Torseurs sur la droite affine et R-équivalence

Soit k un corps et G/k un groupe algébrique linéaire. Si S/k est un schéma, on rappelle qu'un S-torseur sous G (ou un S-espace principal homogène sous $G_S = G \times_k S$) est un schéma E/S fidèlement plat et localement de type fini, muni d'une action à droite $E \times_S G_S \to E$ tel que le morphisme $E \times_S G_S \to E \times_S E$ défini par $(e, g) \to (e, e.g)$ soit un isomorphisme. Si le groupe G/k est lisse, l'ensemble de cohomologie étale $H^1_{ét}(S, G)$ classifie les S-torseurs sous G. Les torseurs sur la droite projective $\mathbb{P}^1$ et sur la droite affine $\mathbb{A}^1$ sont des sujets que l'on revisite dans cette thèse et dont on montre qu'ils s'appliquent à l'étude de la R-équivalence sur les groupes algébriques linéaires.

La R-équivalence est une relation d'équivalence sur les points rationnels d'une variété algébrique introduite par Manin [Man]. Soit X/k une variété algébrique. La R-équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $X(k)$ de X engendrée par la relation élémentaire suivante : deux points x et y de $X(k)$ sont dits directement R–équivalents si il existe une k-application rationnelle ϕ de la droite projective $\mathbb{P}^1_k$ dans X, définie en 0 et 1 telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(1) = y$. On montre dans la partie V le théorème de finitude suivant :

Théoréme C. — *Soit G un k-groupe réductif défini sur un corps de nombres k. Alors l'ensemble des classes de R-équivalence de $G(k)$ est fini.*

Les ingrédients arithmétiques de cette preuve sont le cas des tores déjà démontré par Colliot-Thélène et Sansuc [CT-Sa1], un principe de Hasse sur les groupes de normes de Kato et Saito [K-S] et un théorème "ergodique" de Margulis [Mar] traitant le cas d'un groupe semi-simple simplement connexe. Pour démontrer le th. B pour un groupe semi-simple, il est donc naturel d'étudier le comportement par isogénie de la R-équivalence. Le point clef de cette thèse est de montrer que le comportement par isogénie de la R-équivalence a un rapport avec la question suivante (§ IV) : Soit $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une isogénie centrale de groupes réductifs connexes définis sur un corps parfait k. Soit L/k une extension finie de corps. Existe-t-il un principe de norme pour le groupe abélien $G(k)/\lambda(\widetilde{G}(k))$, i.e. existe-t-il une application norme naturelle $N_{L/k} : G(L)/\lambda(\widetilde{G}(L)) \to G(k)/\lambda(\widetilde{G}(k))$? On démontre dans la partie IV le

Théorème B. — *Soient $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une k-isogénie centrale de groupes réductifs connexes définis sur un corps parfait k, de noyau le k-groupe commutatif fini μ et L/k une extension finie de corps. Soit $R(k, G) \subset G(k)$ le sous-groupe (normal) des éléments R-équivalents à e. Notons $N_{L/k} : H^1_{fppf}(L, \mu) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ la corestriction de L à k et $\varphi_k : G(k) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ l'application caractéristique associée à λ. Alors, on a*

$$N_{L/k}\Big(\varphi_L(R(L, G))\Big) \subset \varphi_k(R(k, G))$$

En particulier, on obtient ainsi une nouvelle démonstration du principe de norme de Knebusch sur le groupe engendré par les valeurs non nulles d'une forme quadratique.

On donne une seconde application de l'étude des principes de norme qui est la preuve uniforme (§ VI) du théorème suivant où les cas des groupes exceptionnels E_6 et E_7 sont nouveaux.

Théorème D. — *Soit k un corps parfait. Soit G un k-groupe algébrique connexe, semi–simple, absolument presque k-simple d'un des types suivants A_n, B_n, C_n, D_n, E_6 ou E_7. Soit $(k_i/k)_{i=1,..r}$ une famille d'extensions finies de corps dont les degrés sont premiers entre eux dans leur ensemble. Si les groupes G_{k_i} sont déployés ($i = 1, .., r$), alors le groupe G_k est déployé.*

Le théorème B (et à fortiori C et D) a tout d'abord été établi [Gil1] en utilisant de façon essentielle le théorème suivant de Raghunathan et Ramanathan.

Théorème A [Rag-Ram] (1983). — *Soit k un corps et k_s une clôture séparable de k. Soient G/k un groupe réductif connexe et $\mathbb{A}^1_k$ la droite affine sur k. L'application naturelle $H^1(k, G) \to H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_k, G)$ induit une bijection*

$$H^1(k, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_k, G) \to H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_{k_s}, G)\big)$$

Si S/k est un schéma connexe, on dit qu'un S-torseur E/S sous un groupe G/k est rationnellement trivial si il existe un ouvert de Zariski $U \subset S$ tel que le U-torseur $E \times_S U$ est isomorphe au torseur trivial $G \times_k U$. Le th. A est fondamental et est utilisé dans la démonstration d'une conjecture de Serre et Grothendieck sur les torseurs rationnellement triviaux ([CT-O], [Rag3]). De plus, Raghunathan a déterminé avec ce théorème les $\mathbb{P}^1$-torseurs rationnellement triviaux sous un groupe réductif G/k. Le th. A est utilisé dans létude des torseurs sur les espaces affines [Rag1], [Rag2]. En fait, le théorème B peut se démontrer sans le th. A. Expliquons nous avec le diagramme ci-contre.

Le théorème de Grothendieck-Harder [Gr1] classe les $\mathbb{P}^1$-torseurs localement triviaux pour la topologie de Zariski sous un groupe réductif déployé G/k. Harder ([H2], Satz 3.5) a vu que l'on pouvait "descendre" le théorème de Grothendieck-Harder pour classer les schémas en groupes semi-simples sur $\mathbb{P}^1$, ce qui revient à classer les $\mathbb{P}^1$-torseurs localement triviaux pour la topologie étale sous le groupe $Aut(G)$ où G/k est un groupe semi–simple déployé. Ici, on détermine les $\mathbb{P}^1$-torseurs localement triviaux pour la topologie étale sous un groupe réductif quasi-déployé (§ II.3.2.) et cette section semble être le dénominateur commun de toute la thèse.

On donne une nouvelle démonstration du th. A qui utilise également la théorie de Bruhat-Tits (§ III). Dans le cas du groupe spécial orthogonal déployé, le th. A a pour conséquence l'exactitude au milieu de la suite exacte de Milnor-Tate sur les groupes de Witt (App. B). Dans la démonstration de Harder (cf. [Knebusch1]) de la suite exacte de Milnor-Tate, les applications résidus de Milnor sur les groupes de Witt jouent un rôle clef. Un analogue existe en cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires : ce sont les applications résidus de Bruhat-Tits [BT3], qui permettent de généraliser dans une certaine mesure la preuve de Harder à celle du th. A. Le cas particulier du groupe spécial orthogonal est également important dans l'étude des principes de norme (cf. App. B).

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{théorème de}\\ \text{Grothendieck–Harder}\end{array} \arrow[d, "\text{descente étale}"] & \\
\mathbb{P}^1\text{–torseurs, § II} \arrow[d] & \\
\begin{array}{c}\mathbb{P}^1\text{–torseurs}\\ \text{rationnellement triviaux}\end{array} \arrow[d] \arrow[r, shift right, "\text{§ III}"'] & \begin{array}{c}\text{théorème A}\\ \text{(Raghunathan–Ramanathan)}\end{array} \arrow[l, shift right, "\text{[Rag3]}"'] \arrow[dl, "\text{[Gil1]}"] \\
\text{Principe de norme, § IV} \arrow[d] & \\
\begin{array}{c}\text{théorème C et}\\ \text{théorème D}\end{array} &
\end{tikzcd}$$

Dans le diagramme ci-dessus, la théorie de Bruhat-Tits n'est utilisée que pour passer des $\mathbb{P}^1$-torseurs au th. A : c'est l'objet des § I.1.3. et § I.1.4. sur les conséquences de l'existence d'applications résidus en cohomologie galoisienne non abélienne. Par ailleurs, la première partie (§ I) comporte la preuve des éléments non publiés d'une note de Nisnevich [N1] sur les schémas en groupes au dessus d'un schéma de Dedekind, ainsi qu'un complément sur la partie cohomologique de la théorie de Bruhat-Tits [BT3]. Bien que la note [N1] de Nisnevich couvre certains résultats sur les $\mathbb{P}^1$-torseurs, on n'utilisera dans cette thèse qu'une suite exacte formelle de [N1] (I.2.2.1.). Cette thèse contient les preuves complètes des deux notes [Gil1], [Gil2].

