

INTRODUCTION AUX ALGÈBRES SIMPLES CENTRALES ET À LA COHOMOLOGIE GALOISIENNE

P. GILLE

Les algèbres simples centrales sont des algèbres ressemblant beaucoup aux algèbres de matrices et qui interviennent un peu partout, en arithmétique, en théorie des représentations ... La plus connue est sans doute l'algèbre des quaternions d'Hamilton qui donne lieu à de nombreuses constructions géométriques. Étant donné un corps de base k , il est naturel de chercher à classifier les algèbres simples centrales de centre k et d'en étudier les propriétés (e.g. sous-objets, décomposabilité, etc.). Au delà des petites dimensions ou de corps remarquables (e.g. corps locaux), on est encore très éloigné d'une compréhension satisfaisante. Ceci étant, R. Brauer a établi un lien capital entre les algèbres simples centrales et la cohomologie des groupes de Galois. Ce lien a été renforcé par le théorème de Merkurjev-Suslin en 1981. La première partie du cours portera sur la théorie classique des algèbres simples centrales. La seconde partie sera dévolue à la cohomologie des groupes et à la cohomologie galoisienne (cas d'un groupe de Galois absolu), théorie due à Serre/Tate [2]. Le but du cours sera la théorie du groupe de Brauer, c'est-à-dire la classification des algèbres simples centrales au moyen du groupe de cohomologie $H^2(k, \mathbb{G}_m)$. Il s'agit donc essentiellement des quatre premiers chapitres du livre [1]. Nous discuterons en particulier le cas des corps locaux et globaux en lien avec les autres cours.

Programme

Le cours aura lieu à l'ENSL, au 4-ième étage, salle A1, de 13h45 à 16h. Le programme prévisionnel est le suivant.

Lundis 16 janvier (exceptionnellement salle Lilas), 13 février.

Mercredis : 11, 18, 25 janvier, 1, 8, 15 février, 1, 8, 15, 22 mars.

RÉFÉRENCES

- [1] P. Gille, T. Szamuely, Central simple algebras and Galois cohomology, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 101 (2006), Cambridge University Press.
- [2] J.P. Serre, Cohomologie galoisienne, cinquième édition, révisée et complétée, Lecture Notes in Math. 5, Springer-Verlag.

- [3] A.A. Albert, Structure of Algebras, AMS Colloquium Publications Volume 24.
 - [4] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, PUF.
 - [5] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre 8, nouvelle édition, Springer [lien](#).
 - [6] P. K. Draxl, Skew Fields, Cambridge University Press.
 - [7] D. Harari, Cohomologie galoisienne et théorie du corps de classes, CNRS Éditions.
 - [8] D. Mumford, What's so Baffling About Negative Numbers? a Cross-Cultural Comparison, [lien](#).
 - [9] J.P. Serre, Corps locaux, Hermann.
 - [10] B. L. van der Waerden, History of Algebra, Springer.
-