda) = a(T_\lambda) b(T_\lambda) \in A$ qu'on appelle symmétriseur de Young.

Proposition 2.1. *Pour tout tableau de Young T_λ, $c(T_\lambda) \neq 0$.*

Preuve. Montrons que lorsque p parcourt P et q parcourt Q, les produits pq sont tous distincts. Supposons $p_1, p_2 \in P$, $q_1, q_2 \in Q$ et $p_1 q_1 = p_2 q_2$. Comme $P(T_\lambda) \cap Q(T_\lambda) = \{\mathrm{id}\}$ on a $p_2^{-1} p_1 = q_2 q_1^{-1} = \mathrm{id}$. Et donc $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$. □

Nous allons dans un premier temps montrer que deux tableaux de Young associées à une même partition donnent des images isomorphes.

Lemme 2.2. *Soit $g \in \mathfrak{S}_n$. Alors $P(gT_\lambda) = gP(T_\lambda)g^{-1}$ et $Q(gT_\lambda) = gQ(T_\lambda)g^{-1}$. Et donc $c(gT_\lambda) = gc(T_\lambda)g^{-1}$.*

Preuve du lemme. Posons $T' = gT_\lambda$. Montrons tout d'abord que si α est en position (i,j) de T_λ et (i,j') de pT_λ alors $g(\alpha)$ est en position (i,j) de T' et en position (i,j') de $gpg^{-1}T'$. En effet, supposons que α est en position (i,j) de T_λ et en position (i,j') de pT_λ. L'entier β en position (i,j') de T_λ vérifie donc $p(\beta) = \alpha$. Ensuite, par définition de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur T_λ, les éléments en position (i,j) et (i,j') de T' sont réspectivement $g(\alpha)$ et $g(\beta)$. Donc l'élement en position (i,j') de $gpg^{-1}T'$ est $gpg^{-1} \cdot g(\beta) = gp(\beta) = g(\alpha)$. Ainsi, l'élément en position (i,j) de T' est en position (i,j') de $gpg^{-1}T'$. Donc $p \in P(T_\lambda)$ conserve toutes les lignes de T_λ et donc par le résultat précédent, gpg^{-1} conserve les lignes de gT_λ et réciproquement et on a le même résultat avec les colonnes. Donc $p \in P(T_\lambda)$ si et seulement si $gpg^{-1} \in P(gT_\lambda)$ et $q \in Q(T_\lambda)$ si et seulement si $gqg^{-1} \in Q(gT_\lambda)$.
Ainsi, soit $p \in P(gT_\lambda)$. Alors $g(g^{-1}pg)g^{-1} \in P(gT_\lambda)$ d'où $g^{-1}pg \in P(T_\lambda)$ c'est à dire $p \in gP(T_\lambda)g^{-1}$. Réciproquement, si $gpg^{-1} \in gP(T_\lambda)g^{-1}$ avec $p \in P(T_\lambda)$ alors $gpg^{-1} \in P(gT_\lambda)$. Et donc $P(gT_\lambda) = gP(T_\lambda)g^{-1}$.
On résonne de même avec $Q(T_\lambda)$ et donc $Q(gT_\lambda) = gQ(T_\lambda)g^{-1}$.
Enfin, comme $c(gT_\lambda) = \sum_{pq \in P(gT_\lambda)Q(gT_\lambda)} \varepsilon(q) e_{pq}$, avec les égalités ci-dessus, on a $c(gT_\lambda) = \sum_{pq \in P(T_\lambda)Q(T_\lambda)} \varepsilon(gqg^{-1}) e_{gpqg^{-1}} = gc(T_\lambda)g^{-1}$. □

En particulier, on a également $a(gT_\lambda) = ga(T_\lambda)g^{-1}$ et $b(gT_\lambda) = gb(T_\lambda)g^{-1}$.

Ce lemme nous permet d'établir le résultat suivant.

Proposition 2.3. *Soit T_λ et T'_λ deux tableaux de Young associés à la même partition λ. Alors $Ac(T_\lambda) \simeq Ac(T'_\lambda)$.*

Preuve. Tout d'abord, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $T'_\lambda = \sigma T_\lambda$. Posons alors $\varphi : Ac(T_\lambda) \longrightarrow Ac(T'_\lambda)$, $x \longmapsto x\sigma^{-1}$. φ est un morphisme de A-modules et est bien défini. En effet, soit $x \in Ac(T_\lambda)$, il existe $\tilde{x} \in A$ tel que $x = \tilde{x}c(T_\lambda)$. On a alors $\varphi(x) = x\sigma^{-1} = \tilde{x}c(T_\lambda)\sigma^{-1} = \tilde{x}\sigma^{-1}(\sigma c(T_\lambda)\sigma^{-1}) = \tilde{x}\sigma^{-1}c(T'_\lambda) \in Ac(T'_\lambda)$ par le lemme 2.2.
Montrons que φ est surjective. Soit $ac(T'_\lambda) \in Ac(T'_\lambda)$. Posons $x = a\sigma c(T_\lambda)$. Alors $\varphi(x) = a\sigma c(T_\lambda)\sigma^{-1} = ac(T'_\lambda)$.
φ est également injective. En effet, soit $x,\ y \in Ac(T_\lambda)$ tel que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors $x\sigma^{-1} = y\sigma^{-1}$ et donc $x = y$. φ est donc bien un isomorphisme. $\square$

Ainsi nous pouvons fixer le choix d'un tableau de Young : nous appellerons *standard* un tableau dont les coefficients augmentent en ligne et en colonne, comme dans l'exemple ci-après pour la partition $(3, 2, 1)$ de 6.