0. — Notations et rappels Soit k un corps.

0.1. — Droites affine et projective. On note $\mathbb{A}^1_k$ (resp. $\mathbb{P}^1_k$) la droite affine (resp. projective et $k(t)$ le corps des fonctions de la droite projective. On note ∞ le point fermé à l'infini de $\mathbb{P}^1_k$. Si M est un point fermé de $\mathbb{P}^1_k$, on note O_M l'anneau local en M, $\widehat{O}_M$ son complété, $\widehat{k_M}$ le corps des fractions de $\widehat{O}_M$ et $k(M)$ le corps résiduel de O_M. Si P est un polynôme séparable de $k[t]$, on note k_P l'algèbre étale $k_P = \dfrac{k[t]}{P}$.

0.2. — Soient X une variété algébrique intègre définie sur k et L/k une extension de corps. On note $X(k)$ l'ensemble de ses k–points rationnels, $X_L = X \times_{Spec(k)} Spec(L)$ l'extension des scalaires de X à L et $\overline{X} = X_{\overline{k}}$. On dit que X est k–rationnel si X est k–birationnel à un espace affine. Soit Y une variété algébrique définie sur L et supposons que l'extension L/k est finie. On note alors $R_{L/k}Y$ la restriction des scalaires, à la Weil, de L à k de Y (cf. [BLR] p.191).

0.3. — Cohomologie et descente fidèlement plate (cf. [Milne], [SGA3], [SGA4], [Gir]). Soit X un schéma quasi-compact. On considère sur X les sites X_{Zar}, X_{et}, X_{fppf}, X_{fpqc}. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens sur X sur un site $\mathcal{S}$, on notera $H^i_{\mathcal{S}}(X,\mathcal{F})$ le i-ième groupe de cohomologie de $\mathcal{F}$. Si $X = Spec(A)$, on notera parfois $H^i_{\mathcal{S}}(A,\mathcal{F})$ au lieu de $H^i_{\mathcal{S}}(X,\mathcal{F})$. Enfin, la cohomologie étale étant la plus utilisée, on notera $H^i(X,\mathcal{F}) = H^i_{\acute{e}t}(X,\mathcal{F})$. Soit G un X-schéma en groupes, plat de type fini. Suivant la définition de Demazure [Dem], on dira que G est un X-schéma en groupes semi-simple (resp. réductif) s'il est lisse et affine sur X et si ses fibres géométriques sont des groupes algébriques semi-simples (resp. réductifs) connexes. On appelle X-torseur sous G (ou espace principal homogène) un X-schéma E fidèlement plat et localement de type fini sur X, muni d'une action de groupe $E \times_X G \to E$ telle que l'application $(e,g) \to (e,eg) : E \times_X G \to E \times_X E$ soit un isomorphisme de X-schémas compatible avec l'action de G. On prend les mêmes notations pour la cohomologie non abélienne que pour la cohomologie abélienne (définie par le procédé de Čech). Rappelons que si G/X est lisse, l'application naturelle $H^1(X,G) \to H^1_{fppf}(X,G)$ est bijective (cf. [SGA3], Exp. XXIV). Si l'on note $Tors(X,G)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de X-torseurs sous G, on a une application naturelle $Tors(X,G) \to H^1_{fppf}(X,G)$.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X pour la topologie $fpqc$. Notons $U_{i,j} = U_i \times_X U_j$ et $U_{i,j,k} = U_i \times_X U_j \times_X U_k$ pour tous les indices i,j,k. On note $Z^1(\mathcal{U},G)$ l'ensemble des 1-cocycles associé et $\check{H}^1(\mathcal{U},G)$ l'ensemble de cohomologie de Čech associé. Le théorème de descente fidèlement plate ([Gr2], cf. [Milne] th. 2.23 p.19) s'écrit dans ce cas

Théorème 0.3.1. — *La donnée d'un schéma affine localement de type fini sur X est équivalente à la donnée d'une famille $\mathcal{Z} = (Z_i/_{U_i})_{i\in I}$ de schémas affines localement de type fini sur U_i, munie de morphismes de recollement $\phi_{i,j} : Z_i \times_{U_i} U_{i,j} \to Z_j \times_{U_j} U_{i,j}$ pour $i,j = 1,...,n$ satisfaisant $\phi_{i,k} = \phi_{j,k} \circ \phi_{i,j}$ sur $U_{i,j,k}$ pour tous les indices i,j,k.*

Une famille $\Phi = (\phi_{i,j})$ comme ci-dessus est une donnée de descente pour la famille $\mathcal{Z}$. On notera $D(\mathcal{Z})$ l'ensemble des données de descente pour la famille $\mathcal{Z}$. Par fonctorialité, on peut recoller des structures supplémentaires (groupe, torseur,...).

Corollaire 0.3.2. — *Soit G/X un X-schéma en groupes affine, plat, localement de type fini et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X pour la topologie $fpqc$.*

a) La donnée d'un X-torseur sous G localement trivial pour la topologie $fppf$ est équivalente à la donnée pour $i = 1, .., n$ d'un U_i-torseur E_i sous $G \times_X U_i$ localement trivial pour la topologie $fppf$ et de morphismes de recollement G-équivariants $\phi_{i,j} : E_i \times_{U_i} U_{i,j} \to E_j \times_{U_j} U_{i,j}$ pour $i, j = 1, ..., n$ satisfaisant $\phi_{i,k} = \phi_{j,k} \circ \phi_{i,j}$ sur $U_{i,j,k}$ pour tous les indices i, j, k.

b) (cf. [Milne] p.120-121) Toute classe de $\check{H}^1(\mathcal{U}/X, G)$ est représentable par un X-torseur sous G localement trivial pour la topologie $fppf$.

c) L'application naturelle $Tors(X, G) \to H^1_{fppf}(X, G)$ est une bijection. L' application naturelle $H^1_{fppf}(X, G) \to H^1_{fpqc}(X, G)$ est une bijection. Si de plus le schéma en groupes G/X est lisse, on a une bijection

$$H^1(X, G) \xrightarrow{\sim} H^1_{fppf}(X, G) \xrightarrow{\sim} H^1_{fpqc}(X, G)$$

□

Soit $h = (h_{i,j})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, G)$. Posant $(E_h)_{U_i} = G \times_X U_i$, le a) montre que l'on peut associer à un X-torseur E_h sous G défini à un unique isomorphisme près. L'application $h \to [E_h]$ est une surjection de $Z^1(\mathcal{U}, G)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de X-torseurs E sous G localement triviaux pour le recouvrement $\mathcal{U}$. Soit V/X un schéma affine et localement de type fini sur X. Soit $f : G \to Aut_X(V)$ un morphisme de faisceaux de groupes pour la topologie $fpqc$ où $Aut_X(V)$ désigne le faisceau associé au préfaisceau $U \to Aut_U(V \times_X U)$. Si E est un X-torseur sous G, le théorème de descente fidèlement plate assure l'existence du schéma quotient $E(V) = \dfrac{E \times_X V}{(e.g, g^{-1}.v)}$ qui est appelé le schéma tordu de V par le torseur E. Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(k)$, on peut remplacer l'hypothèse V affine par l'hypothèse plus faible V/k quasi-projectif (i.e. sous-schéma d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$) [Se1]. En particulier, le groupe G agit sur lui-même par automorphismes intérieurs et on a un morphisme de faisceaux $Int : G \to Aut_X(G)$. On obtient ainsi un schéma en groupes $E(G)$ qui est le tordu de G par le torseur E. Soit E' un X-torseur sous G. Comme G agit sur E', on peut tordre E' par E et obtenir le X-schéma $E(E')$ dont il est aisé de voir qu'il est muni d'une structure naturelle de X-torseur sous $E(G)$. Passant aux classes de torseurs, on obtient une bijection

$$\begin{array}{cccc} E(.): & H^1_{fppf}(X, E(G)) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(X, G) \\ & [E'] & \to & [E(E')] \end{array}$$

Il existe un unique X-torseur sous $E(G)$ noté E^{opp} tel que $E^{opp}(E(G)) = E$ où $E(G)$ est vu comme le X-torseur trivial sous $E(G)$. Le torseur E^{opp} est le torseur opposé de E.

