Câteva aspecte geometrice ale cuaternionilor și ale octonionilor

Philippe GILLE

CNRS (Lyon) și IMAR (București)

IMAR, București
14 octombrie 2015

Numerele complexe

- Notăm $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$ corpul commutativ al numerilor complexe.

- Conjugarea complexă este unicul $\mathbb{R}$-automorfism netrivial al corpului $\mathbb{C}$.

- Fie $N(z) = z\,\overline{z} = x^2 + y^2$, adică norma lui $z = x + iy$. Avem $N(1) = 1$ și
$$N(z_1\, z_2) = N(z_1)\, N(z_2).$$

- Norma este o formă pătratică multiplicativă.

Proprietăți geometrice

- Deci avem un mod de a înmulți punctele planului $\mathbb{R}^2$. Acest lucru se poate face prin descompunera polară $z = r\exp(i\theta)$.

- Cercul unitate $S^1 = \{z \mid N(z) = 1\}$ este un grup topologic comutativ, de fapt un grup Lie (compact).

- Acest punct de vedere geometric este extrem de folositor în geometria plană, via un dicționar algebrico-geometric.

- Exemplul 1 : Punctele z_1, z_2, z_3 sunt aliniate dacă și numai dacă produsul $(z_2 - z_1)\overline{(z_3 - z_1)}$ este un număr real.

- Exemplul 2 : Fiind date patru puncte z_1, z_2, z_3, z_4, avem $(z_1\, z_2) \perp (z_3\, z_4)$ dacă și numai dacă $(z_2 - z_1)\overline{(z_3 - z_4)}$ este un număr imaginar pur.

Dimensiunea trei

- O întrebare fundamentală este următoarea : există o generalizare pentru spațiul $\mathbb{R}^3$?
- Există o structură de $\mathbb{R}$–algebră (asociativă) pe $\mathbb{R}^3$ care este o extindere a lui $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ și echipată cu o normă multiplicativă, $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, care satisface $N(1) = 1$?
- Mai precis, dorim ca N să fie o formă pătratică pozitiv definită care satisface $N(1) = 1$ și $N(z_1\, z_2) = N(z_1)\, N(z_2)$.
- Răspunsul este NU și sunt mai multe moduri de a justifica acest lucru.

Formele pătratice multiplicative în sensul tare

- Fie $Q(X) = Q(X_1, \dots, X_n)$ o formă pătratică, adică un polinom omogen de grad doi.

- Zicem că Q este multiplicativă în sensul tare dacă e regulată (i.e. cu discriminantul inversabil) și există polinoamele P_1, ..., P_n în $2n$ variabile astfel încât

$$Q(X) \times Q(Y) = Q\Big(P_1(X,Y), P_2(X,Y), \dots, P_n(X,Y)\Big).$$

- De exemplu, $Q = X_1^2 + X_2^2$ este multiplicativă în sensul tare pentru că $(X_1^2 + X_2^2) \times (Y_1^2 + Y_2^2) = (X_1Y_1 - X_2Y_2)^2 + (X_1Y_2 + X_2Y_1)^2$.

- (Lagrange, 1770). Forma $Q = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$ este multiplicativă în sensul tare.

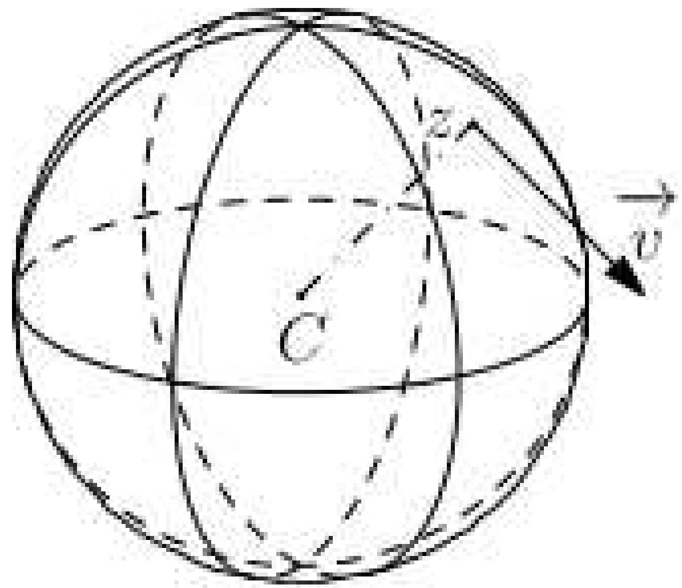
- Teoremă (Hurwitz, 1898). O formă pătratică multiplicativă în sensul tare este de dimensiune $1, 2, 4$ sau 8.