1	2	3
4	5	
6		

Nous noterons donc simplement, sauf s'il y a ambiguïté, c_λ dans la suite au lieu de $c(T_\lambda)$ et de même pour a_λ, b_λ, P_λ et Q_λ.

2.2 Promenade dans les tableaux de Young

Nous allons maintenant mettre en évidence le fait que c_λ est multiple d'un élément idempotent de A. Montrons tout d'abord le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Un élément $g \in \mathfrak{S}_n$ peut s'écrire sous la forme pq avec $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$ si et seulement si deux éléments qui sont sur une même ligne de T_λ ne sont dans une même colonne de gT_λ.*

Preuve. Supposons tout d'abord que $g = pq$ avec $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$. Prenons α et β dans une même ligne de T_λ. Ils sont donc encore dans une même ligne de pT_λ. On a $gT_\lambda = (pqp^{-1})pT_\lambda$. Mais comme dans la preuve du lemme 1.2, la transformation (pqp^{-1}) appliqué à pT_λ change les termes de la même manière que q appliqué à T_λ, c'est donc une permutation des colonnes de pT_λ. Or comme α et β sont dans une même ligne de pT_λ ils ne sont pas dans une même colonne de gT_λ.

Réciproquement, supposons que deux éléments sur une même ligne de T_λ ne sont pas sur une même colonne de gT_λ. Ainsi, les éléments sur la première colonne de gT_λ se retrouvent tous sur différents lignes de T_λ. Prenons la permutation $p_1 \in P_\lambda$ de tel sorte que p_1T_λ et gT_λ aient la même première colonne à permutation près. On répète cette construction pour les colonnes suivante et on obtient une permutation $p = p_1 \cdots p_{\lambda_1}$ tel que pT_λ et gT_λ aient les même colonne à permutation près. Ainsi, $gT_\lambda = qpT_\lambda$ pour $q \in Q_\lambda(pT_\lambda) = pQ_\lambda p^{-1}$ et donc $q = pq'p^{-1}$ avec $q' \in Q_\lambda$. On a donc $gT_\lambda = (pq'p^{-1})pT_\lambda = pq'T_\lambda$ et ainsi on a bien $g = pq'$. $\square$

Nous pouvons maintenant établir le lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soit $\lambda \vdash n$ et $x \in A$ tel que $pxq = \varepsilon(q)x$ pour tout $p \in P_\lambda, q \in Q_\lambda$. Alors il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $x = \gamma c_\lambda$. En particulier, il existe $n_\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$.*

Preuve. Soit $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$. On a tout d'abord $p \cdot c_\lambda = c_\lambda$ et $c_\lambda q = \varepsilon(q)c_\lambda$. En effet, $pc_\lambda = \sum_{g,q} \varepsilon(q)e_{pgq} = \sum_{h,q} \varepsilon(q)e_{hq} = c_\lambda$ et $c_\lambda q = \sum_{p,g} \varepsilon(g)e_{pgq} = \varepsilon(q) \sum_{p,h} \varepsilon(h)e_{ph} = \varepsilon(q)c_\lambda$.
D'où $pc_\lambda q = \varepsilon(q)c_\lambda$

Supposons maintenant que $x = \sum_g \alpha_g e_g \in A$ satisfait l'égalité du lemme *i.e* $\sum_g \alpha_g e_{pgq} = \varepsilon(q) \sum_g \alpha_g e_g$. Pour tout $g \in \mathfrak{S}_n$, $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$ on a $\alpha_{pgq} = \varepsilon(q)\alpha_g$ et donc pour $g = \mathrm{id}$, $\alpha_{pq} = \varepsilon(q)\alpha_{\mathrm{id}}$. Montrons que lorsque g ne peut pas s'écrire sous la forme pq avec $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$, $\alpha_g = 0$ et donc $x = \alpha_{\mathrm{id}} c_\lambda$. Par la proposition 2.4, il existe α et β dans une même ligne de T_λ et une même colonne de gT_λ. Posons donc $\tau = (\alpha\ \beta)$. Ainsi $\tau \in P(T_\lambda)$ et $\tau \in Q(gT_\lambda) = gQ(T_\lambda)g^{-1}$, ce qui nous donne $g^{-1}\tau g \in Q(T_\lambda)$. Et donc $\alpha_{\tau g(g^{-1}\tau g)} = \varepsilon(\tau)\alpha_g$ ce qui nous donne $\alpha_g = -\alpha_g$ d'où $\alpha_g = 0$ si g ne s'écrit pas sous la forme pq.
Enfin, soit $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$. On a $pc_\lambda^2 q = (pc_\lambda)(c_\lambda q) = c_\lambda^2$. Donc par le résultat ci-dessus c_λ^2 est un multiple de c_λ. $\square$

Nous noterons p_λ l'idempotent $n_\lambda^{-1} c_\lambda$.