Explicitons cette contruction dans le cas du torseur E_h où $(h_{i,j})_{i,j\in I} \in Z^1(\mathcal{U}, G)$. Les $\big(Int(h_{i,j})\big)_{i,j\in I} : G \times_X U_{i,j} \to G \times_X U_{i,j}$ forment une donnée de descente pour le recouvrement $\mathcal{U}/X$ d'isomorphismes de schémas en groupe à laquelle le th. 0.3.1. permet d'associer un X-schéma en groupes noté $E_h(G)$. On dira aussi que $E_h(G)$ est la X-forme tordue de G par le cocycle h. On définit une bijection

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\mathcal{U}, E_h(G)) & \xrightarrow{E_h(.)} & Z^1(\mathcal{U}, G) \\ (g_{i,j})_{i,j\in I} & \to & (g_{i,j}.h_{i,j})_{i,j\in I}. \end{array}$$

Le torseur opposé E_h^{opp} est le X-torseur sous $E_h(G)$ associé au cocycle $h^{-1} = (h_{i,j}^{-1})_{i,j\in I}$. En prenant les classes de la limite inductive sur les recouvrements trivialisant E, on obtient la bijection $E_h(.) : H^1_{fpqc}(X, E_h(G)) \to H^1_{fpqc}(X, G)$.

Soit $X \to Y$ un morphisme fini et plat. On notera $R_{X/Y}G$ la restriction de G à Y (cf. [BLR] p.191). On a un isomorphisme canonique $H^1_{fppf}(Y, R_{X/Y}G) \overset{\sim}{\longrightarrow} H^1_{fppf}(X, G)$ [SGA3, XXIV, 8.5]

0.4. — Cohomologie galoisienne [Se1]. Soit k_s une clôture séparable de k et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de k_s sur k. On sait que la cohomologie galoisienne s'identifie à la cohomologie étale de $Spec(k)$. On prendra parfois la notation de cohomologie des groupes $H^1(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ pour un faisceau galoisien $\mathcal{F}$. Soit G/k un groupe algébrique linéaire. On note $Z^1(k, G)$ l'ensemble des 1-cocycles de $\mathcal{G}$ à valeurs dans $G(k_s)$ et l'action de $\mathcal{G}$ sur $G(k_s)$ est notée $\sigma(g) =^\sigma g$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$. Soit $z \in Z^1(k, G)$. On note alors ${}_zG$ le groupe tordu de G par automorphismes intérieurs par le cocycle z [Se1]. L'opération de torsion sera notée $z(.) : H^1(k,_z G) \to H^1(k, G)$. Si G/k est un groupe réductif, on note $Z^1(k, G)_{an}$ l'ensemble des cocycles anisotropes, i.e. des cocycles z tels que le groupe tordu ${}_zG$ soit anisotrope.

0.5. — Groupes de type multiplicatif. Pour la définition des groupes de type multiplicatif, on renvoie à [CT-Sa2]. On note $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ et pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mu_n = \mathrm{Spec}\Big(\dfrac{\mathbb{Z}[t]}{t^n - 1}\Big)$ le groupe multiplicatif des racines n-ièmes de l'unité. Un X–tore T est dit quasi–trivial s'il est isomorphe à un tore $R_{X'/X}\mathbb{G}_m$ où X'/X est un recouvrement étale fini de X. Si S désigne un X–schéma en groupe de type multiplicatif , on note $\widehat{S}_X$ (resp. $\widehat{S}^\circ_X$) le faisceau pour la topologie étale sur X défini par $\widehat{S}_X(U) = \mathrm{Hom}_{U-gr}(S_U, \mathbb{G}_{m,U})$ (resp. $\widehat{S}^\circ_X(U) = \mathrm{Hom}_{U-gr}(\mathbb{G}_{m,U}, S_U)$) des caractères (resp. co–caractères). On note $S_X(-1)$ le tordu à la Tate de S, i.e le faisceau pour la topologie étale sur X défini par $S_X(-1)(U) = \varinjlim \mathrm{Hom}_{U-gr}(\mu_{n,U}, S_U)$.

0.6. — Flèches résidus (cf. Appendice A).

Soit K un corps complet pour une valuation discrète normalisée, i.e à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (surjectivement), et d'anneau de valuation O d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel $k = O/\mathfrak{m}$. Soit S un O-groupe de type multiplicatif. On sait ([SGA3] Exp. IX, Lemme 3.1) que comme S est O-plat, alors pour toute extension étale $O \to O'$ de corps résiduel

k', l'application $S_O(-1)(O') \to (S \times_O k)(-1)(k')$ est une bijection. Par suite, on peut identifier le faisceau $S_O(-1)$ au faisceau galoisien $(S \times_O k)(-1)$ que l'on notera $S(-1)$. De même, on a des faisceaux galoisiens $\widehat{S}$ et $\widehat{S}^0$.

PROPOSITION 0.6.1. ([CT-Sa2] Th. 4.1 et Th. 4.3). — *Soit S un O-groupe de type multiplicatif. Les applications de restriction $H^1_{fppf}(O,S) \to H^1_{fppf}(K,S)$ et $H^2_{fppf}(O,S) \to H^2_{fppf}(K,S)$ sont injectives.* $\square$

PROPOSITION 0.6.2. (cf. App. A.1.). — *Soit μ un O-groupe de type multiplicatif fini. Il existe une application naturelle appelée flèche résidu, $\partial : H^1_{fppf}(K,\mu) \to \mu(-1)(k)$ tel que l'on ait la suite exacte*

$$0 \longrightarrow H^1_{fppf}(O,\mu) \longrightarrow H^1_{fppf}(K,\mu) \xrightarrow{\partial} \mu(-1)(k) \longrightarrow 0$$

$\square$

PROPOSITION 0.6.3. (cf. App. A.1. et [CT-Sa2]). — *Soit μ un k-groupe de type multiplicatif fini et S un k-groupe de type multiplicatif.*

a) Il existe une suite exacte de localisation

$$0 \longrightarrow H^1_{fppf}(k,\mu) \longrightarrow H^1_{fppf}(k(t),\mu) \xrightarrow{\oplus \partial_M} \oplus \mu(-1)(k(M)) \longrightarrow 0$$

où M parcourt les points fermés de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$. De plus, on a la "formule des résidus"

$$\partial_\infty(c) + \sum N_{k(M)/k}(\partial_M(c)) = 0\,.$$

où M parcourt les points fermés de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$.

b) ([CT-Sa2] lemme 2.4 p.164). L'application naturelle

$$H^1_{fppf}(k,S) \to H^1_{fppf}(\mathbb{A}^1_k, S)$$

est un isomorphisme. $\square$

0.7. — Groupes algébriques (cf. [Bo2], [Se1]). On note $\mathbb{G}_a$ le groupe additif $\mathrm{Spec}(k[t])$. Soit G un k-groupe algébrique linéaire. On note G^0 la composante neutre de G. Par souci d'harmonisation avec [Dem], on dira que G est semi-simple (resp. réductif) si G est semi-simple connexe (resp. réductif connexe). Si H/k est un sous-groupe algébrique de G, on note $Z_G(H)$ (resp. $N_G(H)$) le centralisateur (resp. le normalisateur) de H dans G. Pour la définition des k-groupes unipotents, on renvoie à l'exposé de Raynaud ([SGA3] exp. XVII) en rappelant qu'un groupe unipotent U/k est dit déployé sur k s'il existe une suite centrale $U_n = e \subset U_{n-1} \subset ... \subset U_0 = U$ de k-groupes connexes telle que $U_{i-1}/U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_a$ pour $i = 1,..,n$. Une conséquence directe du théorème 90 de Hilbert est le

