

Rapport de stage : Correspondance de McKay, Étude des caractères des sous-groupes finis de SU_2

Thorgal HINAULT, sous la direction de Jérôme GERMONI

31 mai 2016 – 8 juillet 2016

Résumé

Ce rapport de stage traite de la correspondance de McKay, mise en évidence par John McKay en 1979, éclairée par le récent article de Georgia Benkart [3]. On classe d'abord les sous-groupes finis de SU_2 à partir de ceux de SO_3 , puis on calcule leurs tables de caractère afin de dresser leur graphes de représentations. Ceci constitue la partie substantielle du travail effectué pendant mon stage. Un travail plus bibliographique, évoqué seulement en conclusion, a consisté à étudier les groupes de Coxeter finis pour aboutir à la classification des graphes de Dynkin et aux invariants algébriques associés, éléments manquants ici pour comprendre l'article de Benkart.

Table des matières

1 Homomorphisme entre SU_2 et SO_3	1
1.1 Algèbres de Lie associées	1
1.2 Structure euclidienne sur \mathfrak{su}_2	2
1.3 Propriétés de l'homomorphisme	2
2 Classification des sous-groupes finis de SU_2	3
3 Graphes de représentations	4
3.1 Cas du groupe cyclique C_n	5
3.2 Cas du groupe binaire diédral	5
3.2.1 Cas impair	6
3.2.2 Cas pair	7
3.3 Groupes binaires polyédraux	7
3.3.1 Groupe binaire tétraédrique	7
3.3.2 Groupe binaire octaédrique	9
3.3.3 Groupe binaire dodécaédrique	11
4 Conclusion	14
Bibliographie	15

1 Homomorphisme entre SU_2 et SO_3

On définit SU_2 comme le groupe des matrices carrées complexes de dimension 2, unitaires et de déterminant 1. L'ensemble SO_3 est le groupe spécial orthogonal de \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique.

1.1 Algèbres de Lie associées

Un *groupe de Lie* est un groupe muni d'une structure de variété différentielle rendant différentiables la loi de groupe et le passage à l'inverse ([9], p.156).

L'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie est l'espace tangent en l'identité du groupe de Lie, muni d'un crochet de Lie qui est une trace de la loi de groupe ([9], p.161 pour une définition *ex nihilo* et pp.163–164 pour la construction *via* les groupes de Lie).

Dans le cas de SU_2 et SO_3 , qui sont des groupes de Lie réels, on a une description assez simple des algèbres de Lie associées ([9] p.166) :

Propriété 1.1. On note \mathfrak{su}_2 (resp. \mathfrak{so}_3) l'algèbre de Lie associée à SU_2 (resp. SO_3). Alors :

$$\mathfrak{su}_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0 \text{ et } M^\dagger + M = 0\},$$

$$\mathfrak{so}_3 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M + M^T = 0\},$$

le crochet de Lie étant le commutateur.

1.2 Structure euclidienne sur \mathfrak{su}_2

De façon plus explicite, on a :

$$\mathfrak{su}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \cong \mathbb{R}^3.$$

L'isomorphisme est un isomorphisme d'espace vectoriel. En munissant \mathbb{R}^3 du crochet de Lie $(x, y) \mapsto x \wedge y$, on a un isomorphisme d'algèbres de Lie.

On constate alors que le déterminant est une forme quadratique euclidienne stable sur \mathfrak{su}_2 :

$$\det: \begin{matrix} \mathfrak{su}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} & \longmapsto & a^2 + b^2 + c^2 \end{matrix}.$$

Le déterminant définit donc un produit scalaire euclidien sur \mathfrak{su}_2 .

Remarquons ensuite que SU_2 agit sur \mathfrak{su}_2 par conjugaison. On a donc une application *adjointe* $\operatorname{Ad} : SU_2 \rightarrow \operatorname{GL}(\mathfrak{su}_2)$, et pour $g \in SU_2$ on a $\operatorname{Ad}_g : X \mapsto gXg^{-1}$. L'action Ad est continue, comme SU_2 est un groupe de Lie, et elle est même différentiable car polynomiale en les coefficients de son argument. L'invariance par conjugaison du déterminant montre que Ad est à valeur dans $O(\mathfrak{su}_2, \det) \cong O_3(\mathbb{R})$. Enfin, comme SU_2 est connexe et que Ad est continue, l'image de SU_2 est connexe. Elle contient également l'identité, et est donc contenue dans SO_3 . L'action adjointe induit donc un morphisme $\varphi : SU_2 \rightarrow SO_3$.

1.3 Propriétés de l'homomorphisme

Théorème 1.2. Le morphisme φ induit par l'application adjointe donne lieu à la suite exacte courte suivante :

$$1 \longrightarrow \{\pm I_2\} \longrightarrow SU_2 \xrightarrow{\varphi} SO_3 \longrightarrow 1.$$

Démonstration. L'application φ est un homomorphisme de groupes de Lie par ce qui précède, de noyau $\{\pm I_2\}$. En effet, soit $g \in \ker(\varphi)$. Alors pour toute matrice anti-hermitienne X on a $gX = Xg$. Or, X est anti-hermitienne si et seulement si iX est hermitienne. Donc puisque g commute à toute matrice anti-hermitienne, elle commute également à toute matrice hermitienne, car l'égalité $gX = Xg$ est \mathbb{C} -linéaire. Cela montre que g appartient au centre de SU_2 , qui n'est autre que l'intersection du centre de $\operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ avec SU_2 . Le centre de $\operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ est réduit aux homothéties, et les seules homothéties de déterminant 1 sont $+I_2$ et $-I_2$, d'où le résultat.

Pour montrer la surjectivité, on montre que $\operatorname{im} \varphi$ contient un voisinage de I_3 en utilisant le fait que $d\varphi_{I_2}$ est injectif (voir [10] p.9, proposition 1.1). Alors, comme φ est un homomorphisme, $\operatorname{im} \varphi$ contient un voisinage de tout ses points, donc est ouvert dans SO_3 . Un lemme classique montre alors qu'un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est fermé. $\operatorname{im} \varphi$ est donc la composante connexe du neutre dans SO_3 , donc SO_3 tout entier car celui-ci est connexe. \square

On peut expliciter φ , en calculant la matrice de Ad dans une \mathbb{R} -base de \mathfrak{su}_2 . Soit $\mathcal{B} = (E, F, G)$ la base de Pauli, où :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Alors on a :

$$\text{Mat}(\text{Ad}_g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \text{Re}(x^2 - \bar{y}^2) & -\text{Im}(x^2 + \bar{y}^2) & 2\text{Im}(x\bar{y}) \\ \text{Im}(x^2 - \bar{y}^2) & \text{Re}(x^2 + \bar{y}^2) & 2\text{Re}(x\bar{y}) \\ -2\text{Re}(xy) & 2\text{Im}(xy) & |x|^2 - |y|^2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}.$$

On remarque que pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\varphi \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ 0 & \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (*).$$

Comme l'idée est d'étudier les sous-groupes finis de SU_2 en relevant ceux de SO_3 , on s'intéresse aux images réciproques des éléments d'ordre fini N dans SO_3 . C'est ce que donne la proposition suivante, fondamentale pour la suite du travail puisqu'elle donne en fait le lemme XIII.2 de [5] :

Propriété 1.3. Soit $R \in SO_3$ un élément d'ordre N . On note $\varphi^{-1}\langle\{R\}\rangle = \{-R', R'\}$ avec R' d'ordre $2N$.