Lemme 2.6. *Soit λ et μ deux partitions de n et supposons $\lambda > \mu$. Alors il existe deux entiers dans une même ligne de T_λ qui sont également dans une même colonne de T_μ.*

Preuve. Supposons que l'assertion est fausse. Alors, les λ_1 chiffres de la première ligne de T_λ se retrouvent tous dans différentes colonnes de T_μ. On a donc $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ et donc $\lambda_1 = \mu_1$ et ainsi T_λ et T_μ ont la même première ligne puisque la numérotation est fixée. On répète ensuite le même argument pour la deuxième ligne de T_λ et de T_μ et donc $\lambda_2 = \mu_2$. On fait de même pour les lignes suivantes et donc $\lambda = \mu$ ce qui est absurde. $\square$

Lemme 2.7. *Soient λ et μ deux partitions de n telles que $\lambda > \mu$. Alors $a_\lambda A b_\mu = 0$.*

Preuve. Soit $g \in \mathfrak{S}_n$. On va montrer que pour $x = e_g \in A$ on a $a_\lambda x b_\mu = 0$.
On a $b_\mu = b(T_\mu)$ et $gb(T_\mu) = (gb(T_\mu)g^{-1})g = b(gT_\mu)g$. Posons $T = T_\lambda$ et $T' = gT_\mu$. On doit montrer que $a(T)b(T') = 0$. Par le lemme 2.6, comme $\lambda > \mu$, il existe deux entiers i et j qui sont sur une même ligne de T et sur une même colonne de T'. On pose $\tau = (i\ j)$. Comme $\tau \in P(T)$ et $\tau \in Q(T')$ on a $a(T)b(T') = (a(T)\tau)(\tau b(T')) = a(T)\varepsilon(\tau)b(T') = -a(T)b(T')$, d'où $a(T)b(T') = 0$ et donc $a_\lambda x b_\mu = a(T)b(T')g = 0$.
Comme les e_g avec $g \in \mathfrak{S}_n$ engendrent A on a bien $a_\lambda A b_\mu = 0$. $\square$

Lemme 2.8. *Soit λ et μ deux partitions de n tel que $\lambda \neq \mu$. Alors $c_\lambda A c_\mu = 0$.*

Preuve. On distingue deux cas.
Supposons tout d'abord $\lambda > \mu$. On a $p_\lambda A p_\mu = a_\lambda b_\lambda A a_\mu b_\mu \subset a_\lambda A b_\mu = 0$ par le lemme 2.7.
Supposons maintenant $\mu > \lambda$ et posons $\iota : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n$, $\sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ que l'on prolonge en $\bar{\iota}$: $A \longrightarrow A$, $\sum_\sigma a_\sigma e_\sigma \longmapsto \sum_\sigma a_\sigma e_{\sigma^{-1}}$. On a alors $\bar{\iota}(a_\lambda b_\lambda) = \sum_{(p,q)} \varepsilon(q) e_{q^{-1}p^{-1}} = b_\lambda a_\lambda$. En notant que pour $x \in A$, si $\bar{\iota}(x) = 0$ alors $x = 0$ on a $\bar{\iota}(c_\lambda x c_\mu) = \bar{\iota}(c_\mu)\bar{\iota}(x)\bar{\iota}(c_\lambda) = b_\mu(a_\mu \bar{\iota}(x) b_\lambda)a_\lambda = 0$ par le lemme 2.7 et donc $c_\lambda x c_\mu = 0$. On a donc bien pour $\lambda \neq \mu$, $c_\lambda A c_\mu = 0$. $\square$

Lemme 2.9. *Soit M un A-module et $u \in A$ idempotent. On a alors l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel $uM \simeq \mathrm{Hom}_A(Au, M)$.*

Preuve. Posons $\varphi : \mathrm{Hom}_A(Au, M) \to uM, f \mapsto f(u)$. Alors $f(u) = f(u^2) = uf(u)$ donc φ est bien définie puisque $uf(u) \in uM$.
Montrons que φ est surjective. Soit $um \in uM$. Posons pour $a \in A$, $f(au) = aum$. On a alors pour tout $a' \in A$ et $au \in Au$, $f(a'au) = a'aum = a'f(au)$ et donc $f \in \mathrm{Hom}_A(Au, M)$. De plus $um = f(u) = \varphi(f)$ et φ est donc surjective. Montrons que φ est injective. Soit f tel que $\varphi(f) = 0$. On a donc $uf(u) = 0$, et donc $f(u) = 0$. Soit $a \in A$, on a $f(au) = af(u) = 0$ d'où $f = 0$.
Donc φ est bien un isomorphisme. $\square$

Lemme 2.10. *Soit $\lambda \vdash n$. On a l'égalité $c_\lambda A c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$.*

Preuve. Soient $x = c_\lambda a c_\lambda \in c_\lambda A c_\lambda$, $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$. On a $pxp = (pc_\lambda)a(c_\lambda q) = x$ et donc par le lemme 2.5, il existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $x = \gamma c_\lambda \in \mathbb{C}c_\lambda$. Réciproquement, $\mathbb{C}c_\lambda = \mathbb{C}n_\lambda^{-1}(n_\lambda c_\lambda) = \mathbb{C}c_\lambda^2 = c_\lambda \mathbb{C}e_{\mathrm{id}} c_\lambda \subset c_\lambda A c_\lambda$. On a donc bien $c_\lambda A c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$. $\square$

Nous pouvons maintenant décrire toutes les représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_n$.