Joseph-Louis Lagrange

Adolf Hurwitz

Înapoi la dimensiunea trei

- Nu este posibil atunci sa definim o structură de algebră peste $\mathbb{R}^3$ cu o formă pătratică multiplicativă în sensul tare.
- Mai exist un alt motiv, care este de natură topologică. Presupunem că există o astfel de structură pe $\mathbb{R}^3$.
- Atunci sfera
$$S_N = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 \mid N(z) = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$
este echipată cu o structură de grup Lie (care provine din înmulțirea algebrei).
- Notăm cu T fibratul tangent al sferei S_N, i.e.
$$T = \left\{ (z, v) \in S_N \times \mathbb{R}^3 \mid \langle z, v \rangle_N = 0 \right\}.$$



$$T = \left\{ (z,v) \in S_N \times \mathbb{R}^3 \mid \langle z, v \rangle_N = 0 \right\} = \bigcup_{z \in S^2} T_z,$$

unde T_z este planul tangent la sferă în punctul z.

Rezumatul etapei

- Teorema ariciului spune că sfera S^2 nu este paralelizabilă, adică nu există un izomorfism de fibrați vectoriali $S_N \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} T$ (Brouwer, 1912).
- Atunci S_N nu poate fi echipată cu o structură de grup Lie. Rezultă că nu există o structură de $\mathbb{R}$–algebră interesantă pe $\mathbb{R}^3$.
- Este natural să determinăm dimensiunile pentru care fibratul tangent al sferei S^n este paralelizabil.
- Teoremă (Kervaire, Bott-Milnor, 1958) : Sferele S^1, S^3 și S^7 sunt singurele sfere paralelizabile.
- Aceasta dă un alt mod de a înțelege că singurele dimensiuni eligibile pentru a echipa $\mathbb{R}^d$ cu o structură de algebră interesantă sunt $d = 1, 2, 4, 8$. Argumentul precedent funcționează și în cazul neasociativ.

Înapoi la 1843

- Hamilton a definit în 1843 structura cuaternionică pe $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$.
- Avem $i^2 = j^2 = -1$ și $ij = -ji = k$.
- Conjugatul cuaternionului $q = x + yi + zj + tij$ este $\overline{q} = x - yi - zj - tij$.
- Avem $q\,\overline{q} = \overline{q}q = N(q) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
- Norma cuaternionică este multiplicativă și explică formulele lui Lagrange.
- Sfera S^3 este echipată cu o structură de grup Lie ; avem $S^3/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} SO(3)$.

Proprietățile cuaternionilor

- Algebra cuaternionilor al lui Hamilton, notată cu $\mathbb{H}$, este asociativă, dar nu și comutativă .
- Peste cuaternioni se pot face și algebre lineare, și geometrie. Aceasta din urmă are un rol deosebit în fizica matematică.
- Exercițiul 1 : Cuaternionii q_1, q_2, q_3 sunt aliniați dacă și numai dacă $(q_2 - q_1)\,\overline{(q_3 - q_1)}$ este real.
- Exercițiul 2 : Fiind dați patru cuaternioni q_1, q_2, q_3, q_4, avem $(q_1\, q_2) \perp (q_3\, q_4)$ dacă și numai dacă $(q_2 - q_1)\,\overline{(q_3 - q_4)}$ este un imaginar pur.
- Cuaternioni sunt și foarte utili la prelucrarea informațiilor, de exemplu teoria "Space Time Coding" (F. Oggier) sau transformata Fourier cuaternionică.

Octonioni

- Putem itera construcția lui Hamilton. Este exact ce au facut în mod independent Cayley și Graves în același an, 1843.
- Algebra octonionilor a lui Cayley-Graves $\mathbb{O}$ este $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}a$ cu următoarea înmulțire :

$$(x + ya) \cdot (u + va) = (xu - \overline{v}y) + (vx + y\overline{u})a.$$

- Conjugarea este dată de $\overline{x + ya} = \overline{x} - ya$, iar norma de

$$N_{\mathbb{O}}(x + ya) = (x + ya)\,\overline{(x + ya)} = N_{\mathbb{H}}(x) + N_{\mathbb{H}}(y).$$

