Introduction à la géométrie algébrique dérivée

1 D'où sort la géométrie algébrique dérivée ?

Voici trois situations classiques on l'on voit apparaître des phénomènes dérivés :

(i). La théorie de l'intersection, et plus précisément la formule de Serre pour la multiplicité d'intersection. Rappelons cette formule dans un cas particulier :

Soit X un schéma lisse sur un corps algébriquement clos k, soient Y_1, Y_2 deux sous-variétés de dimensions complémentaires dans X. On suppose que l'intersection $Y_1 \cap Y_2$ est propre, c'est-à-dire de dimension 0. On voudrait définir le produit d'intersection $Y_1 \cdot Y_2$, qui doit être un 0-cycle algébrique sur X à support contenu dans $Y_1 \cap Y_2$.

Soit $z \in Y_1 \cap Y_2$ un k-point. La formule naïve pour la multiplicité de z dans $Y_1 \cdot Y_2$ est la longueur (ou la dimension sur k) de l'anneau Artinien $\mathscr{O}_{Y_1,z} \otimes_{\mathscr{O}_{X,z}} \mathscr{O}_{Y_2,z}$, mais cette formule ne se comporte pas bien (en particulier, elle ne passe aux classes modulo l'équivalence rationnelle). La formule correcte, découverte par Serre, est

$$\mu(z; Y_1 \cdot Y_2) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k \mathrm{Tor}_i^{\mathscr{O}_{X,z}}(\mathscr{O}_{Y_1,z}, \mathscr{O}_{Y_2,z}).$$

Cette formule n'a pas d'interprétation géométrique dans le cadre classique. Une des motivations de la géométrie algébrique dérivée est de donner un sens à l'intersection dérivée de Y_1 et Y_2 (ou au produit tensoriel dérivé $\mathscr{O}_{Y_1,z} \otimes^L_{\mathscr{O}_{X,z}} \mathscr{O}_{Y_2,z}$ dans une catégorie d'anneaux généralisés), de sorte à ce que la multiplicité de Serre soit juste une sorte de caractéristique d'Euler-Poincaré.

(ii). Le complexe cotangent (et son rapport avec la théorie des déformations) : Si $A \to B \to C$ sont des morphismes d'anneaux commutatifs, on a une suite exacte de C-modules bien connue

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{C/A} \to \Omega^1_{C/B} \to 0.$$

Cette suite n'est pas exacte à gauche en général, ce qui suggère qu'on devrait pouvoir définir des foncteurs dérivés (à gauche) de Ω^1 (dans un sens convenable) pour obtenir une suite exacte longue.

C'est ce que fait Illusie dans sa thèse, en définissant complexe cotangent $\mathbb{T}_{B/A}$ d'un morphisme quelconque d'anneaux commutatifs $A \to B$, qui est un complexe (homologique) de B-modules concentré en degrés ≥ 0, dont le H_0 s'identifie à $\Omega^1_{B/A}$. Si $A \to B \to C$ sont deux morphismes comme avant, on a triangle distingué (donnant lieu à une suite exacte longue en homologie qui prolonge la suite exacte ci-dessus) :

$$\mathbb{T}_{B/A} \otimes^L_B C \to \mathbb{T}_{C/A} \to \mathbb{T}_{C/B} \stackrel{+1}{\to} .$$

Cette construction a de bonnes propriétés, mais pas dans la généralité qu'on voudrait. Par exemple, la formation de $\mathbb{T}_{B/A}$ ne commute qu'aux changements de bases propres (sur A), et, si les termes de bas degré de $\mathbb{T}_{B/A}$ s'interprétent bien en termes de déformations infinitésimales de B au-dessus de A, on n'a pas a priori d'interprétation géométrique des termes de plus haut degré. En revanche, si on pousse la logique de dérivation jusqu'au bout, en définissant $\mathbb{T}_{B/A}$ pour tout morphisme $A \to B$ d'anneaux commutatifs "dérivés" (c'est-à-dire, comme nous le verrons, d'anneaux commutatifs simpliciaux), alors ces deux problèmes disparaissent, et en fait $\mathbb{T}_{B/A}$ est simplement le fibré cotangent au sens dérivé du morphisme de schémas dérivés $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

(iii). Le principe de lissité cachée de Beilinson, Deligne, Drinfeld et Kontsevich : L'idée est que certains espaces de modules qui ont d'horribles singularités ne sont que les tronqués d'"espaces de modules dérivés" beaucoup plus beaux (c'est-à-dire localement d'intersection complète au sens dérivé). Ce principe s'applique par exemple à l'espace de module des systèmes locaux sur une courbe complexe, ou à celui des fibrés vectoriels sur un schéma de dimension ≥ 2, ou à certains foncteurs de déformations de représentations galoisiennes avec des conditions locales.