Théorème 2.11. *Soit $\lambda \vdash n$. Posons $V_\lambda = A \cdot p_\lambda$. Alors V_λ est un A-module irréductible. De plus si $\mu \vdash n$ tel que $\lambda \neq \mu$ alors V_λ n'est pas isomorphe à V_μ.*

Preuve. Soit λ et μ deux partitions de n. Remarquons que $p_\lambda A p_\lambda = c_\lambda A c_\lambda$. On a donc, par le lemme 2.9 $\mathrm{Hom}_A(V_\lambda, V_\mu) = \mathrm{Hom}_A(Ac_\lambda, Ac_\mu) \simeq c_\lambda A c_\mu$. Si $\lambda = \mu$, par le lemme 2.10 on a $\mathrm{Hom}_A(V_\lambda, V_\lambda) \simeq \mathbb{C}c_\lambda$ et par la réciproque du lemme de Schur V_λ est irréductible. Ensuite, si $\lambda \neq \mu$, par le lemme 2.8 on a $\mathrm{Hom}_A(V_\lambda, V_\mu) = 0$ et donc par le lemme de Schur comme ces deux modules sont irréductibles, V_λ n'est pas isomorphe à V_μ. □

Comme le nombre de représentations irréductibles est égale au nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ qui est égal au nombre de partition de n, on a, grâce au théorème ci-dessus, décrit toutes les représentations irréductibles du groupe $\mathfrak{S}_n$.

Pour finir nous allons donner quelques exemples. Pour les partitions de n, $\lambda = (n)$ et $\mu = (1, \ldots, 1)$ on a $\mathbb{C}\,\mathfrak{S}_\mathrm{n} \cdot c_\lambda = \mathbb{C} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mathrm{n}} e_\sigma$ qui est donc la représentation triviale et $\mathbb{C}\,\mathfrak{S}_\mathrm{n} \cdot c_\mu = \mathbb{C} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mathrm{n}} \varepsilon(\sigma) e_\sigma$ qui est la représentation signature. Enfin, pour $n = 3$ on a les partitions $\lambda = (3)$ et $\mu = (1, 1, 1)$ que l'on vient de décrire et également $\nu = (2, 1)$ qui nous donne la représentation standard de $\mathfrak{S}_3$.

3 Dualité de Schur-Weyl

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une corréspondance entre les représentations irréductibles V_λ de $\mathfrak{S}_n$ et certaines représentations irréductibles du groupe linéaire en utilisant le théorème du double commutant.

3.1 Cadre général

Dans cette partie nous allons définir la notion de commutant d'une algèbre puis étudier la correspondance qu'il existe entre ce dernier et l'algèbre. Dans ce paragraphe A désignera une algèbre sur $\mathbb{C}$ et on supposera même, c'est le cas qui nous intéresse ici, que A est l'algèbre d'un groupe fini.

3.1.1 Commutant d'une algèbre

Définition 3.1. *On dit qu'une algèbre est semi-simple si en tant que module module sur elle même elle est semi-simple.*

Comme ici A est l'algèbre d'un goupe fini sur le corps des complexes, elle est semi-simple par le théorème de Maschke.

Soit U un A-module à droite.

Définition 3.2. *On note A^{op} l'algèbre opposée à A : le produit ab dans A^{op} est le produit ba calculé dans A. De plus A et A^{op} coïncident en tant qu'espace vectoriel.*

Définition 3.3. *Étant données deux $\mathbb{C}$-algèbres A et B on forme l'algèbre $B \otimes_\mathbb{C} A$ dont la structure d'espace vectoriel coïncide avec le produit tensoriel d'espaces vectoriels et de multiplication $(b \otimes a)(b' \otimes a') = bb' \otimes aa'$.*

Définition 3.4. *On dit que U est un B-A-bimodule si c'est un $B \otimes_\mathbb{C} A^{\mathrm{op}}$-module à gauche. C'est à dire que U est un A-module à droite et un B-module à gauche et pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$ et tout $u \in U$ on a $b(ua) = (bu)a$.*

Définition 3.5. *On définit le commutant de A comme l'ensemble des endomorphismes A-linéaires :*

$$\mathrm{End}_A(U) = \Big\{\phi \in \mathrm{End}_\mathbb{C}(U);\ \forall a \in A,\ \forall u \in U, \phi(ua) = \phi(u)a\Big\}.$$

Théorème 3.6 (Jacobson-Chevalley)**.** *Soit A une algèbre semi-simple sur $\mathbb{C}$, soit U un A-module à droite et posons $B = \mathrm{End}_A(U)$. Soit $f \in \mathrm{End}_B(U)$. Alors pour toute famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de U il existe $a \in A$ tel que pour tout i, $f(x_i) = x_i a$.*

Preuve. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille d'éléments de U. On prolonge f en une application $f^n : U^n \to U^n$ définit par $f^n(y_1, \ldots, y_n) = (f(y_1), \ldots, f(y_n))$. L'application f^n commute avec toute application $g \in \mathrm{End}_A(U^n)$. En effet, soit matriciellement, g est de la forme $(g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où pour tout i, j $g_{ij} \in \mathrm{End}_A(U)$. Soit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U$. On a

$$f^n \circ g(u) = f^n \left(\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} g_{ij} u_j \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \right) = \left(\left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} g_{ij} f(u_j) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \right) = (g \circ f^n)(u)$$