— Si N est pair, R' et $-R'$ sont d'ordre $2N$.

— Si N est impair, R' est d'ordre $2N$ et $-R'$ d'ordre N .

De plus R' et $-R'$ sont conjuguées dans SU_2 si, et seulement si, $N = 2$. Une matrice de conjugaison est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On travaille à conjugaison près, on peut donc supposer R sous la forme réduite de (*), et utiliser l'égalité (*). Déterminer l'ordre revient ensuite à un calcul de PGCD. \square

2 Classification des sous-groupes finis de SU_2

Pour classifier les sous-groupes finis de SU_2 , on utilise la classification des sous-groupes finis de SO_3 et l'homomorphisme φ . La classification des sous-groupes finis de SO_3 est un résultat classique d'algèbre, dont la démonstration utilise les actions de groupes. Nous rappelons seulement le résultat, pour une démonstration, voir [2].

Propriété 2.1 (Sous-groupes finis de SO_3). Soit G un sous-groupe fini de SO_3 . Alors G est conjugué à l'un des groupes suivant :

- un groupe cyclique C_n isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un n convenable ;
- un groupe diédral isomorphe à $D_n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à $2n$ éléments ;
- le groupe d'isométries directes d'un tétraèdre régulier, isomorphe à \mathfrak{A}_4 ;
- le groupe d'isométries directes d'un cube, isomorphe à \mathfrak{S}_4 ;
- le groupe d'isométries directes d'un icosaèdre régulier, isomorphe à \mathfrak{A}_5 .

Dès lors, on peut énoncer la classification des sous-groupes finis de SU_2 :

Théorème 2.2 (Sous-groupes finis de SU_2). Soit Γ un sous-groupe fini de SU_2 . Alors Γ est conjugué à l'un des groupes suivant :

- un groupe cyclique C_n isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un n convenable ;
- un groupe diédral binaire \tilde{D}_n à $4n$ éléments, tel que $\tilde{D}_n/\{\pm I_2\}$ est isomorphe à D_n ;
- un groupe binaire tétraédrique $\tilde{\mathfrak{A}}_4$ à 24 éléments, tel que $\tilde{\mathfrak{A}}_4/\{\pm I_2\}$ est isomorphe à \mathfrak{A}_4 ;
- un groupe binaire octaédrique $\tilde{\mathfrak{S}}_4$ à 48 éléments, tel que $\tilde{\mathfrak{S}}_4/\{\pm I_2\}$ est isomorphe à \mathfrak{S}_4 ;
- un groupe binaire icosaédrique $\tilde{\mathfrak{A}}_5$ à 120 éléments, tel que $\tilde{\mathfrak{A}}_5/\{\pm I_2\}$ est isomorphe à \mathfrak{A}_5 .

Démonstration. Soit Γ un sous-groupe fini de SU_2 . Alors $\varphi\langle\Gamma\rangle$ est un sous-groupe fini de SO_3 . On note $n = |\Gamma|$ et $G = \varphi\langle\Gamma\rangle$. On a toujours $\Gamma \subset \varphi^{-1}\langle G \rangle$. L'inclusion réciproque dépend de si $\varphi|_\Gamma$ est un isomorphisme ou non. Or ceci est le cas si et seulement si $-I_2$ n'est pas un élément de Γ , car alors $\ker \varphi|_\Gamma = \ker \varphi \cap \Gamma = \{I_2\}$.

On sait néanmoins que le noyau de $\varphi|_\Gamma$ contient au plus deux éléments, donc G a soit n éléments, soit $\frac{n}{2}$ éléments. On distingue selon la parité de n :

- si n est impair, alors nécessairement $|G| = n$, et donc $\varphi|_\Gamma$ est un isomorphisme. Or les seuls sous-groupes finis de SO_3 d'ordre impair sont des groupes cycliques. Dans ce cas on a donc Γ isomorphe à son image par φ , qui est un groupe cyclique à n éléments.
- si n est pair, alors on distingue selon que G est cyclique ou non :
 - si G est cyclique, alors l'image réciproque de G l'est aussi, et Γ est alors un sous-groupe d'un groupe cyclique, donc est cyclique.
 - si G n'est pas cyclique, alors il contient un élément d'ordre 2, d'après la classification des sous-groupes finis de SO_3 . On a donc un élément g de Γ tel que $\varphi(g)$ est d'ordre 2. À conjugaison près, on peut dire que :

$$g = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

et dans ce cas $g^2 = -I_2$. Ainsi $-I_2 \in \Gamma$, donc $\varphi|_\Gamma$ n'est pas injectif, et $\Gamma/\{\pm I_2\}$ est isomorphe à un sous-groupe fini non cyclique de SO_3 . □

Dans la suite, si G est un sous-groupe fini de SO_3 , on notera \tilde{G} son image réciproque par φ .

3 Graphes de représentations

À un groupe fini G , on associe un graphe dit de *représentations* qui code les relations entre les différentes représentations irréductibles de G .

Définition 3.1 (Graphe de représentations). *Soit G un groupe fini agissant fidèlement et irréductiblement sur un espace vectoriel complexe V de dimension finie. On note $\text{Irr}(G) = \{G_i \mid i \in \Lambda(G)\}$ l'ensemble des représentations irréductibles complexes de G de dimension finie. On définit le graphe de représentations de G par rapport à la représentation V , noté $\mathcal{R}_V(G)$ comme le graphe ayant les caractéristiques suivantes :*

- l'ensemble des sommets est $\Lambda(G)$;
- étant donnés $(i, j) \in \Lambda(G)^2$, il y a a_{ij} arêtes du sommet i vers le sommet j , où :

$$\forall i \in \Lambda(G), \quad G_i \otimes V = \bigoplus_{j \in \Lambda(G)} G_j^{a_{ij}}.$$

L'idée pour dresser un graphe de représentations est de décomposer les $V^{\otimes k}$ en somme directe de représentations irréductibles, car on a le lemme suivant ([7], chapitre XVIII, exercice 21) :

Lemme 3.2. *Soit V une représentation fidèle d'un groupe fini G de caractère χ . Alors :*

$$\forall i \in \Lambda(G), \exists k \in \mathbb{N}, \quad [V^{\otimes k} : G_i] > 0,$$

où $[V^{\otimes k} : G_i]$ désigne la multiplicité de G_i dans la décomposition en somme directe de représentations irréductibles de $V^{\otimes k}$.