- Ca și formă pătratică , $N_{\mathbb{O}}$ este suma a 8 pătrate.
- Algebra $\mathbb{O}$ nu este asociativă, dar satisface proprietatea de alternativitate :

$$(c_1\, c_2)\, c_1 = c_1\, (c_2\, c_1), \quad c_1\, (c_1\, c_2) = c_1^2\, c_2, \quad (c_1\, c_2)\, c_2 = c_1\, c_2^2.$$

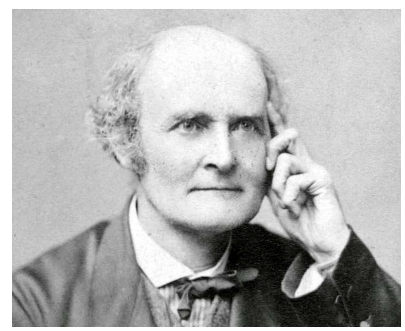
Octonioni

- Argumente topologice explică și de ce octonionii Cayley-Graves nu sunt asociativi. Știm că sfera S^7 nu poate fi echipată cu o structură de grup Lie (Samelson, 1940).
- 

  William Rowan Hamilton

  John T. Graves

  Arthur Cayley

Algebre de compoziție

- Corpul $\mathbb{C}$, cuaternionii $\mathbb{H}$ și octonionii $\mathbb{O}$ sunt anumite cazuri particulare ale unei notiuni mai generale, cea de algebre de compoziție (Hurwitz).
- Fie R un inel comutativ unitar cu $2 \in R^\times$, de exemplu un corp k de caracteristică impară. O R–algebră unitară C este **de compoziție** dacă satisface următoarele proprietați :
- (1) R–modulul C este proiectiv de tip finit (de exemplu liber, i.e. $C = R^n$).
- (2) Există o normă $C \to R$, care este o formă pătratică regulată și multiplicativă :

$$N(1) = 1 \text{ și } N(c_1\, c_2) = N(c_1)\, N(c_2) \text{ pentru } \; c_1, c_2 \in C.$$

- Norma este unică ; pentru o R–algebră C, o singură structură de algebră de compoziție este posibilă.

Exemple de algebre de compoziție

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ și $\mathbb{O}$ sunt $\mathbb{R}$-algebre de compoziție. Sunt singurele dacă cerem norma să fie pozitiv definită. Ce se întâmplă peste $\mathbb{C}$?

- Avem $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ cu $N((z_1, z_2)) = z_1\, z_2$ și algebra matricelor $M_2(\mathbb{C})$, unde norma este determinantul. Pe de alte parte avem un izomorfism $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{C})$.

- În dimensiune 8, singura algebră este algebra vectorilor Zorn ; este izomorfă cu $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ și poate fie construită prin procedura de dublare Cayley-Dickson aplicată lui $M_2(\mathbb{C})$.

- Clasificarea algebrelor de octonioni peste un corp este o temă clasică de algebră la care ne vom întoarce mai târziu.

- Clasificarea peste un inel R (de exemplu un inel de polinoame sau un inel de polinoame Laurent) este o temă de cercetare.

Cuaternionii peste un corp k

- Prin definiție, sunt algebrele de compoziție de dimensiune 4.
- În termeni concreți, știm că o astfel de algebră admite o prezentare $Q = (a,b) = k \oplus k\,i \oplus k\,j \oplus k\,ij$ cu relațiile
$$i^2 = a,\ j^2 = b \text{ și } ij + ji = 0$$
unde $a, b \in k^\times$.
- Involuția canonică σ_Q este dată de
$$\overline{x + y\,i + z\,j + w\,ij} = x - y\,i - z\,j - w\,ij,$$
iar norma este dată de $N(q) = q\overline{q}$,
$$N_Q(x + y\,i + z\,j + w\,ij) = x^2 - a\,y^2 - b\,z^2 + ab\,w^2.$$
- Forma pătratică N_Q este izometrică cu forma diagonală $\langle 1, -a, -b, ab\rangle = \langle 1, -a\rangle \otimes \langle 1, -b\rangle$.

Cuaternioni peste un corp, II

- Forma pătratică N_Q este izometrică cu forma diagonală $\langle 1, -a, -b, ab \rangle = \langle 1, -a \rangle \otimes \langle 1, -b \rangle$.

- Pentru $a_1, ..., a_n \in k^\times$, notăm cu $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \langle 1, -a_2 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$, forma Pfister de dimensiune 2^n.

- Teoremă (Witt) : Algebra $Q = (a, b)$ este izomorfă cu $Q' = (a', b')$ dacă și numai dacă formele pătratice $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ și $\langle\langle a', b' \rangle\rangle$ sunt izometrice.