Posons ensuite $v = (x_1, \ldots, x_n)$. L'espace vectoriel vA est un sous-module de U^n et comme ce dernier est semi-simple, il existe U' tel que $U^n = vA \oplus U'$. On note p la projection de U sur vA parallèlement à U'. Ainsi, $p \in \mathrm{End}_A(U^n)$. En effet, soit $a \in A$ et $w \in U^n$ alors $p(wa) = p(va'a + u'a) = va'a = p(w)a$. Donc f^n commute avec p et

$$(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = f^n \circ p(x_1, \ldots, x_n) = p \circ f^n(v) \in vA.$$

Ainsi, il existe $a \in A$ tel que $(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = (x_1 a, \ldots, x_n a)$. □

3.1.2 Correspondance entre une algèbre et son commutant

Théorème 3.7 (Double commutant)**.** *Soit A une algèbre semisimple et U un A-module à droite. On pose $B = \mathrm{End}_A(U)$, le commutant de A. Alors $A = \mathrm{End}_B(U)$.*

Preuve. On a déjà $A \subset \mathrm{End}_B(U)$. Montrons donc l'inclusion inverse. On note $d = \dim U$ et prenons une base $\{e_1, \ldots, e_d\}$ de U. Soit $f \in \mathrm{End}_A(U)$. Par le théorème 3.6 il existe $a \in A$ tel que pour tout i, $f(e_i) = e_i a$. Ainsi, pour tout $u = \sum_i \alpha_i e_i \in U$,

$$f(u) = \sum_i \alpha_i f(e_i) = \left(\sum_i \alpha_i e_i \right) a = ua.$$

On a donc bien $A = \mathrm{End}_B(U)$. □

Dans la suite, U sera un A-module à droite et B sera le commutant de A. Les U_i désigneront tous les A-modules et on note la décomposition isotypique de U en tant que A-module

$$U = \bigoplus_{i=1}^{r} \widehat{U_i}$$

Avec $\widehat{U_i} = U_{i,1} \oplus \cdots \oplus U_{i,n_j}$ où pour tout j, $U_{i,j} \simeq U_i$. On pose pour tout i, $V_i = \mathrm{Hom}_A(U_i, U)$. C'est un B-module pour la composition : $bf = b \circ f$ pour $f \in V_i$ et $b \in B$. Nous allons étudier la décomposition de U en tant que B-A-bimodule et montrer que les modules irréductibles sont de la forme $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$. Remarquons tout d'abord que si $\widetilde{U}$ est un A-module à droite et $\widetilde{V}$ un B-module à gauche on forme un B-A-bimodule $\widetilde{V} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U}$ isomorphe à $\dim \widetilde{V}$ copies de $\widetilde{U}$ comme A-module ou à $\dim \widetilde{U}$ copies de $\widetilde{V}$ comme B-module. En effet, Prenons $\{f_k\}_{k \in J}$ une base de $\widetilde{V}$. Alors

$$\widetilde{V} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U} = \left(\bigoplus_{k \in J} \mathbb{C} f_k \right) \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U} = \bigoplus_{k \in J} \big(\mathbb{C} f_k \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U} \big).$$

Mais pour tout k, le terme $\mathbb{C} f_k \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U}$ est un A-module isomorphe à $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U}$ et donc à $\widetilde{U}$. Ainsi comme A-module, $\widetilde{V} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U} \simeq \widetilde{U}^{\oplus \widetilde{n}}$ avec $\widetilde{n} = \dim \widetilde{V}$. De la même façon, on voit que, en prenant $\{e_k\}_{k \in I}$ une base de $\widetilde{U}$ et en écrivant

$$\widetilde{V} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U} = \bigoplus_{k \in I} \big(\widetilde{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} e_k \big).$$

Avec $\widetilde{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}e_k$ un B-module isomorphe à $\widetilde{V}$. Donc comme B-module, $\widetilde{V} \otimes_{\mathbb{C}} \widetilde{U} \simeq \widetilde{V}^{\oplus \widetilde{m}}$ avec $\widetilde{m} = \dim \widetilde{U}$.

Dans notre cas nous avons des B-modules V_i et des A-module U_i. Nous allons tout d'abord étudier la simplicité des modules V_i et $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$ puis donner une décomposition en B-A-bimodules simples de U.

Lemme 3.8. *Le B-module V_i est soit nul, soit simple.*

Preuve. Soit W un sous-module de V_i non nul et $f \in W$ non nul. L'action de A sur U commute avec f donc $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-A-module de U_i et de U respectivement. Mais U_i est simple et f est non nul donc $\ker f = \{0\}$ et f est injective. Ainsi f induit un isomorphisme $\widetilde{f} : U_i \to \operatorname{Im} f$. De plus, comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-A-module de U, par le théorème de Maschke, il existe un A-module U' tel que $U = \operatorname{Im} f \oplus U'$. Soit $g \in V_i$. On va montrer que $g \in W$. On définit ϕ l'endomorphisme de U tel que $\phi(x) = g \circ \widetilde{f}^{-1}(x)$ si $x \in \operatorname{Im} f$ et 0 si $x \in U'$. Ainsi, ϕ commute avec l'action de A donc $\phi \in B$ et $\phi f \in W$. Mais $\phi f(x) = \phi \circ f(x) = g \circ \widetilde{f}^{-1}(f(x)) = g(x)$. Par conséquent $g \in W$ et donc $W = V_i$. □

Lemme 3.9. *Le B-A-bimodule $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$ est simple.*