LEMME 0.7.1. — *Soit U/k une k_s/k-forme de $\mathbb{G}_a^r$ où $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$. Alors U est k-isomorphe à $\mathbb{G}_a^r$.* ∎

Le lemme précédent et la proposition 4.1.1. p. 557 de l'exp. XVII de [SGA3] montrent la

PROPOSITION 0.7.2. — *Soit U/k un k-groupe unipotent. Si U est déployé sur k_s, alors U est déployé sur k.*

0.8. — Foncteur des sections globales. Soit X/k une variété propre et G/X un schéma en groupes affine, plat et de type fini sur X. On sait que le foncteur des sections globales est représentable [H2] (§ 1.4. p. 120), i. e. il existe un k-groupe $\prod\limits_{X/k} G$ tel que pour tout schéma S/k, on ait $\big(\prod\limits_{X/k} G\big)(S) = G(X \times_k S)$. Il est aisé de voir que l'on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$H^1_{fppf}\big(k, \prod_{X/k} G\big) \hookrightarrow H^1_{fppf}(X, G) \to H^1_{fppf}(\overline{X}, G)$$

0.9. — Groupes de normes. Soit Z une k–variété. On définit le groupe de normes de Z noté $N_Z(k)$ (cf. [Ro]) comme le sous–groupe de k^* engendré par les $N_{L/k}(L^*)$ pour toutes les extensions finies séparables de corps L/k telles que $Z(L)$ soit non vide. Si K/k est une extension de corps, on note $N_Z(K)$ le groupe $N_{Z_K}(K)$. Pour une extension finie séparable de corps L/k, on a l'inclusion $N_{L/k}(N_Z(L)) \subset N_Z(k)$. Etendons cette définition. On suppose donné pour toute extension finie de corps L/k un groupe abélien $F(L)$ et un morphisme $N_{L/k} : F(L) \to F(k)$. On définit alors le groupe de normes de F noté $N_Z(k, F)$ comme le sous–groupe de $F(k)$ engendré par les $N_{L/k}(F(L))$ pour toutes les extensions finies séparables de corps L/k telles que $Z(L)$ soit non vide. Soit T un k–tore. On sait qu'il existe une application norme $N_{L/k} : T(L) \to T(k)$ pour toute extension finie de corps L/k. Cela permet de définir le groupe de normes $N_Z(k, T)$. Le groupe de normes $N_Z(k, \mathbb{G}_m)$ est égal au groupe de normes $N_Z(k)$.

0.10. — Anneaux de Witt. On renvoie à [Knebusch2] pour la définition de l'anneau de Witt $W(X)$ d'un schéma X.

Enfin pour tout entier positif n, on note $rad(n)$ son radical, i.e. le produit des diviseurs premiers de n. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ la partie entière de x, i.e.

$E(x) = \mathrm{Sup}\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$

I. — Cohomologie non abélienne sur les anneaux de Dedekind (d'après Bruhat–Tits, Harder et Nisnevich)

Nisnevich a écrit une note [N1] sans donner la démonstration de deux points. Le premier est un théorème de Bruhat-Tits non publié dans toute sa généralité (th. I.1.2.2.). Le second point est une suite exacte formelle de localisation de cohomologie non abélienne sur un schéma de Dedekind, fondée sur la technique de descente fidèlement plate. On démontrera ici ces deux points techniques et on donnera l'énoncé du théorème de Nisnevich sur les torseurs rationnellement triviaux sur un schéma de Dedekind (th. III.3.1.1.). Il est à noter que l'on n'utilisera pas ce résultat dans toute la suite. Par contre, on aura besoin dans la preuve du th. A d'une suite exacte de localisation de Harder (th. I.3.2.1.) que l'on rappelle ici.

I.1. — Compléments sur la théorie de Bruhat-Tits

Dans cette section, on montre quelques énoncés complémentaires aux résultats de Bruhat-Tits sur la cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires sur un corps complet pour une valuation discrète [BT3], en particulier sur le comportement par isogénies et sur l'existence d'entiers de "torsion" (§ I.1.4.) qui sera le point crucial de notre démonstration du th. A.

Soit K un corps complet pour une valuation discrète non triviale v, d'anneau de valuation O et de corps résiduel k. Soit π une uniformisante de K. On note k_s une clôture séparable de k, $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de k_s/k et K_1 une extension séparable non ramifiée maximale de K. La valuation v se prolonge de façon unique à K_1 dont on note O_1 l'anneau de valuation. Le groupe de Galois de K_1/K est canoniquement isomorphe à $\mathcal{G}$.

I.1.1. — Isogénies. Soit $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une O–isogénie centrale de O-groupes réductifs, de noyau le O–groupe fini μ. D'après [SGA3] Exp. XXII Rem. 4.2.11.a) p.181, le groupe μ est un O-groupe fini de type multiplicatif. On note $\ell : H^1(O,G) \to H^1(K,G)$ et $\ell : H^1(O,\widetilde{G}) \to H^1(K,\widetilde{G})$ les applications de restriction induites par le morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(O)$. Comme $H^1(O,\widetilde{G}) = H^1_{fppf}(O,\widetilde{G})$ et $H^1(O,G) = H^1_{fppf}(O,G)$, on a le diagramme exact d'ensembles pointés (cf. [Milne] p. 122)

$$
(*)\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mu(O) & \longrightarrow & \widetilde{G}(O) & \xrightarrow{\lambda_O} & G(O) & \xrightarrow{\varphi_O} & H^1_{fppf}(O,\mu) & \xrightarrow{i_O} & H^1(O,\widetilde{G}) \\
 & & \Big\| & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & {\scriptstyle \ell}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \ell}\Big\downarrow \\
1 & \longrightarrow & \mu(K) & \longrightarrow & \widetilde{G}(K) & \xrightarrow{\lambda_K} & G(K) & \xrightarrow{\varphi_K} & H^1_{fppf}(K,\mu) & \xrightarrow{i_K} & H^1(K,\widetilde{G}) \\
 & & & & & & & & {\scriptstyle \partial_K}\downarrow & & \\
 & & & & & & & & \mu(-1)(k) & & \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & 1 & &
\end{array}
$$

Prenant le quotient $H^1(K,\widetilde{G})/\ell\big(H^1(O,\widetilde{G})$ dans la catégorie des ensembles pointés, les applications φ_K et i_K passent aux quotients dans le diagramme suivant, définissant les applications $\overline{\varphi}$ et $\overline{i}$.

$(**)$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & G(O) & \longrightarrow & G(K) & \longrightarrow & G(K)/G(O) & & \\
 & & {\scriptstyle \varphi_O}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi_K}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{\varphi}}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & H^1_{fppf}(O,\mu) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(K,\mu) & \xrightarrow{\partial_K} & \mu(-1)(k) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle i_O}\downarrow & & {\scriptstyle i_K}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{i}}\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & H^1(O,\widetilde{G}) & \longrightarrow & H^1(K,\widetilde{G}) & \longrightarrow & H^1(K,\widetilde{G})/\ell\big(H^1(O,\widetilde{G})\big) & &
\end{array}
$$

Lemme I.1.1.1. — *La suite d'ensembles pointés*

$$G(K)/G(O) \xrightarrow{\overline{\varphi}} \mu(-1)(k) \xrightarrow{\overline{i}} H^1(K,\widetilde{G})/\ell\big(H^1(O,\widetilde{G})\big)$$

est exacte.