Démonstration. Soit $i \in \Lambda(G)$. On veut montrer qu'il existe k tel que $\langle \chi_i \mid \chi^k \rangle \neq 0$. On forme donc la série génératrice $f(t) := \sum_{k \geq 0} \langle \chi_i \mid \chi^k \rangle t^k$, et on veut montrer qu'elle est non nulle. Or :

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} \langle \chi_i \mid \chi^k \rangle t^k = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \chi(g)^k t^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} \frac{1}{1 - t\chi(g)}.$$

Montrer que f admet un pôle suffit à montrer que f est non nulle. Or $\chi(1) = d = \dim V$, et pour $g \neq 1$, $\chi(g) \neq d$ (conséquence de l'inégalité triangulaire et de la fidélité). La série f a donc un pôle en $\frac{1}{\chi(1)}$, et par conséquent est non nulle, ce qui montre le lemme. □

En pratique, on traduit ce lemme avec les caractères : tout caractère apparaît au moins une fois dans la décomposition en somme de caractères irréductibles des χ_V^k .

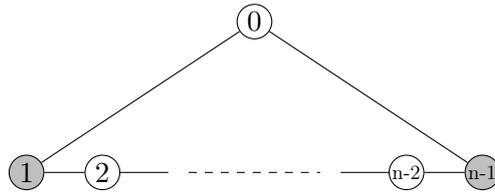


FIGURE 1 – Graphe de représentations d'un groupe cyclique d'ordre n . La représentation par rapport à laquelle est faite ce graphe est $V = G^1 \oplus G^{n-1}$, dont les sommets sont grisés. Toutes les représentations sont de dimension 1.

3.1 Cas du groupe cyclique C_n

Tout sous-groupe cyclique de SU_2 d'ordre n est conjugué à $G := \left\langle \begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & \xi_n^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$, avec ξ_n une racine primitive n -ième de l'unité. G agit naturellement sur \mathbb{C}^2 , mais la représentation qui en résulte n'est évidemment pas irréductible car le groupe est abélien. L'action est d'ailleurs diagonalisée par la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On écrit $V = G^1 \oplus G^{n-1}$, avec $G^1 = \mathbb{C}\varepsilon_1$ et $G^{n-1} = \mathbb{C}\varepsilon_2$. Ces représentations de dimension 1 donnent déjà deux caractères, sachant qu'il y en a n , qui est le nombre de classes de conjugaison de G . Pour $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et i variant dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on définit $\chi_k : \xi_n^i \mapsto \xi_n^{ki}$. On note que χ_0 est le caractère de la représentation triviale, constant et égal à 1.

Lemme 3.3. *Pour $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on a :*

$$\chi V \chi_k = \chi_{k-1} + \chi_{k+1}.$$

Démonstration. Soit $(i, k) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. Alors :

$$\chi V \chi_k(\xi_n^i) = \xi_n^i \xi_n^{ik} + \xi_n^{i(n-1)} \xi_n^{ik} = \xi_n^{i(k+1)} + \xi_n^{i(k-1)}.$$

D'où le lemme. □

Comme les χ_k sont tous des caractères linéaires, ils sont irréductibles, et on a trouvé les n caractères, ainsi que leurs relations. Cela donne le graphe de représentations de G , figure 1.

3.2 Cas du groupe binaire diédral

Le groupe diédral D_n est le groupe de symétrie d'un polygone régulier à n côtés. Il est un cas particulier de *groupe de Coxeter* ([6], chapitre 1) et est engendré par deux rotations du plan ([1]). Toutefois, pour l'identifier à un sous-groupe fini de SO_3 , on le plonge dans \mathbb{R}^3 en transformant le polygone en un prisme droit à base polygonale régulière. Le groupe D_n est alors un groupe de rotations ayant le même axe, mettons Oz . Il est engendré par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les images réciproques de ces générateurs sont alors :

$$\varphi^{-1}\langle\{R\}\rangle = \{R', -R'\}, \quad R' = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{n}} \end{pmatrix};$$

$$\varphi^{-1}\langle\{S\}\rangle = \{S', -S'\}, \quad S' = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

R' et $-R'$ ne sont évidemment pas conjugués dans \tilde{G} , car elles ne le sont pas dans SU_2 d'après la proposition 1.3 étant d'ordre $2n \geq 4$. En revanche, on vérifie que S' est conjuguée à $-S'$ dans \tilde{G} si et seulement si n est pair, via la matrice $R'^{\frac{n}{2}}$.

3.2.1 Cas impair

Lorsque n est impair, les classes de conjugaison de D_n sont $\mathcal{C}_1 = \bar{1}_3$, $\mathcal{C}_2 = \{R^k S\}_{k=0}^{n-1} = \bar{S}$, $\mathcal{C}'_h = \{R^h, R^{-h}\} = \bar{R}^h$, pour $h \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$. Il y a donc $\frac{n-1}{2} + 3$ classes de conjugaison.

On relève ces classes de conjugaison grâce à l'image réciproque de R et S , qui se relèvent en 4 éléments non conjugués. Ainsi, chaque classe de conjugaison se dédouble en deux classes ayant le même nombre d'éléments que la classe image. Il y a donc $n + 3$ classes de conjugaison.

On a alors naturellement une représentation de dimension 2 de \tilde{D}_n , et l'on pose $V = \mathbb{C}^2$ dans l'optique d'étudier $\mathcal{R}_V(\tilde{D}_n)$. Notons $\chi_V = \chi_1$ le caractère associé. On note χ_0 le caractère trivial. Ils sont reportés dans la table de caractère 1. Dans chaque colonne il y a une classe de conjugaison, le nombre entre parenthèses désigne le nombre d'éléments dans cette classe. Pour les calculs, on écrira seulement les lignes entre crochets, sans rappeler les classes de conjugaison et le nombre d'éléments.

On a :

$$\chi_V^2 - \chi_0 = \left[3; 3; -1; -1; 1 + 2 \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right); 1 + 2 \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) \right].$$

On calcule la norme de ce caractère, afin de savoir en combien de caractères irréductibles il se scinde.

$$\langle \chi_V^2 - \chi_0 \mid \chi_V^2 - \chi_0 \rangle = 2.$$

Posons $\chi'_0 = [1; 1; -1; -1; 1; 1]$. On a :

$$\langle \chi'_0 \mid \chi'_0 \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle \chi_V^2 - \chi_0 \mid \chi'_0 \rangle = 1.$$

On a donc un nouveau caractère irréductible. Posons enfin :

$$\chi_2 = \left[2; 2; 0; 0; 2 \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right); 2 \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) \right],$$

de façon à obtenir :

$$\langle \chi_2 \mid \chi_2 \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle \chi_V^2 - \chi_0 \mid \chi_2 \rangle = 1.$$

On a ainsi $\chi_V^2 = \chi_0 + \chi'_0 + \chi_2$, et on a décomposé χ_V^2 en somme de caractères irréductibles.