- În cazul $k = \mathbb{R}$ rezultă că $M_2(\mathbb{R})$ și $\mathbb{H}$ sunt singurele $\mathbb{R}$–algebre de cuaternioni.

Octonioni peste un corp

- Prin definiție sunt algebrele de compoziție de dimensiune 8.
- Van der Blij/Springer au arătat că o algebră de octonioni C este determinată de N_C.
- Peste corpul $\mathbb{R}$, singurele algebre de octiononi sunt $\mathbb{O}$ și $\mathrm{Zorn}(\mathbb{R})$ adică algebra vectorilor Zorn.
- În rezumat, avem o bijecție între clasele de izomorfisme de k–algebre de cuaternioni (resp. octonioni) și clasele de izometrie de forme pătratice Pfister de dimensiune 4 (resp. 8).

Ce să întâmplă peste un inel ?

- Pentru simplificare, considerăm numai R–algebrele de compoziție C astfel încât $C = R^4$ sau $C = R^8$ ca R-modul.
- Teoremă (Knus/Ojanguren/Sridharan, 1978) R–algebrele de cuaternioni sunt determinate de normele lor.
- O întrebare naturală este următoarea (H. Petersson) : sunt R–algebrele de octonioni determinate de normele lor ?

Tabel : determinarea prin norme

	Cuaternioni	Octonioni
/ Corpuri	Witt	Van der Blij/Springer
/ Inele	Knus/Ojanguren/Sridharan	?

- Cazul cuaternionilor se explică prin construcția Clifford care asociează o algebră unei formei pătratice.
- Cu alte cuvinte, fiind dată o formă pătratică (regulată și multiplicativă în sensul tare) peste R^8, putem asocia o algebră de octonioni ?

Răspunsul este NU !

- Există un $\mathbb{R}$-inel R și o algebră C de octonioni (izomorfă cu R^8) astfel încât N_C este o sumă de 8 pătrate dar C nu este izomorfă cu algebra $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} R$.
- Cum putem gasi un astfel de exemplu ?
- Cu ajutorul geometriei diferențiale și a topologiei !

Grupuri Lie de tip G_2

- Notăm cu G grupul de automorfisme ale lui $\mathbb{O}$. Este un grup Lie compact și conex de tip G_2.
- Avem o scunfundare naturală $G \hookrightarrow \mathrm{SO}_8$.
- Câtul topologic $X = \mathrm{SO}_8/G$ are o structură naturală de varietate diferențiabilă. De fapt, are și o structură de varietate algebrică afină reală.
- Cu alte cuvinte X este mulțimea soluțiilor reale ale unui sistem de ecuații polinomiale

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = F_2(x_1, \dots, x_n) = \cdots = F_r(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

- Notăm cu R inelul de funcții algebrice al lui X, i.e. $R = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\langle F_1, \dots, F_r \rangle$.

Construcția algebrei exotice (schiță)

- Morfismul cât $\mathrm{SO}_8 \to X = \mathrm{SO}_8/G$ este un G–fibrat principal și expresia $(\mathrm{SO}_8 \times \mathbb{O})/G$ definește o "familie de algebre de octonioni" peste X și în același timp o algebră C de octonioni peste inelul R.
- Prin construcție, norma algebrei C este o sumă de 8 pătrate, ca și $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} R$.
- Problema este să arătăm că R–algebra C este distinctă de $\mathbb{O} \otimes_{\mathbb{R}} R$.
- Este o consecință a faptului următor : Fibratul $\mathrm{SO}_8 \to X$ nu admite sectiuni.
- Acest lucru poate fi arătat cu ajutorul grupurilor de omotopie superioare ale lui G (Mimura).

Observații finale și întrebări

- Exemplul precedent funcționează și în cazul complex.
- Acest exemplu este în dimensiune 14, dar se poate rafina până la dimensiunea 7. Care este mărimea minimală pentru un astfel de exemplu ?
- În urmă cu trei luni, Asok, Hoyois și Wendt au arătat că dimensiunea trebuie să fie ≥ 4.
- Există un invariant coomologic care să distingă între astfel de algebre exotice ?
- Care este situația în cazul inelelor de întregi ale corpurilor de numere ?

Bibliografie

- P. Gille, *Octonion algebras over rings are not determined by their norms*, Bulletin Canadien de Mathématiques (2014).
- K. Mc Crimmon, *A taste of Jordan algebras*.
- A. Pfister, *Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology*.

- Mulțumim !