Sous-lemme I.1.1.2. — *Soit* $\gamma_1 \in \mathrm{Ker}(i_K)$. *Alors*

$$i_K(\gamma_1\gamma) = i_K(\gamma) \quad \forall\gamma \in H^1_{fppf}(K,\mu).$$

$\square$

Démonstration du lemme I.1.1.1 : Soit $r \in \operatorname{Ker}(\bar{i})$. Il existe $\gamma \in H^1_{fppf}(K,\mu)$ de résidu r tel que $i_K(\gamma) \in \operatorname{Im}(H^1(O,\widetilde{G}) \to H^1(K,\widetilde{G}))$. La classe $i_K(\gamma)$ est représentée dans $H^1(O,\widetilde{G})$ par le cocycle $\widetilde{z} = (\widetilde{z}_s)_{s\in\mathcal{G}}$ de $Z^1(\mathcal{G},\widetilde{G}(O_1))$. Posons $z = \lambda(\widetilde{z}) \in Z^1(\mathcal{G}, G(O_1))$. Il existe $g \in \widetilde{G}(K_1)$ satisfaisant

$$z_s = g^{-1\,s}g \qquad \forall s \in \mathcal{G}$$

Tordons le groupe $\widetilde{G}/O$ par le cocycle $\widetilde{z}$. On pose $\widetilde{G}' =_{\widetilde{z}} \widetilde{G}$, $G' =_z G$ et on note λ' l'isogénie tordue $\widetilde{G}' \to G'$ de noyau μ (les automorphismes intérieurs agissent trivialement sur le centre). On a un diagramme tordu

$$\begin{array}{ccccccc}
\widetilde{G}'(O) & \overset{\lambda'_O}{\to} & G'(O) & \overset{\varphi'_O}{\to} & H^1_{fppf}(O,\mu) & \overset{i'_O}{\to} & H^1(O,\widetilde{G}') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \ell\downarrow \\
\widetilde{G}'(K) & \overset{\lambda'_K}{\to} & G'(K) & \overset{\varphi'_K}{\to} & H^1_{fppf}(K,\mu) & \overset{i'_K}{\to} & H^1(K,\widetilde{G}') \\
 & & & & \gamma & & 1
\end{array}$$

Par construction, on a $i'_K(\gamma) = 1$. Donc $r \in \operatorname{Im}(\partial_K \circ \varphi'_K)$. Il reste à voir que $\operatorname{Im}(\partial_K \circ \varphi_K) = \operatorname{Im}(\partial_K \circ \varphi'_K)$. Or $G'(K) = g^{-1}G(K)g \subset G(K_1)$ et les applications caractéristiques φ_K et φ'_K sont des morphismes de groupe à valeurs dans le groupe abélien $H^1(K,\mu)$. Par suite, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
G'(K) & \overset{\varphi'_K}{\longrightarrow} & H^1_{fppf}(K,\mu) & \overset{\partial_K}{\longrightarrow} & \mu(-1)(O) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
G'(K_1) = G(K_1) & \overset{\varphi'_{K_1}}{\longrightarrow} & H^1_{fppf}(K_1,\mu) & \overset{\partial_{K_1}}{\longrightarrow} & \mu(-1)(O_1) \\
{\scriptstyle Int(g)}\downarrow & & \| & & \| \\
G(K_1) & \overset{\varphi_{K_1}}{\longrightarrow} & H^1_{fppf}(K_1,\mu) & \overset{\partial_{K_1}}{\longrightarrow} & \mu(-1)(O_1) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
G(K) & \overset{\varphi_K}{\to} & H^1_{fppf}(K,\mu) & \overset{\partial_K}{\to} & \mu(-1)(k)
\end{array}$$

On a $Int(g).G'(K) = G(K)$ dans $G(K_1)$. Grâce à l'injection $\mu(-1)(k) \hookrightarrow \mu(-1)(k_s)$, on a $\operatorname{Im}(\partial_K \circ \varphi_K) = \operatorname{Im}(\partial_K \circ \varphi'_K)$. Donc $r \in \operatorname{Im}(\partial_K \circ \varphi_K)$. $\square$

Lemme I.1.1.3. — *Soit $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une O–isogénie centrale de O-groupes réductifs, dont le noyau μ est un O–groupe fini de type multiplicatif. Si l'application naturelle $H^1(O, \widetilde{G}) \to H^1(K, \widetilde{G})$ est injective, alors l'application naturelle $H^1(O, G) \to H^1(K, G)$ a un noyau trivial.*

Démonstration : On a un diagramme de suites exactes d'ensembles pointés (cf. [Milne] p.122)

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & 1 \arrow[d] \\
H^1_{fppf}(O,\mu) \arrow[r, "i_O"] \arrow[d] & H^1(O,\widetilde{G}) \arrow[r, "\lambda_{O,*}"] \arrow[d] & H^1(O,G) \arrow[r, "\Delta_O"] \arrow[d] & H^2_{fppf}(O,\mu) \arrow[d] \\
H^1_{fppf}(K,\mu) \arrow[r, "i_K"] \arrow[d] & H^1(K,\widetilde{G}) \arrow[r, "\lambda_{K,*}"] & H^1(K,G) \arrow[r, "\Delta_K"] & H^2_{fppf}(K,\mu) \\
\mu(-1)(k) \arrow[d] & & & \\
1 & & &
\end{tikzcd}$$

La restriction $H^2_{fppf}(O, \mu) \to H^2_{fppf}(K, \mu)$ est injective (Prop. 0.6.1.). Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}\big(H^1(O, G) \to H^1(K, G)\big)$. Une chasse au diagramme montre que $\alpha = \lambda_{O,*}(\beta)$ avec $\beta \in H^1(O, \widetilde{G})$ et $\beta_K = i_K(\gamma)$, $\gamma \in H^1_{fppf}(K, \mu)$. Le lemme I.1.1.1. montre qu'il existe $\gamma' \in H^1_{fppf}(K, \mu)$, avec $i_K(\gamma') = 1$ et $\partial_K(\gamma') = \partial_K(\gamma)$. Le sous-lemme I.1.1.2. assure $i_K(\gamma'\gamma^{-1}) = i_K(\gamma) = \beta_K$ et $\gamma'\gamma^{-1} \in H^1_{fppf}(O, \mu)$. Donc $i_O(\gamma'\gamma^{-1}) = \beta$ et $\alpha = 1$. □

I.1.2. — Espaces principaux homogènes rationnellement triviaux. Les résultats de [BT3] sont donnés dans le cas d'un corps résiduel parfait. Ils s'étendent au cas de groupes réductifs sur K quasi-déployés sur K_1 et en considérant uniquement la cohomologie galoisienne du groupe $\mathcal{G}$.

Théorème I.1.2.1. (Bruhat-Tits, [BT3] lemme 3.9). — *Soit G/K un groupe semi-simple connexe, simplement connexe tel que le groupe G_{K_1} soit quasi-déployé. Soit $P \subset G(K)$ un K-sous-groupe parahorique de G et $\mathbf{P}$ le O-schéma en groupes associé. Alors l'application naturelle $H^1(\mathcal{G}, \mathbf{P}(O_1)) \to H^1(\mathcal{G}, G(K_1))$ est injective.*

On se propose de démontrer le théorème suivant de Bruhat-Tits, non publié, et utilisé dans le cas semi-simple dans [N1].

Théorème I.1.2.2. — *Soit G un O-schéma en groupes réductif. Alors la restriction $\ell : H^1(O, G) \to H^1(K, G)$ est injective.*

Démonstration du th. I.1.2.2. : Soit G/O un schéma en groupes réductif. On sait ([Dem] Cor. 5.2.7 p.410) que G/O_1 est un schéma en groupes déployé et donc que G_{K_1} est un groupe algébrique déployé.

1^{ier} cas : G/O est semi-simple simplement connexe. Alors la fibre générique G_K est semi-simple simplement connexe et $G(O)$ est un sous-groupe parahorique de $G(K)$, dont le O-schéma en groupes associé est G. Le théorème I.1.2.1. montre que l'application naturelle $H^1(\mathcal{G}, G(O_1)) \to H^1(\mathcal{G}, G(K_1))$ est injective. Or $H^1(\mathcal{G}, G(O_1)) = H^1(O, G)$ et l'application $H^1(\mathcal{G}, G(K_1)) = H^1(K_1/K, G) \to H^1(K, G)$ est injective, donc l'application composée $H^1(O, G) \to H^1(K, G)$ est injective.