La suite est plus simple, grâce au lemme suivant :

Lemme 3.4. *Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$. On pose :*

$$\chi_k = \left[2; (-1)^k \times 2; 0; 0; 2 \cos\left(\frac{kh\pi}{n}\right); (-1)^k \times 2 \cos\left(\frac{kh\pi}{n}\right) \right].$$

Le caractère χ_k est irréductible, et on a si $2 \leq k \leq n-2$:

$$\chi_V \chi_k = \chi_{k-1} + \chi_{k+1}.$$

Démonstration. Le calcul de la norme de χ_k montre que le caractère est irréductible. La formule est une simple conséquence de l'identité trigonométrique :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \quad 2 \cos(p) \cdot 2 \cos(q) = 2 (\cos(p+q) + \cos(p-q)). \quad \square$$

On a pour le moment $n+1$ représentations irréductibles sur $n+3$, qui est le nombre de classes de conjugaison. On a :

$$\chi_{n-1} \chi_V = \left[4; 4; 0; 0; 2 \left((-1)^h + \cos\left(\frac{(n-2)h\pi}{n}\right) \right); 2 \left((-1)^{h+1} - \cos\left(\frac{(n-2)h\pi}{n}\right) \right) \right].$$

On remarque que : $\chi_{n-1} \chi_V = \chi_{n-2} + \chi_W$. Or $\langle \chi_W \mid \chi_W \rangle = 2$, et χ_W est donc somme de deux caractères irréductibles, linéaires pour des questions de dimension. On pose :

$$\begin{aligned} \chi_n &= [1; -1; 1; 1; (-1)^h; (-1)^{h+1}], \\ \chi'_n &= [1; -1; -1; -1; (-1)^h; (-1)^{h+1}]. \end{aligned}$$

On vérifie que ces caractères sont irréductibles et que leur somme donne χ_W , ce qui fournit les deux derniers caractères irréductibles du groupe binaire diédral \tilde{D}_n pour n impair. Le graphe de représentations est donné figure 2.

Remarquons que certains caractères passent à D_n , lorsqu'ils sont constants sur les classes de conjugaisons ayant la même image par φ . Ils découlent donc de caractères de D_n . Les autres, pour lesquels $\chi(I_2) \neq \chi(-I_2)$, sont intrinsèques à \tilde{D}_n .

Caractère / Classe	$\overline{I_2} (1)$	$-\overline{I_2} (1)$	$\overline{S'} (n)$	$-\overline{S'} (n)$	$\overline{R'^h} (2)$	$\overline{R'^h} (2)$
χ_0	1	1	1	1	1	1
$\chi_1 = \chi_V$	2	-2	0	0	$2 \cos\left(\frac{h\pi}{n}\right)$	$-2 \cos\left(\frac{h\pi}{n}\right)$
χ'_0	1	1	-1	-1	1	1
$\chi_k (2 \leq k \leq n-1)$	2	$(-1)^k \times 2$	0	0	$2 \cos\left(\frac{kh\pi}{n}\right)$	$(-1)^k \times 2 \cos\left(\frac{kh\pi}{n}\right)$
χ_n	1	-1	1	1	$(-1)^h$	$(-1)^{h+1}$
χ'_n	1	-1	-1	-1	$(-1)^h$	$(-1)^{h+1}$

TABLE 1 – Caractères du groupe binaire diédral pour n impair (h varie de 1 à $\frac{n-1}{2}$).

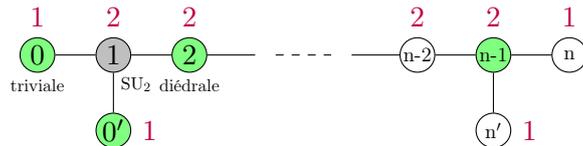


FIGURE 2 – Graphe de représentations du groupe diédral binaire pour n quelconque, $\mathcal{R}_V(\tilde{D}_n)$. Les caractères issus de D_n correspondent à un sommet vert. Le sommet grisé correspond à V . Les dimensions des représentations sont indiquées à côté de chaque sommet.

3.2.2 Cas pair

Dans le cas où n est pair, les classes de conjugaison de D_n diffèrent, mais il y a toujours $n + 3$ classes de conjugaison dans \tilde{D}_n . Les classes de conjugaison dans D_n sont $\mathcal{C}_1 = \{I_3\}$, $\mathcal{C}_2 = \{R^{\frac{n}{2}}\}$, $\mathcal{C}_3 = \{R^{2k}S\}_{k=0}^{n-1}$, $\mathcal{C}_4 = \{R^{2k+1}S\}_{k=0}^{n-1}$ et $\mathcal{C}'_h = \{R^h, R^{-h}\}$ pour $h \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$.

Ces $\frac{n}{2} + 3$ classes se relèvent en $n + 3$ classes : $\overline{I_2}$, $-\overline{I_2}$, $\overline{R'^{\frac{n}{2}}} = \overline{-R'^{\frac{n}{2}}}$, $\overline{S'} = \overline{-S'}$, $\overline{R'S'} = \overline{-R'S'}$, $\overline{R'^h}$ et $-\overline{R'^h}$ pour $h \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. En effet, S' conjugue $R'^{\frac{n}{2}}$ et son opposé, et $R'^{\frac{n}{2}}$ conjugue S' et son opposé. Les autres classes sont clairement scindées en deux classes par la proposition 1.3.

La table de caractères dans ce cas est donné dans la table 2. Le calcul du graphe de représentations de \tilde{D}_n relatif à $V = \mathbb{C}^2$ est en tout point similaire au cas n impair, et le lemme clé s'applique toujours, modulo la définition des χ_k :

Lemme 3.5. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On pose :

$$\chi_k = \left[2; (-1)^k \times 2; 0; 0; 0; 2 \cos\left(\frac{kh\pi}{n}\right); (-1)^k \times 2 \cos\left(\frac{kh\pi}{n}\right) \right].$$

Le caractère χ_k est irréductible et pour $2 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\chi_V \chi_k = \chi_{k-1} + \chi_{k+1}.$$

Démonstration. L'irréductibilité de χ_k se montre en calculant sa norme. La formule sur les caractères est encore une fois une conséquence de :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \quad 2 \cos(p) \cdot 2 \cos(q) = 4 (\cos(p+q) + \cos(p-q)) \quad \square.$$

Le graphe de représentations est donné figure 2.