Preuve. Soit W un sous-B-A-bimodule de $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$. On va montrer que tout élément de la forme $e_i \otimes v$ est dans W. Soit $w \in W$ non nul. On peut écrire $w = \sum_{(\alpha,\beta) \in I' \times J'} \lambda_{\alpha,\beta} f_\beta \otimes e_\alpha = \sum_{\alpha \in I'} v_\alpha \otimes e_\alpha$ avec $v_\alpha \in V_i$, $I' \subset I$ et $J' \subset J$. Soit $k \in I$, $v \in V_i$ et fixons $j \in I'$. Comme V_i est simple, il existe $b \in B$ tel que $v_j = bv$. Définissons ensuite $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(U)$ par $f(e_j) = e_k$ et $f(e_i) = 0$ si $i \neq j$. Comme $\operatorname{End}_A(U) \cong \mathbb{C}$ puisque U est simple, le théorème 3.6 nous dit qu'il existe $a \in A$ tel que pour tout $\alpha \in I$, $f(e_\alpha) = e_\alpha a$ et donc pour tout $u \in W$, $f(u) = ua$. Ainsi, $bwa = v \otimes e_k$ et comme W est un B-A-bimodule, $bwa \in W$. Donc $v \otimes e_k \in W$ et comme $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i = \bigoplus_{l \in I} \left(V_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}e_l\right)$, il est engendré par les éléments de cette forme, et donc on a bien $W = V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$. □

Proposition 3.10. *L'application $\varphi : (v,u) \mapsto v(u)$ de $V_i \times U_i$ dans U induit un isomorphisme de $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$ dans la composante isotypique $\widehat{U_i} = U_{i,1} \oplus \cdots \oplus U_{i,n_i}$ de U.*

Preuve. L'application $\varphi : V_i \times U_i \to U$ est bilinéaire donc se factorise en une aplication linéaire $\widetilde{\varphi} : V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i \to U$ tel que $\widetilde{\varphi}(v \otimes u) = \varphi(v,u)$. Montrons que c'est un morphisme de B-A-bimodules. Soit $b \otimes a \in B \otimes_{\mathbb{C}} A^{\mathrm{op}}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}((b \otimes a)(v \otimes u)) &= \widetilde{\varphi}(bv \otimes ua) \\
&= \varphi(bv, ua) \\
&= b \circ v(u)a \\
&= vb(u)a \\
&= b\varphi(v,u)a \\
&= (b \otimes a)\widetilde{\varphi}(v \otimes u)
\end{aligned}$$

De plus, on sait déjà que $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$ est un module simple et $\widetilde{\varphi}$ est non nul d'où $\ker \widetilde{\varphi} = \{0\}$ et donc $\widetilde{\varphi}$ est injectif. On sait aussi qu'en tant que A-module, $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$ est isomorphe à un sous-module de $\widehat{U_i}$ d'où $\widetilde{\varphi}(V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i) \subset \widehat{U_i}$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $y \in \widehat{U_i}$. On peut écrire $y = \sum_{j=1}^r y_j$ avec $y_j \in U_{i,j}$ et on note ϕ_j un isomorphsime entre U_i et $U_{i,j}$. On peut alors écrire $U_{i,j} = \operatorname{Im} \phi_j$ et donc $y_j = \phi_j(x_j)$. Ainsi

$$y = \sum_j \phi_j(x_j) = \sum_j \widetilde{\varphi}(\phi_j \otimes x_j) = \widetilde{\varphi}(\sum_j \phi_j \otimes x_j).$$

Comme $\phi_j \in \operatorname{Hom}_A(U_i, U)$ on a bien montrer que $\widetilde{\varphi}$ est surjectif. □

Proposition 3.11. *En tant que B-module et B-A-bimodule, U est complètement réductible.*

Preuve. On sait déjà par la proposition 3.10 qu'en tant que B-A-bimodule, $U \simeq \bigoplus_i V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$ et que pour tout i, $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$ est un B-A-bimodule simple tel que $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i$ n'est pas isomorphe à $V_j \otimes_{\mathbb{C}} U_j$ si $j \neq i$. Donc U est complètement réductible comme B-A-bimodule. Ensuite, on sait que en tant que B-module, $V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i \simeq V_i^{\oplus m_i}$ avec $m_i = \dim U_i$ donc $U \simeq \bigoplus_i V_i^{\oplus m_i}$ où pour tout i, V_i est un B-module simple. Donc U est complètement réductible en tant que B-module. □

Nous pouvons alors résumer tout ce que nous venons de montrer dans le théorème suivant.

Théorème 3.12. *On a la décomposition de U en tant que B-module*

$$U \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} V_i^{\oplus m_i}$$

avec $m_i = \dim U_i$. On a également la décomposition en tant que A-module

$$U = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i^{\oplus n_i}$$

avec $n_i = \dim V_i$.

Enfin, en tant que B-A-module

$$U \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} V_i \otimes_{\mathbb{C}} U_i.$$

3.2 Représentations irréductibles du groupe linéaire

Nous allons utiliser les résultats généraux dans le cas $A = \mathfrak{S}_n$ et $U = V^{\otimes n}$. B désigne toujours le commutant de A. Le groupe $\mathrm{GL}(V)$ agit à gauche sur les tenseurs décomposables de $V^{\otimes n}$ comme suit :

$$\forall\ g \in \mathrm{GL}(V),\ \forall v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n},\ g \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = g(v_1) \otimes \cdots \otimes g(v_n)$$

Cette action fait de $V^{\otimes n}$ un $\mathrm{GL}(V)$-module et l'action commute avec l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Reprenons les même notations que précédemment. Comme l'action de $\mathfrak{S}_n$ s'étend à une action de A sur $V^{\otimes n}$, le sous-espace $\mathbb{S}_\lambda V = V^{\otimes n} c_\lambda$ est stable par $\mathrm{GL}(V)$.