Pour pouvoir étendre le th. I.1.2.2. aux O-groupes réductifs, on utilise le lemme suivant que l'on montrera à la fin de la démonstration.

Lemme I.1.2.3. —

a) Soit G un O-schéma en groupes semi-simple. Il existe une O-isogénie centrale $\lambda : \widetilde{G} \to G$ où $\widetilde{G}$ est un O-schéma en groupes semi-simple simplement connexe.

b) ([SGA3] Exp. XXIII prop. 6.2.4 p.258) Soit G un O-schéma en groupes réductif. Il existe une O-isogénie centrale $\lambda : G' \times_{\mathrm{Spec}(O)} T \to G$ où G' est un O-schéma en groupes semi-simple et T un O-tore.

2^{nd} cas : Le groupe G/O est semi-simple. Soit $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une O-isogénie centrale fournie par le lemme I.1.2.3.a). Le cas précédent plus le lemme I.1.1.3. montrent que l'application $H^1(O, G) \to H^1(K, G)$ a un noyau trivial. Un argument de torsion assure que l'application $H^1(O, G) \to H^1(K, G)$ est injective pour tout O-groupe semi-simple G.

$3^{\text{ième}}$ cas : le cas général. Soit $\lambda : \widetilde{G} = G' \times T \to G$ une O-isogénie centrale fournie par le lemme I.1.2.3.b). Comme les restrictions $H^1(O, G') \to H^1(K, G')$ et $H^1(O, T) \to H^1(K, T)$ (0.6.1) sont injectives, le lemme I.1.1.3. montre que la restriction $H^1(O, G) \to H^1(K, G)$ a un noyau trivial. Un argument de torsion assure que l'application $H^1(O, G) \to H^1(K, G)$ est injective pour tout O-groupe G réductif.

Démonstration du lemme I.1.2.3. : *a*) Le groupe G est une O-forme pour la topologie étale d'un groupe de Chevalley G^d ([Dem] Cor. 5.2.7 p.410). Le groupe G/O est donc isomorphe à $E(G)$ où E est un O-torseur sous $Aut(G^d)$ localement trivial pour la topologie étale. Le groupe $G^d/\mathbb{Z}$ admet un revêtement universel $p : \widetilde{G}^d/\mathbb{Z} \to G^d/\mathbb{Z}$ où $\widetilde{G}^d/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-schéma en groupes de Chevalley simplement connexe. Or, on a un morphisme $j : Aut(G^d) \to Aut(\widetilde{G}^d)$ ([SGA3] Exp. XXIV 3.6 p. 346) qui permet de tordre l'isogénie $p : \widetilde{G}^d/O \to G^d/O$ centrale en $\lambda = E(p) : j_*(E)(\widetilde{G}^d) \to E(G^d) \simeq G$. □

I.1.3. — Existence d'entiers de "torsion" : le cas déployé. Bien que les sections I.1.3. et I.1.4. soient des applications directes de [BT3], elles seront capitales pour notre démonstration du th. A. Grothendieck [Gr3] a défini l'entier de torsion d'un groupe réductif déployé. Ici, on donne une définition différente des entiers de torsion motivée par la théorie de Bruhat-Tits en associant à tout diagramme de Dynkin irréductible Δ deux entiers $d_1(\Delta)$ et $d_2(\Delta)$. Ces entiers sont différents de l'entier de torsion de Grothendieck.

Par exemple, le groupe Sp_n est sans torsion avec la définition de Grothendieck et on a $d_1(C_n) = 2$, $d_2(C_n) = 2$. On suit ici [BT4]. Soit Δ un diagramme de Dynkin irréductible et $G/\mathbb{Z}$ le groupe semi-simple et simplement connexe de Chevalley associé muni d'un $\mathbb{Z}$-tore maximal déployé T de G, d'un système de racines simples Δ du système de racine $\Phi = \Phi(T, G)$ $(\subset \widehat{T})$ associé à la représentation adjointe de G. Notons $(\ ,\ ) : \widehat{T}^0 \times \widehat{T} \to \mathbb{Z}$ la forme bilinéaire canonique. L'ensemble Δ détermine un système de racines positives $\Phi^+ \subset \Phi$ et un sous-groupe de Borel $B/\mathbb{Z}$ de $G/\mathbb{Z}$ de radical unipotent U. On ordonne arbitrairement l'ensemble $\Phi^+ = (\alpha_i)_{i=1,..,q}$. On a une famille $(u_\alpha : \mathbb{G}_a \to G)_{\alpha\in\Phi}$ de morphismes de groupes définis sur $\mathbb{Z}$ telle que l'on ait un isomorphisme $\prod\limits_{i=1,..,q} u_{\alpha_i} : \prod\limits_{i=1,..,q} \mathbb{G}_a \to U$. Notons α_{max} la racine maximale. Alors

$$\alpha_{max} = \sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha.\alpha$$

où c_α est un entier positif. Pour toute racine α de Φ, on note $T_\alpha = \mathrm{Ker}(\alpha)^0$, $Z_\alpha = Z_G(T_\alpha)$. Le groupe dérivé $[Z_\alpha, Z_\alpha]$ est de rang 1 et il existe un unique sous-groupe à un paramètre $\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \to T \cap [Z_\alpha, Z_\alpha]$ tel que $T = \mathrm{Im}(\alpha^\vee).T_\alpha$ et $(\alpha^\vee, \alpha) = 2$. L'élément $\alpha^\vee$ est la coracine associée à α. Les $(\alpha^\vee)_{\alpha\in\Phi}$ forment un système de racines noté $\Phi^\vee$ (cf [Sp2]). Posons $E = \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $E' = \widehat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Notons $(\alpha^*)_{\alpha\in\Delta}$ la base duale de $(\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ (i.e. $(\alpha^*, \beta) = \delta_{\alpha,\beta}$). Notons Q (resp. $Q^\vee$) le réseau des racines de Φ (resp. $\Phi^\vee$), i.e. le sous-groupe de $\widehat{T}$ (resp. $\widehat{T}^0$) engendré par Φ (resp. $\Phi^\vee$). Notons

$$P = \Big\{x \in E' = \widehat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid (\alpha^\vee, x) \in \mathbb{Z} \quad \forall\ \alpha^\vee \in \Phi^\vee\Big\}$$

le réseau des poids et

$$P^\vee = \Big\{x \in E = \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid (x, \alpha) \in \mathbb{Z} \quad \forall\ \alpha \in \Phi\Big\} = \oplus_{\alpha\in\Delta}\mathbb{Z}\alpha^*.$$

On a $Q^\vee \subset \widehat{T}^0 \subset P^\vee$. Soit $\mu/_{\mathbb{Z}}$ le centre de G. On sait que l'on a un isomorphisme de groupes $\mu(-1) \xrightarrow{\sim} P^\vee/Q^\vee$ ([T1] p. 36).

Définition I.1.3.1. — *On définit les entiers de torsion $d_1(\Delta)$ et $d_2(\Delta)$ par*

$$d_1(\Delta) = \quad \textit{exposant} \quad \textit{de} \quad P^\vee/Q^\vee, \quad d_2(\Delta) = \textit{ppcm}_{\alpha\in\Delta}(c_\alpha).$$

Donnons les valeurs de ces entiers (cf. [I-M] p.18).

$\Delta =$	A_n	B_n	C_n	D_{2n+1}	D_{2n}	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$d_1 =$	$n+1$	2	2	4	2	3	2	1	1	1
$d_2 =$	1	2	2	2	2	2.3	4.3	2.3.5	4.3	2.3

où D_{2n+1} $(n \geq 2)$ et D_{2n} $(n \geq 2)$.