3.3 Groupes binaires polyédraux

3.3.1 Groupe binaire tétraédrique

Classes de conjugaison de \tilde{G} :

Soit G le groupe d'isométries directes d'un tétraèdre régulier. Il est isomorphe à \mathfrak{A}_4 (cf. [8], p.68). On met en évidence cet isomorphisme en faisant agir \mathfrak{A}_4 par permutation des sommets, ce qui montre que l'ordre de G est 12. De plus on connaît très bien la structure de \mathfrak{A}_4 . Il y a quatre classes de conjugaison (cf. [4], proposition 1 pour $n = 4$) :

Caractère / Classe	$\overline{I_2}$ (1)	$-\overline{I_2}$ (1)	$\overline{R'^{\frac{n}{2}}}$ (2)	$\overline{S'}$ (n)	$\overline{R'S'}$ (n)	$\overline{R'^h}$ (2)	$-\overline{R'^h}$ (2)
χ_0	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1 = \chi_V$	2	-2	0	0	0	$2 \cos\left(\frac{h\pi}{n}\right)$	$-2 \cos\left(\frac{h\pi}{n}\right)$
χ'_0	1	1	1	-1	-1	1	1
χ_k ($2 \leq k \leq n$)	2	$(-1)^k \times 2$	0	0	0	$2 \cos\left(\frac{kh\pi}{n}\right)$	$(-1)^k \times 2 \cos\left(\frac{kh\pi}{n}\right)$
χ_{n+1}	1	-1	0	1	-1	$(-1)^h \cos\left(\frac{h\pi}{n}\right)$	$(-1)^{h+1} \cos\left(\frac{h\pi}{n}\right)$
χ'_{n+1}	1	-1	0	-1	1	$(-1)^h \cos\left(\frac{h\pi}{n}\right)$	$(-1)^{h+1} \cos\left(\frac{h\pi}{n}\right)$

TABLE 2 – Caractères du groupe binaire diédral pour n pair (h varie de 1 à $\frac{n}{2} - 1$).

- 1 éléments d'ordre 1 : $\overline{I} = \{1\}$;
- 3 éléments d'ordre 2 : $\overline{(1\ 2)(3\ 4)} = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$;
- 4 éléments d'ordre 3 : $\overline{(1\ 2\ 3)} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$;
- 4 autre éléments d'ordre 3 : $\overline{(2\ 3\ 4)} = \{(1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4)\}$.

Le groupe \mathfrak{A}_4 est de plus engendré par $(1\ 3\ 4)$ et $(2\ 3\ 4)$. Avec les axes sur la figure [FIGURE], le groupe G est engendré par R_1 et R_2 , les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 . La rotation R_1 (resp. R_2) correspond au 3-cycle $(2\ 3\ 4)$ (resp. $(1\ 3\ 4)$).

On note $\{-R'_1, R'_1\}$ (resp. $\{-R'_2, R'_2\}$) l'image réciproque de R_1 (resp. R_2) par φ , avec R'_1 (resp. R'_2) d'ordre 6 et $-R'_1$ (resp. $-R'_2$) d'ordre 3.

Les classes \overline{I} , $\overline{R_1}$ et $\overline{R_2}$ se scindent en deux classes contenant autant d'éléments que la classe image lorsqu'on les relève par φ , car leurs éléments ne sont pas d'ordre deux, et donc leurs images réciproques par φ ne sont pas conjuguées.

La dernière classe à remonter est celle des éléments d'ordre 2, qui est égale à $\overline{R_1 R_2}$. On montre que $R'_1 R'_2$ et $-R'_1 R'_2$ sont conjugués dans $\varphi^{-1}\langle G \rangle = \tilde{G}$. Quitte à changer de base on peut supposer :

$$R'_1 R'_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(R'_1 R'_2) = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait de plus que $R_1 R_2$ est associé à la permutation $(1\ 4)(2\ 3)$, ce qui permet de trouver la base $\mathcal{B} = (\Delta''', \Delta'', \Delta')$, représentée figure 3, correspondant à l'écriture de $R_1 R_2$ dans l'expression précédente. Enfin :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

il suffit donc de voir que cette matrice est la matrice d'un élément de G écrit dans la base \mathcal{B}' , ce qui est le cas : elle est associée à la permutation $(1\ 2)(3\ 4)$. On constate donc, avec la proposition 1.3, que la classe des éléments d'ordre deux ne se scinde pas, et contient deux fois plus d'éléments que sa classe image.

Finalement, on a 7 classes de conjugaison dans \tilde{G} , et \tilde{G} est d'ordre 24. On ordonne ces classes par un chiffre et une lettre, le chiffre correspondant à l'ordre des éléments de la classes, la lettre ordonnant les classes de même ordre.

Caractères de \tilde{G} :

On dresse le graphe de représentations de \tilde{G} relatif à la représentation $V = \mathbb{C}^2$, dont le calcul de la norme montre qu'elle est irréductible, et qui est fidèle puisque l'identité est seule dans sa classe de conjugaison. On note χ_0 le caractère trivial. On a ensuite :

$$\chi_V^2 - \chi_0 = [3; 3; 1; 0; 0; 0; 0].$$

On reconnaît là le relevé par φ du caractère χ_{SO_3} , issu de l'action naturelle de G sur \mathbb{R}^3 . On vérifie que ce caractère est irréductible, et on le nomme $\chi_2 = \varphi \circ \chi_{\text{SO}_3}$.

On calcule ensuite $\chi_2 \chi_V$, et on constate que :

$$\langle \chi_2 \chi_V \mid \chi_2 \chi_V \rangle = 3 \quad \text{et} \quad \chi_2 \chi_V(\overline{I_2}) = 6.$$

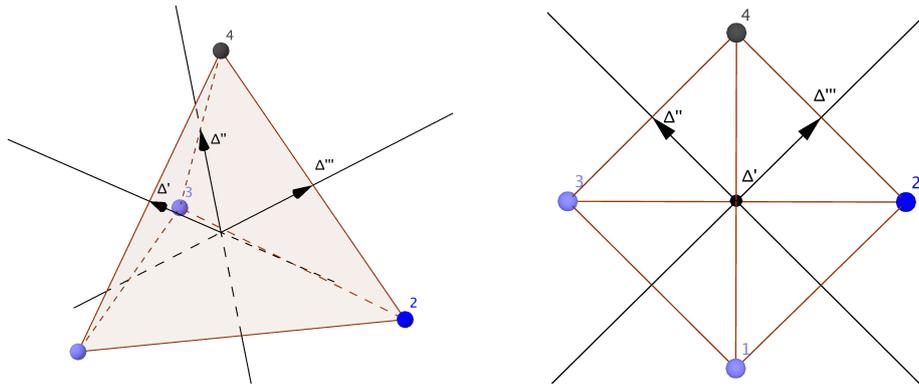


FIGURE 3 – Système d’axe $(\Delta''', \Delta'', \Delta')$ (dessins réalisés avec Geogebra 5).