Nous allons tout d'abord à démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.13. *Chaque $\mathbb{S}_\lambda V$ est une représentation irréductible de* $\mathrm{GL}(V)$. *De plus, en notant m_λ la dimension de V_λ on a la décomposition en* $\mathrm{GL}(V)$*-modules suivante :*

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash n} (\mathbb{S}_\lambda V)^{\oplus m_\lambda}$$

Avant de montrer ce théorème nous allons donner la décomposition de $V^{\otimes 2}$ et $V^{\otimes 3}$ en $\mathrm{GL}(V)$-modules irréductibles. Nous avons deux partitions de 2, $\lambda = (2)$ et $\mu = (1,1)$ et donc deux symétriseurs $c_\lambda = e_{\mathrm{id}} + e_{(1\ 2)}$ et $c_\mu = e_{\mathrm{id}} - e_{(1\ 2)}$. Ainsi, en utilisant les projecteurs énoncés dans la partie 1.1 on a $\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Sym}^2(V)$ et $\mathbb{S}_\mu V = \mathrm{Alt}^2(V)$. Donc nous avons, d'après le théorème, la décomposition en $\mathrm{GL}(V)$-modules irréductibles

$$V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V).$$

Ensuite, nous avons trois partitions de 3, $\lambda = (3)$, $\mu = (1,1,1)$ et $\nu = (2,1)$. Pour λ et μ on retrouve $\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Sym}^3(V)$ et $\mathbb{S}_\mu V = \mathrm{Alt}^3(V)$. Pour la troisième partition, on remarque que V_ν est la représentation standard de $\mathfrak{S}_3$ et donc de dimension deux. Ainsi, d'après le théorème, nous avons

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus \left(\mathbb{S}_{(2,1)} V\right)^{\oplus 2} \oplus \mathrm{Alt}^3(V).$$

Nous allons alors montrer que les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(V)$ sont les B-modules irréductibles. Nous pouvons tout d'abord remarquer que

$$\mathrm{Hom}_A(V_\lambda, V^{\otimes n}) = \mathrm{Hom}_A(Ac_\lambda, V^{\otimes n}) \simeq V^{\otimes n}c_\lambda = \mathbb{S}_\lambda V.$$

On énonce ensuite un lemme dont la preuve se trouve dans le cours Pierre Baumann, *Introduction à la théorie des représentations*. Il s'agit d'une formule de polarisation.

Lemme 3.14. *Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'espace $\mathrm{Sym}^n W$, sous-espace de $W^{\otimes n}$, est engendré par les vecteurs $w^{\otimes n} := w \otimes \cdots \otimes w$ pour w parcourant W.*

Par exemple, pour $n = 2$, on note $(e_i)_i$ une base de W. Le vecteur $e_i \cdot e_j = e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i$ peut également s'écrire $(e_i + e_j) \otimes (e_i + e_j) - e_i \otimes e_i - e_j \otimes e_j$.

Lemme 3.15. *L'algèbre B, comme sous-espace de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$, est engendrée par $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. De plus, tout sous-espace de $V^{\otimes n}$ est un B-module si et seulement si c'est une représentation de $\mathrm{GL}(V)$.*

Preuve. On définit l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ comme suit : pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, pour tout $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ et tout $v \in V^{\otimes n}$, $(f\sigma)(v) = f(v\sigma^{-1})\sigma$.
Remarquons que comme $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(U) \simeq U^* \otimes_{\mathbb{C}} U$ et $U_1^* \otimes_{\mathbb{C}} U_2^* \simeq (U_1 \otimes_{\mathbb{C}} U_2)$ en tant que représentation, on a

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n}) \simeq \left(V^{\otimes n}\right)^* \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes n} \simeq (V^*)^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{C}} V^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)^{\otimes n}$$

par les relations d'associativité et de commutativité du produit tensoriel. Ainsi par le lemme 3.14 il suffit de montrer que $B \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ est isomorphe en tant que représentation au sous-ensemble $\mathrm{Sym}^n W$ de $W^{\otimes n}$ avec $W = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
Soit $f \in B$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a, par commutativité des deux actions, $f(v)\sigma = f(v\sigma)$, et donc $f(v) = f(v\sigma)\sigma^{-1}$ pour tout $v \in V^{\otimes n}$. Ainsi B est l'ensemble des points fixes de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $W^{\otimes n}$ et donc $B \simeq \mathrm{Sym}^n W$. Ainsi, B est engendré par les éléments de la forme $\phi^{\otimes n}$ où ϕ parcourt $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.
Pour la suite, soit un sous-espace $U \subset V^{\otimes n}$. Supposons que U est stable par B, c'est à dire, pour tout $f \in B$ et $u \in U$, $f(u) \in U$. Comme B est engendré par $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, f est combinaison linéaire de $f_i \otimes \cdots \otimes f_i$ avec $f_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ pour $i \in I$, I fini et donc pour tout i, $f_i(u) \in U$. Or $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ donc pour tout $g \in \mathrm{GL}(V)$, $g(u) \in U$ et donc U est une sous-représentation de $\mathrm{GL}(V)$. Réciproquement, supposons que U est stable par $\mathrm{GL}(V)$ et prenons $f \in B$. Comme précédemment, f est combinaison linéaire de $f_i \otimes \cdots \otimes f_i$ avec $f_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Par densité de $\mathrm{GL}(V)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, pour tout i, il existe $(g_k^i)_k$ suite de fonction de $\mathrm{GL}(V)$ qui converge vers f_i. Or pour tout k, $g_k^i(u) \in U$ donc par passage à la limite, $f_i(w) \in W$. Donc $f(u) \in U$ et U est stable par B. On a donc également montré que B est engendré par l'image de $\mathrm{GL}(V)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