2 Retour sur terre

Concrètement, la géométrie algébrique dérivée consiste à essayer de faire de la géométrie algébrique en remplaçant la catégorie des anneaux commutatifs par une catégorie plus générale d'anneaux "dérivés", qui peut être la catégorie des anneaux topologiques commutatifs ou celle des anneaux simpliciaux commutatifs (comme nous le verrons, ces deux points de vue sont essentiellement équivalents).[1] [2] Cela permet de remplacer un certain nombre de foncteurs comme $\otimes$ ou Ω^1 ou de problèmes de modules par des versions dérivées qui ont de meilleurs propriétés

[1] On peut faire encore plus général, mais je n'en parlerai pas.

[2] Si on se place au-dessus d'un corps K de caractéristique 0, on peut aussi utiliser la catégorie des K-algèbres différentielles graduées, mais cette catégorie n'a plus les propriétés attendues en caractéritique strictement positive ou mixte.

d'exactitude. (En fait, cela oblige à le faire, car les foncteurs non dérivés n'ont plus de sens raisonnable.)

Je commencerai donc par faire des "rappels" sur les ensembles simpliciaux et leurs divers emplois (équivalence de Quillen avec les espaces topologiques, correspondance de Dold-Kahn, nerf d'une catégorie etc), les catégories de modèles, les anneaux simpliciaux et le complexe cotangent. Ceci permettra déjà d'introduire quelques exemples de problèmes de modules dérivés.

Pour définir les schémas[3] dérivés, on peut comme dans le cas classique, choisir entre deux points de vue :

(i). Si A est un anneau simplicial/topologique, on voit $\operatorname{Spec} A$ comme l'espace topologique (pas dérivé) $\operatorname{Spec}(\pi_0(A))$, muni d'un faisceau en anneaux simpliciaux/topologiques défini de la manière habituelle à partir de A. Alors un schéma dérivé est un espace topologique muni d'un faisceau en anneaux simpliciaux/topologiques qui est localement isomorphe à $\operatorname{Spec}(A)$. Le plus difficile est de définir la notion d'isomorphisme et surtout de donnée de recollement, car en fait on ne s'intéresse aux faisceaux d'anneaux topologiques/simpliciaux qu'à homotopie près.

(ii). On peut aussi voir $\operatorname{Spec}(A)$ (pour A un anneau simplicial/topologique) comme le foncteur $\operatorname{Hom}(., A)$ sur la catégorie des anneaux simpliciaux/topologiques, et dire que les schémas (ou champs) dérivés sont des "faisceaux" sur cette catégorie qui sont localement de la forme $\operatorname{Spec}(A)$. Évidemment, il faut alors répondre à la question "des faisceaux en quoi ?"[4] et exprimer correctement la condition de recollement. On retombe donc sur le même genre de problèmes que dans (i).

Dans les deux cas, le cadre le plus naturel semble être celui des $(\infty, 1)$-catégories.[5] Il faut donc falloir expliquer ce que sont ces objets, et ensuite on pourra définir les schémas dérivés assez facilement.

Après, le but sera d'introduire le plus d'exemples possible, et de voir à quoi ressemble une preuve de représentabilité d'espace de modules ou un calcul de complexe (co)tangent dans le cadre dérivé. On essaiera aussi de comprendre les résultats de la thèse de Lurie (cf `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG.pdf`), en particulier les critère de Schlessinger et théorème de représentabilité d'Artin dérivés.

3 Prérequis et références

Le prérequis principal est la géométrie algébrique non dérivée. Avoir déjà vu un foncteur et une catégorie dérivée (dans le cadre des catégories abéliennes) ne peut pas faire de mal.

[3] ou, soyons fous, les champs
[4] Certainement pas en ensembles, ni même en groupoïdes.
[5] Désolée.

Références (liste sans aucune prétention à l'exhaustivité) :

- Un fil conducteur lâche : la thèse de Lurie, `http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/DAG.pdf`.
- Une introduction à la géométrie algébrique dérivée par un vrai spécialiste : Toën, *Derived algebraic geometry*, `https://arxiv.org/abs/1401.1044`
- Algèbre homologique : Weibel, *An introduction to homological algebra*, `https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1269324`
- Ensembles simpliciaux : Goerss et Jardine, *Simplicial homotopy theory*, `https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1711612`
- Catégories de modèles : Hovey, *Model categories*, `https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1650134`
- Anneaux simpliciaux (et beaucoup d'autres choses) : Gillam, *Simplicial methods in algebra and algebraic geometry*, et bien sûr Illusie, *Complexe cotangent et déformations*, `https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=491680` `http://www.math.boun.edu.tr/instructors/wdgillam/simplicialalgebra.pdf`
- $(\infty, 1)$-catégories : Les deux pavés de Lurie, *Higher topos theory* (`http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HTT.pdf`) et *Higher algebra* (`http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf`)
- Anneaux de déformation dérivés : Galatius et Venkatesh, *Derived Galois deformation rings*, `https://arxiv.org/abs/1608.07236`