Caractère / Classe	1a (1)	2a (1)	4a (6)	3a (4)	6a (4)	3b (4)	6b (4)
χ_0	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1 = \chi_V$	2	-2	0	1	-1	1	-1
χ_2	3	3	-1	0	0	0	0
χ_3	2	-2	0	j	$-j$	j^2	$-j^2$
χ'_3	2	-2	0	j^2	$-j^2$	j	$-j$
χ_4	1	1	1	j	j	j^2	j^2
χ'_4	1	1	1	j^2	j^2	j	j

TABLE 3 – Caractères du groupe binaire tétraédrique ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

Cela montre que $\chi_2\chi_V$ est somme de trois caractères irréductibles. De plus $\langle \chi_2\chi_V | \chi_V \rangle = 1$, donc il suffit de décomposer $\chi_2\chi_V - \chi_1$ en somme de deux caractères irréductibles. On pose :

$$\chi_3 = [2; -2; 0; j; -j; j^2; -j^2],$$

$$\chi'_3 = [2; -2; 0; j^2; -j^2; j; -j],$$

on vérifie alors que ces deux caractères sont irréductibles, avec :

$$\langle \chi_2\chi_V | \chi_3 \rangle = \langle \chi_2\chi_V | \chi'_3 \rangle = 1.$$

Reste encore à calculer deux caractères irréductibles. On a :

$$\chi_V\chi_3 = [4; 4; 0; j; j; j^2; j^2].$$

On calcule $\langle \chi_V\chi_3 | \chi_2 \rangle = 1$, il reste donc un caractère linéaire à trouver, qu’on note χ_4 . Il est égal à $\chi_V\chi_3 - \chi_2$.

Les calculs sont identiques pour $\chi_V\chi'_3$, et on trouve un nouveau caractère linéaire χ'_4 . Les valeurs des caractères sont reportées dans la table 3. On obtient alors le graphe de représentations figure 4.

3.3.2 Groupe binaire octaédrique

Classes de conjugaison de \tilde{G} :

Soit G un sous-groupe fini de SO_3 isomorphe au groupe d’isométries directes d’un cube. Alors G est isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_4 par son action sur les grandes diagonales du cube, que l’on note \mathcal{D}_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$, représentées figure 5 (cf. [8], p.68).

Les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_4 sont au nombre de 5 :

- 1 élément d’ordre 1 : $\bar{I} = \{I\}$;
- 3 éléments d’ordre 2 : $\overline{(1\ 2)(3\ 4)} = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$;
- 6 éléments d’ordre 2 : $\overline{(1\ 2)} = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)\}$;

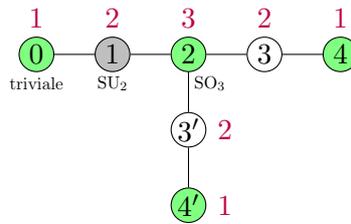


FIGURE 4 – Graphe de représentations du groupe binaire tétraédrique $\mathcal{R}_V(\tilde{G})$. Les caractères issus de G correspondent à un sommet vert. Le sommet grisé correspond à V . Les dimensions des représentations sont indiquées à côté de chaque sommet.

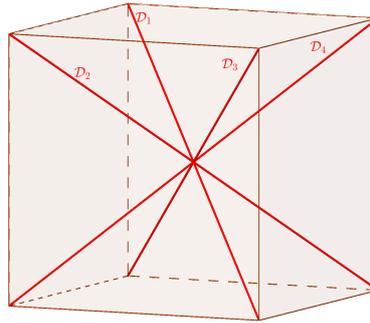


FIGURE 5 – Grandes diagonales du cube, sur lesquelles agit le groupe de symétries directes du cube.

- 8 éléments d'ordre 3 : $\overline{(1\ 2\ 3)}$, qui est la classe des 3-cycles ;
- 6 éléments d'ordre 4 : $\overline{(1\ 2\ 3\ 4)}$, qui est la classe des 4-cycles.

Le groupe \mathfrak{S}_4 est engendré par les transpositions $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ et $(3\ 4)$, donc G est engendré par trois demi-tours, que l'on note R_1 , R_2 et R_3 tels que R_1 et R_3 commutent et avec les relations :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1}.$$

Le demi-tour R_i correspond à la transposition des deux grandes diagonales \mathcal{D}_i et \mathcal{D}_{i+1} , où i est à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.

On a ainsi une description des classes de conjugaison de G . Pour $i \in \{1; 2; 3\}$, on note $\{-R'_i, R'_i\}$ l'image réciproque de R_i par φ . Pour tout i dans $\{1, 2, 3\}$ et ε dans $\{-1, 1\}$, la proposition 1.3 montre que $\varepsilon R'_i$ est d'ordre 4.

Encore une fois, toutes les classes d'éléments d'ordre différent de 2 se scindent en deux classes contenant le même nombre d'éléments que la classe image. On a donc déjà 6 classes de conjugaison :

- classes à 1 élément : $\overline{I_2}$ (ordre 1) et $\overline{-I_2}$ (ordre 2) ;
- classes à 6 éléments : $\overline{R'_1 R'_2 R'_3}$ (ordre 8) et $\overline{-R'_1 R'_2 R'_3}$ (ordre 8) ;
- classes à 8 éléments : $\overline{R'_3 R'_2 R'_1 R'_2}$ (ordre 3) et $\overline{-R'_3 R'_2 R'_1 R'_2}$ (ordre 6).

Reste à savoir si R'_1 (resp. $R'_1 R'_3$) est conjugué à son opposé dans \tilde{G} . On procède comme pour les éléments d'ordre 2 dans le cas du groupe binaire tétraédrique, puisque R'_1 (resp. $R'_1 R'_3$) joue le rôle de $R'_1 R'_2$ dans le cas du groupe binaire tétraédrique. La base donnée par les axes $(\Delta'_a, \Delta''_a, \Delta'''_a)$ (resp. $(\Delta'_b, \Delta''_b, \Delta'''_b)$) sur la figure 6 (resp. figure 7) est une base orthogonale, où chaque axe est un axe de symétrie du cube. Les rotations correspondant à ces axes sont donc codiagonalisables. Or le premier axe correspond à R'_1 (resp. $R'_1 R'_3$) et le second à $\varphi(P)$, où P est la matrice de la proposition 1.3. Ainsi, P est un élément de \tilde{G} qui conjugue R'_1 (resp. $R'_1 R'_3$) à son opposé. Ainsi les classes d'éléments d'ordre 2 ne se scindent pas lorsqu'on les remonte dans SU_2 . D'où deux classes supplémentaires :

- classe à 6 éléments : $\overline{R'_1 R'_3}$ (ordre 4) ;
- classe à 12 éléments : $\overline{R'_1}$ (ordre 4).

Finalement, on a 8 classes de conjugaison dans \tilde{G} , et \tilde{G} est d'ordre 48.

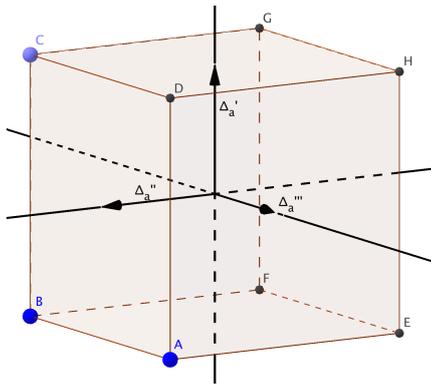


FIGURE 6 – Système d’axes montrant que R'_1 et $-R'_1$ sont conjugués dans \tilde{G} .