□

Nous avons donc montré que les sous $\mathrm{GL}(V)$-modules irréductibles de $V^{\otimes n}$ sont les sous B-modules irréductibles de $V^{\otimes n}$. Par le théorème 3.12 on a vu que $V^{\otimes n}$ est un B-module complètement réductible et que les B-modules irréductibles sont de la forme $\mathrm{Hom}_A(V_\lambda, V^{\otimes n}) \simeq \mathbb{S}_\lambda V$ et que $V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_\lambda (\mathbb{S}_\lambda V)^{\oplus m_\lambda}$ où $m_\lambda = \dim V_\lambda$. Ceci montre le théorème 3.13.

3.3 Dualité de Schur-Weyl

Nous venons donc de voir que $\mathrm{End}_{\mathfrak{S}_n}(V)$ était égale à l'image de $\mathrm{GL}(V)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Donc par le théorème du double commutant, $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}(V)}(V)$ est égale à l'image de $\mathfrak{S}_n$. Ainsi la décomposition de $V^{\otimes n}$ en B-A-bimodules irréductibles est une décomposition en représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(V) \times \mathfrak{S}_n$. Donc par le théorème 3.12, nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.16 (Dualité de Schur Weyl). *On a la décomposition de $V^{\otimes n}$ en représentation de $\mathrm{GL}(V) \times \mathfrak{S}_n$ simples et deux à deux non isomorphes*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{S}_\lambda V \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda.$$

De plus la sommation se fait sur les partitions $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ avec $k \leqslant \dim V$.

Preuve. Nous avons déjà montré que la décomposition isotypique de $V^{\otimes n}$ en représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(V) \times \mathfrak{S}_n$ est de cette forme.
Montrons la deuxième partie. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$. On note respectivement, Q_j le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui conserve la j-ème colonne de T_λ pour j entre 1 et λ_1. Alors comme $q \in Q_\lambda$ préserve chaque colonne Q_j on a $Q_\lambda = Q_1 Q_2 \cdots Q_{\lambda_1}$. Notons n_j le nombre d'entrée dans la colonne j-ème colonne et ainsi, $V^{\otimes n} = V^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V^{\otimes n_{\lambda_1}}$. Nous allons montrer que $b_\lambda V^{\otimes n} = \mathrm{Alt}^{n_1} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Alt}^{n_{\lambda_1}}$. On suppose qu'un élément $v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1} \otimes \cdots \otimes v_n$ est ordonné de telle manière que les indices de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_1}$ soient dans la première colonne et ainsi de suite. Remarquons enfin que si $q \in Q_j$ alors

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n_{j-1}+1} \otimes \cdots \otimes v_{n_j} \otimes \cdots \otimes v_n) e_q = v_1 \otimes \cdots \otimes (v_{n_{j-1}+1} \otimes \cdots \otimes v_{n_j}) e_q \otimes \cdots \otimes v_n.$$

Ainsi pour $q = q_1 \cdots q_{\lambda_1}$ on voit que

$$(V^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes V^{\otimes n_{\lambda_1}}) q = V^{\otimes n_1} q_1 \otimes \cdots \otimes V^{\otimes n_{\lambda_1}} q_{\lambda_1}$$

et donc

$$b_\lambda V^{\otimes n} = \mathrm{Alt}^{n_1} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Alt}^{n_{\lambda_1}} V.$$

Mais, comme $n_1 = k$, si $k > \dim V$, $\mathrm{Alt}^k V = 0$ et donc $V^{\otimes n} b_\lambda = 0$. Enfin, comme $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$, si $k > \dim V$, $V^{\otimes n} c_\lambda = 0$. □

Nous avons ainsi établit une correspondance entre les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathrm{GL}(V)$ intervenant dans la décomposition en modules irréductibles de $V^{\otimes n}$. Enfin, et sans démonstration, toutes les représentation irréductibles de $\mathrm{GL}(V)$ sont de la forme $\mathbb{S}_\lambda + V \otimes \det^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ où l'application det est l'application determinant et est une représentation irréductible de dimension 1 de $\mathrm{GL}(V)$.

Bibliographie

1. William Fulton, Joe Harris, *Representation Theory, A first course*, Springer, New York, 1991.
2. Charles W. Curtis, Irving Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, AMS Chelsea Pub, 2006.
3. Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina, *Introduction to representation theory*, 2011.
4. Pierre Baumann, *Introduction à la théorie des représentations*, cours M2, 2008.
5. Roe Goodman, Nolan R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants*, Springer, 2009.