Soit Ω une partie non vide de E. On note $P_\Omega(K)$ le sous-groupe de $G(K)$ engendré par $T(O)$ et les $U_\alpha(\pi^{m_\alpha} O)$ pour toute racine α positive où $m_\alpha = m_\alpha(\Omega) = E\Big[\mathrm{Inf}_{\theta\in\Omega}\Big((\theta,\alpha)\Big)\Big]$ ($E[.]$ est la partie entière). Le groupe $P_\Omega(K)$ est borné. Si $\theta \in E$, on notera $P_\theta(K)$ le groupe $P_{\{\theta\}}(K)$. Si $\theta \in \widehat{T}^0$, il existe $t \in T(K)$ tel que $P_\theta(K) = tP_0(K)t^{-1}$. On sait que tout sous-groupe (abstrait) borné maximal de $G(K)$ est conjugué par un élément de $G(K)$ à un $P_\theta(K)$ où $\theta \in E$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, on pose $\theta_\alpha = \dfrac{\alpha^*}{c_\alpha} \in E$. On sait ([T2] p. 662) que les $(P_{\theta_\alpha}(K))_{\alpha\in\Delta}$ et $P_0(K)$ représentent les classes de conjugaison sous $G(K)$ des sous-groupes bornés maximaux de $G(K)$. Soient π une uniformisante de K et d un entier, $d \geq 1$. Soit π_d une racine primitive d-ième de π. On note $O^d = O[\pi_d]$ et K^d le corps de fractions de O^d (resp. O_1^d). On a $G(K) \subset G(K^d)$. Si l'on note $d : E \to E$ la multiplication par d, on a pour toute partie $\Omega \subset E$ la relation $P_\Omega(K) \subset P_{d(\Omega)}(K^d)$. Le lemme suivant justifie l'appellation d'entier de torsion pour l'entier $d = d_1(\Delta).d_2(\Delta)$.

Lemme I.1.3.2. — *Soit $G/\mathbb{Z}$ un groupe de Chevalley semi-simple simplement connexe, presque simple et de type Δ. Notons $d = d_1(\Delta).d_2(\Delta)$ et soit π_d une racine d-ième primitive de π. Notons $K^d = K(\pi_d)$. Soit $P \subset G(K)$ un sous-groupe borné. Alors il existe $g \in G(K^d)$ tel que*

$$gPg^{-1} \subset G(O^d)$$

Démonstration : On prend les notations Δ, E,.. de ci-dessus. Notons $d_1 = d_1(\Delta)$, $d_2 = d_2(\Delta)$ et $d = d_1.d_2$. Soit π_d une racine primitive d-ième de π. On peut supposer que P est un sous-groupe borné maximal de $G(K)$ et que $P = G(O)$ ou $P = P_{\theta_\alpha}(K)$ avec $\alpha \in \Delta$. Si $P = G(O)$, le lemme est clair. On est donc ramené à $P = P_{\theta_\alpha}(K)$ avec $\alpha \in \Delta$. On a $d_2.\theta_\alpha = \dfrac{d_2}{c_\alpha}.\alpha^* \in P^\vee$. Comme $d_2.P^\vee \subset Q^\vee \subset \widehat{T}^0$, on a $(d_1.d_2).\theta_\alpha = d.\theta_\alpha \in \widehat{T}^0$. Donc il existe $t \in T(K^d)$ tel que $tP_{d.\theta_\alpha}(K^d)t^{-1} = G(O^d)$. Or, on a $P_{\theta_\alpha}(K) \subset P_{d.\theta_\alpha}(K^d)$, donc $tP_{\theta_\alpha}(K)t^{-1} \subset G(O^d)$. □

1.4. — Existence d'entiers de "torsion". On suit ici les § 1.4 p.674 et § 1.7 de [BT3] dans le cas particulier suivant. Soit G/O un schéma en groupes semi-simple simplement connexe tel que le groupe G_K soit absolument presque K-simple de type Δ. On sait que le groupe G_{K_1} est déployé. Au groupe G sont associés deux immeubles, l'immeuble $\mathcal{I}_1$ de G sur K_1 sur lequel le groupe $G(K_1)$ agit et l'immeuble $\mathcal{I}$ de G sur K sur lequel le groupe $G(K)$ agit, qui s'identifie à l'ensemble des points fixes sous $\mathcal{G}$ de $\mathcal{I}_1$. A toute facette F de $\mathcal{I}_1$ est associé le sous-groupe $P_F = Stab_{G(K_1)}(F) \subset G(K_1)$. On appelle P_F le sous-groupe parahorique associé à la facette F. Si $F \subset \mathcal{I}$, le groupe P_F est invariant par $\mathcal{G}$ est appelé K-sous-groupe parahorique de G. Le groupe $G(O_1)$ est un K–sous–groupe parahorique maximal de G. On sait que si deux K-parahoriques sont conjugués par un élément de $G(K_1)$, ils sont conjugués par un élément de $G(K)$.

Soit π une uniformisante de K, d un entier, $d \geq 1$. Soit π_d une racine primitive d-ième de π. On note $O^d = O[\pi_d]$ (resp. $O_1^d = O_1[\pi_d]$) et K^d (resp. K_1^d) le corps de fractions de O^d (resp. O_1^d). Notons $\mathcal{I}^d$ et $\mathcal{I}_1^d$ les immeubles associés à G_{K^d}. On a des applications naturelles $\mathcal{G}$-équivariantes de ramification d-ième $d : \mathcal{I}_1 \to \mathcal{I}_1^d$ et $d : \mathcal{I}_1 \to \mathcal{I}_1^d$ ([BT2] p. 92). Si F' est une facette de $\mathcal{I}_1^d$, on note $P_{F'}^d$ le sous-groupe parahorique de G_{K^d} associé. Par descente galoisienne du lemme I.1.3.2., on a la

Proposition I.1.4.1. — *Soit F une facette de $\mathcal{I}$.*

a) On a un diagramme commutatif d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} G(K) & \subset & G(K^d) \\ \cup & & \cup \\ P_F & \subset & P^d_{d(F)} \end{array}$$

b) Supposons que $d = d_1(\Delta).d_2(\Delta)$. Alors il existe $g \in G(K^d)$ tel que

$$gP_{d(F)}g^{-1} \subset G(O^d).$$

$\square$

La proposition précédente a une conséquence importante pour les applications à la cohomologie galoisienne de la théorie de Bruhat-Tits : c'est le théorème I.1.4.2. qui est le point crucial de la démonstration du théorème A donnée au § III.

Théorème I.1.4.2. — *Soit G/O un groupe semi-simple, simplement connexe, tel que G_K soit un groupe absolument presque K-simple de type Δ. Posons $D = d_1(\Delta)^2.d_2(\Delta)$ et soit π_D une racine D-ième primitive de π. On note $O^D = O[\pi_D]$ (resp. $O_1^d = O_1[\pi_D]$) et K^D (resp. K_1^D) le corps de fractions de O^D (resp. O_1^D). Notons $\rho_D : H^1(\mathcal{G}, G(K_1)) \to H^1(\mathcal{G}, G(K_1^D))$ la restriction induite par l'extension K^D/K. Alors*

$$\rho_D\Big(H^1(\mathcal{G}, G(K_1))\Big) \subset \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G(O_1^D)) \to H^1(\mathcal{G}, G(K_1^D))\Big).$$

Démonstration : Soit G/O un groupe semi-simple, simplement connexe, tel que G_K soit un groupe absolument presque K-simple de type Δ. On pourra appliquer la proposition I.1.4.1. Notons $d_1 = d_1(\Delta)$, $d_2 = d_2(\Delta)$ et $D = d_1^2.d_2$. Soit π_D une racine primitive d-ième de π. Si m divise D, on note $O^m = O[\pi_D^{D/m}]$ (resp. $O_1^m = O_1[\pi_D^{D/m}]$) et K^m (resp. K_1^m) le corps de fractions de O^m (resp. O_1^m). Comme le schéma en groupes G_{O_1} est déployé, le groupe G_{K_1} est déployé. Notons μ le centre de G/O (μ est un O-groupe de type multiplicatif) et $G_{ad} = G/\mu$ le groupe adjoint de G. On a une suite exacte de faisceaux sur $\mathrm{Spec}(O)_{fppf}$

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow G \xrightarrow{p} G_{ad} \longrightarrow 1$$

Suivant [BT3], pour tout m divisant D, on note $G_{ad}^{00}(K_1^m) = p(G(K_1^m)) \subset G_{ad}(K_1^m)$ le sous-groupe (abstrait) de $G_{ad}(K_1^m)$ engendré par les sous-groupes parahoriques de G_{ad}.