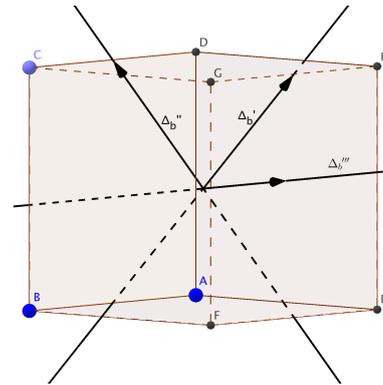


FIGURE 7 – Système d’axes montrant que $R'_1 R'_3$ et $-R'_1 R'_3$ sont conjugués dans \tilde{G} .

Caractère / Classe	1a (1)	2a (1)	4a (12)	4b (12)	6a (8)	3a (8)	8a (6)	8b (6)
χ_0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1 = \chi_V$	2	-2	0	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
χ_2	3	3	-1	-1	0	0	1	1
χ_3	4	-4	0	0	1	-1	0	0
χ_4	3	3	-1	1	0	0	-1	-1
χ'_4	2	2	2	0	-1	-1	0	0
χ_5	2	-2	0	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
χ_6	1	1	1	-1	1	1	-1	-1

TABLE 4 – Caractères du groupe binaire octaédrique.

Caractères de \tilde{G} :

On dresse le graphe de représentations de \tilde{G} relatif à la représentation $V = \mathbb{C}^2$, qui est irréductible, comme le montre le calcul de la norme de son caractère associé χ_V , et fidèle puisque le seul élément d’ordre 1 est I_2 . On note χ_0 le caractère trivial.

Le groupe G est un sous-groupe de SO_3 et agit naturellement sur \mathbb{R}^3 . On note χ_{SO_3} le caractère associé, et on vérifie que le caractère $\chi_{SO_3} \circ \varphi$ est irréductible. On le note χ_2 . On vérifie aisément que $\chi_V^2 = \chi_0 + \chi_2$. De même, $\chi_V \chi_2 - \chi_V$ est irréductible, on le note χ_3 . Les valeurs de ces quatre caractères sont reportées dans la table 4.

On a ensuite $\langle \chi_V \chi_3 | \chi_2 \rangle = 1$ et $\langle \chi_V \chi_3 - \chi_2 | \chi_V \chi_3 - \chi_2 \rangle = 2$. On doit donc trouver deux caractères irréductibles χ_4 et χ'_4 , de somme $\chi_V \chi_3 - \chi_2$. De plus, on doit avoir $\chi_4(I_2) + \chi'_4(I_2) = 5$. Cela pousse à chercher une représentation de dimension 3. On note ε le seul caractère linéaire non-trivial de G , équivalent à la signature sur \mathfrak{S}_4 , et on étudie le produit $(\varepsilon \circ \varphi)\chi_2$. Il se trouve que ce caractère est effectivement irréductible et que :

$$\langle \chi_V \chi_3 | (\varepsilon \circ \varphi)\chi_2 \rangle = 1.$$

On le nomme donc χ_4 , et on pose $\chi'_4 = \chi_V \chi_3 - \chi_2 - \chi_4$, qui est un caractère irréductible de fait, associé à une représentation de dimension 2.

Il reste deux caractères à trouver. On pose $\chi_5 = \chi_4 \chi_V - \chi_3$, et on vérifie qu’il est irréductible et associé à une représentation de dimension 2. De même, on pose $\chi_6 = \chi_5 \chi_V - \chi_4$, et on voit que χ_6 est un caractère linéaire, qui n’est autre que $\varepsilon \circ \varphi$.

On a ainsi dressé la table de caractère du groupe binaire octaédrique, et son graphe de représentations associé à la représentation V , figure 8.

3.3.3 Groupe binaire dodécaédrique

Classes de conjugaison de \tilde{G} :

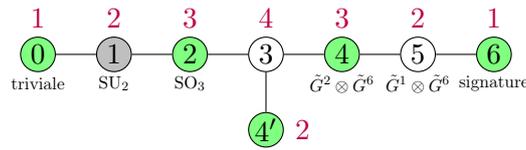


FIGURE 8 – Graphe de représentations du groupe binaire octaédrique $\mathcal{R}_V(\tilde{G})$. Les caractères issus de G correspondent à un sommet vert. Le sommet gris correspond à V . Les dimensions des représentations sont indiquées à côté de chaque sommet.

Soit G un sous-groupe fini de SO_3 isomorphe au groupe de symétries directes d'un icosaèdre régulier. Alors G est isomorphe à \mathfrak{A}_5 , par son action sur les cinq rectangles inscrits dans l'icosaèdre (cf. [8], pp.68–69). On a dans \mathfrak{A}_5 cinq classes de conjugaison (voir [4], proposition 1 dans le cas $n = 5$) :

- 1 élément d'ordre 1 : $\bar{1} = \{1\}$;
- 15 éléments d'ordre 2 : $\overline{(1\ 2)(3\ 4)}$;
- 20 éléments d'ordre 3 : $\overline{(1\ 2\ 3)}$, qui est la classe des 3-cycles ;
- 12 éléments d'ordre 5 : $\overline{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$;
- 12 éléments d'ordre 5 : $\overline{(1\ 2\ 3\ 5\ 4)}$.

Pour relever ces classes, on oublie la nature géométrique de G , en travaillant uniquement avec \mathfrak{A}_5 . Toutes les classes sauf celle des éléments d'ordre 2 se scindent en deux classes ayant le même nombre d'éléments que la classe image. On a donc déjà 8 classes :

- classe $1a$ à 1 élément d'ordre 1 ;
- classe $2a$ à 1 élément d'ordre 2 ;
- classe $3a$ à 20 éléments d'ordre 3 ;
- classe $6a$ à 20 éléments d'ordre 6 ;
- classes $5a$ et $5b$ à 12 éléments d'ordre 5 ;
- classes $10a$ et $10b$ à 12 éléments d'ordre 10.

Reste à relever la classe des éléments d'ordre 2. Pour savoir si cette classe se scinde en deux classes ou non, on utilise de l'arithmétique élémentaire. En effet, notant $\{\chi_i\}_{i \in \Lambda(\tilde{G})}$ l'ensemble des caractères irréductibles de G , on a :

$$|\tilde{G}| = \sum_{i \in \Lambda(\tilde{G})} (\dim \tilde{G}^i)^2 = \sum_{i \in \Lambda(\tilde{G})} \chi_i(\mathbf{I}_2)^2 \quad (**).$$

Or on sait qu'on a soit 9 soit 10 caractères irréductibles, et on a ceux issus de \mathfrak{A}_5 , qui sont au nombre de 5. La table de caractères de \mathfrak{A}_5 est donnée dans la table 5. Elle est obtenue simplement, puisqu'on a déjà la représentation triviale, la représentation standard, et deux représentations sur \mathbb{R}^3 , la première via le plongement dans SO_3 et la seconde en faisant agir le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ sur le caractère de la première représentation. On en déduit le dernier caractère χ_3 par orthonormalité des lignes de la table de caractères. On vérifie aisément que tous ces caractères sont irréductibles.

On a de plus la représentation sur \mathbb{C}^2 de \tilde{G} , et une seconde représentation est donnée en faisant agir le groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ sur le caractère de cette représentation. On vérifie que les deux caractères obtenus sont différents et irréductibles, donnant deux représentations de dimension 2. On a donc déjà sept représentations irréductibles de \tilde{G} , sur 9 ou 10. L'ordre de \tilde{G} est $120 = 2|\mathfrak{A}_5|$, et $(**)$ donne donc :

$$120 = \underbrace{1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}_{\text{issus de } \mathfrak{A}_5} + \underbrace{2^2 + 2^2}_{\text{issus de } \mathbb{C}^2} + x^2 + y^2 + z^2,$$

où les inconnues x , y et z sont les dimensions des représentations irréductibles restantes, donc des entiers, avec z éventuellement nul. Cette équation se réduit à :

$$52 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Le plus simple consiste à tester des combinaisons d'entiers pas trop gros, en respectant l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^3 , même s'il existe des théorèmes généraux quant aux décompositions d'un entier en somme de deux ou trois carrés. On constate que la seule solution est $(x, y, z) = (6, 4, 0)$ et donc la classe des éléments d'ordre deux ne se scinde pas et donne lieu à une classe à 30 éléments que l'on note $4a$.

Caractère / Classe	$\bar{1}$ (1)	$(\bar{1} 2)(3 4)$ (15)	$(\bar{1} 2 3)$ (20)	$(\bar{1} 2 3 4 5)$ (12)	$(\bar{1} 2 3 5 4)$ (12)
χ_0	1	1	1	1	1
χ_{std}	4	0	1	-1	-1
χ_{SO_3}	3	-1	0	φ	φ^*
χ'_{SO_3}	3	-1	0	φ^*	φ
χ_3	5	1	-1	0	0

TABLE 5 – Caractères de \mathfrak{A}_5 ($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi^* = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Caractère / Classe	1a (1)	2a (1)	3a (20)	4a (30)	6a (20)	5a (12)	10a (12)	5b (12)	10b (12)
χ_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_1 = \chi_V$	2	-2	0	-1	0	$-\varphi$	φ	$-\varphi^*$	φ^*
χ_2	3	3	0	-1	0	φ	φ	φ^*	φ^*
χ_3	4	-4	1	0	-1	-1	1	-1	1
χ_4	5	5	-1	1	-1	0	0	0	0
χ_5	6	-6	0	0	0	1	-1	1	-1
χ_6	4	4	1	0	1	-1	-1	-1	-1
χ'_6	3	3	0	-1	0	φ^*	φ^*	φ	φ
χ_7	2	-2	-1	0	1	$-\varphi^*$	φ^*	$-\varphi$	φ

TABLE 6 – Caractères du groupe binaire dodécaédrique ($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi^* = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Caractères de \tilde{G} :

On dresse le graphe de représentations de \tilde{G} par rapport à la représentation $V = \mathbb{C}^2$, qui est l'action naturelle de \tilde{G} . On vérifie qu'elle est irréductible et fidèle.

On a déjà 7 caractères irréductibles : cinq qui sont obtenus par \mathfrak{A}_5 , et deux caractères de dimension 2. Ces caractères sont détaillés dans la table 6. On calcule le graphe de représentations de façon similaire aux cas des groupes binaires tétraédriques et octaédriques. Les calculs ne sont pas détaillés ici, mais le graphe est donné figure 9.

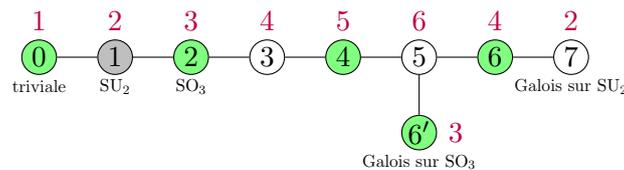


FIGURE 9 – Graphe de représentations du groupe binaire dodécaédrique $\mathcal{R}_V(\tilde{G})$. Les caractères issus de G correspondent à un sommet vert. Le sommet gris correspond à V . Les dimensions des représentations sont indiquées à côté de chaque sommet.

4 Conclusion

On a ainsi établi un premier pan de la *correspondance de McKay*. Cependant, pour comprendre ce que sont ces graphes associés aux sous-groupes finis de SU_2 , il est nécessaire d'étudier les *groupes de Coxeter finis*, qui sont les groupes engendrés par un nombre fini de réflexions dans un espace euclidien. C'est ce qui est fait dans les quatre premiers chapitres de [6]. On constate alors qu'on peut classifier les groupes de Coxeter finis par des graphes appelés graphes de Dynkin, et que certains de ces graphes se trouvent être, modulo un sommet, les graphes de représentations des sous-groupes finis de SU_2 .

Or à chaque groupe de Coxeter fini est associé des invariants numériques appelés *exposants*. L'article de Georgia Bernkart [3] consiste à utiliser ces invariants pour étudier les marches aléatoires sur les graphes de représentations des sous-groupes finis de SU_2 , ce qui revient à étudier la multiplicité des différentes représentations irréductibles dans la décomposition en représentations irréductibles des produits tensoriels successifs d'une représentation donnée — ici la représentation naturelle sur \mathbb{C}^2 .

Références

- [1] <http://theoriedesgroupes.perso.sfr.fr/cours/diedraux.pdf>.
- [2] Sous-groupes finis de $\text{so}(3)$. *MMFAI*, Cours d'Algèbre 1, 2000.
- [3] Georgia BENKART. Poincaré series for tensor invariants and the mckay correspondence. *Advances in Mathematics*, 290(20160226) :236–259, 2015.
- [4] Michel CRETIN. Classes de conjugaison des groupes alternés. (UCBL, préparation à l'agrégation de mathématiques).
- [5] Pierre DE LA HARPE. *Représentation des groupes finis*. Université de Genève, février 2006.
- [6] James E. HUMPHREYS. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1990.
- [7] Serge LANG. *Algebra, 3rd edition*. Springer.
- [8] Christophe MOUROUGANE. *Théorie des groupes et géométrie*. Cours de l'Université de Rennes 1, 2010.
- [9] Frédéric PAULIN. *Géométrie différentielle élémentaire*. Cours de première année de mastère, École Normale Supérieure, 2006—2007.
- [10] Frédéric PAULIN. *Introduction aux groupes de Lie pour la physique*. Cours de troisième année de l'École Centrale Paris, 2015—2016.