Lemme I.1.4.3. — *Soit $\gamma \in H^1(\mathcal{G}, G_{ad}^{00}(K_1))$. Alors*

$$\gamma_{K^{d_1 d_2}} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O_1^{d_1 d_2})) \to H^1(\mathcal{G}, G_{ad}^{00}(K_1^{d_1 d_2}))\Big).$$

Lemme I.1.4.4. — *Soit $\gamma \in H^1(\mathcal{G}, G(K_1))$ tel que*

$$p_*(\gamma) \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O_1)) \to H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(K_1))\Big).$$

Alors

$$\gamma_{K^{d_1}} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G(O_1^{d_1})) \to H^1(\mathcal{G}, G(K_1^{d_1}))\Big).$$

Avant de démontrer les lemmes I.1.4.3. et I.1.4.4., observons qu'ils entraînent le théorème. Soit $\gamma \in H^1(\mathcal{G}, G(K_1))$. Alors $p_*(\gamma) \in H^1(\mathcal{G}, G_{ad}^{00}(K_1))$. Le lemme I.1.4.3. montre que $p_*(\gamma_{K^{d_1 d_2}}) \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O_1^{d_1 d_2})) \to H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(K_1^{d_1 . d_2}))\Big)$. Appliquant le lemme I.1.4.4. au corps $K^{d_1 . d_2 . d_1} = K^D$, on obtient

$$\gamma_{K^D} = \rho_D(\gamma) \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G(O_1^D)) \to H^1(\mathcal{G}, G(K_1^D))\Big).$$

Démonstration du lemme I.1.4.3. : Notons $d = d_1.d_2$.

1^{ier} cas : le O-schéma en groupes G_{ad} est quasi-déployé i.e. G/O possède un O-sous-groupe de Borel B. On va utiliser la détermination de l'ensemble $H^1(\mathcal{G}, G_{ad}^{00}(K_1))$ faite par Bruhat-Tits ([BT3] Cor. 3.15). Notons $P_0 = G(O_1)$, P_1,..., P_r les K–sous–groupes parahoriques de G contenant le sous-groupe d'Iwahori $B(O_1)$. Alors les $(P_{i,ad} = p(P_i))_{i=0,..,r}$ sont les K-sous groupes parahoriques de G_{ad} contenant le sous-groupe d'Iwahori $p(B(O_1))$ de G_{ad}. Pour $i = 0, .., r$, on note $H^1(\mathcal{G}, P_{i,ad})_{an}$ les classes $[z]$ telles que le groupe tordu ${}_zP_{i,ad}$ ne possède pas de K-sous-groupes parahoriques propres (c'est bien défini). On a une bijection

$$\coprod_{i=0,..,r} H^1(\mathcal{G}, P_{i,ad})_{an} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{G}, G_{ad}^{00}(K_1)).$$

Donc γ est l'image de $\gamma' \in H^1(\mathcal{G}, P_{i,ad})$. Il existe une facette F de l'immeuble $\mathcal{I}$ de G tel que $P_i = P_F$. L'inclusion $P_F \subset P^d_{d(F)}$ induit un diagramme commutatif de restrictions

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{G}, G^{00}_{ad}(K_1)) & \xrightarrow{\rho_d} & H^1(\mathcal{G}, G^{00}_{ad}(K^d_1)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1(\mathcal{G}, P_{F,ad}) & \xrightarrow{\rho_d} & H^1(\mathcal{G}, P^d_{d(F),ad}) \end{array}$$

où $P_{F,ad} = p(P_F) \subset G_{ad}(K_1)$ et $P^d_{d(F),ad} = p(P^d_{d(F)}) \subset G_{ad}(K^d_1)$. Comme $G(O^d)$ est un K^d-sous-groupe parahorique maximal de G_{K^d}, la proposition I.1.4.1.b) montre qu'il existe $g \in G(K^d)$ tel que $gP^d_{d(F)}g^{-1} \subset G(O^d_1)$. Projetant par $p : G \to G_{ad}$, il vient $p(g)P^d_{F,ad}p(g)^{-1} \subset G_{ad}(O^d_1)$. Le diagramme ci-dessus montre que

$$\gamma'_{K^d} = Int(p(g))_*(\gamma_{K^d}) \in H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O^d_1)) \text{ et}$$
$$\gamma_{K^d} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O^d_1)) \to H^1(\mathcal{G}, G^{00}_{ad}(K^d_1))\Big).$$

2^{nd} cas : le cas général. Il existe un groupe quasi-déployé G^{qd}_{ad}/O et un cocycle $z \in Z^1(\mathcal{G}, G^{qd}_{ad}(O_1))$ tel que le O-schéma en groupes G_{ad}/O soit isomorphe au tordu ${}_zG^{qd}_{ad}$. Alors la torsion par z induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(K_1)) & \xrightarrow{z(.)} & H^1(\mathcal{G}, G^{qd}_{ad}(K_1)) \\ {\scriptstyle\rho_d}\downarrow & & {\scriptstyle\rho_d}\downarrow \\ H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(K^d_1)) & \xrightarrow{z(.)} & H^1(\mathcal{G}, G^{qd}_{ad}(K^d_1)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O^d_1)) & \xrightarrow{z(.)} & H^1(\mathcal{G}, G^{qd}_{ad}(O^d_1)). \end{array}$$

Soit $\gamma \in H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(K_1))$. Le premier cas montre que

$$z(\gamma)_{K^d} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G^{qd}_{ad}(O^d_1)) \to H^1(\mathcal{G}, G^{qd}_{ad}(K^d_1))\Big)$$

donc on a

$$\gamma_{K^d} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O^d_1)) \to H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(K^d_1))\Big)$$

$\square$

Démonstration du lemme I.1.4.4. : Notons ici $d = d_1$. Soit $\gamma \in H^1(\mathcal{G}, G(K_1))$ tel que $p_*(\gamma) \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O_1)) \overset{\ell}{\longrightarrow} H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(K_1))\Big)$. Soit $\beta \in H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O_1))$ tel que $p^*(\gamma) = \ell(\beta)$. On a les égalités $H^1(\mathcal{G}, G(O_1)) = H^1(O, G)$ et $H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O_1)) = H^1(O, G_{ad})$ et un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 1 \\
 & & & & \downarrow \\
H^1(\mathcal{G}, G(O_1)) & \overset{p_O}{\longrightarrow} & H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(O_1)) & \overset{\Delta_O}{\longrightarrow} & H^2_{fppf}(O, \mu) \\
\ell \downarrow & & \ell \downarrow & & \ell \downarrow \\
H^1(\mathcal{G}, G(K_1)) & \overset{p_K}{\longrightarrow} & H^1(\mathcal{G}, G_{ad}(K_1)) & \overset{\Delta_K}{\longrightarrow} & H^2_{fppf}(K, \mu)
\end{array}$$

La restriction $H^2_{fppf}(O, \mu) \hookrightarrow H^2_{fppf}(K, \mu)$ est injective (0.6.1.). Une chasse au diagramme montre qu'il existe $[z] \in H^1(\mathcal{G}, G(O_1))$ tel que $p_*([z]) = p_*(\gamma) \in H^1(\mathcal{G}, G(K_1))$. Tordons G par le cocycle z. On a alors un diagramme exact d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & 1 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
H^1_{fppf}(O, \mu) & \overset{{}_z i_O}{\longrightarrow} & H^1(O, {}_zG) & \overset{{}_z p_O}{\longrightarrow} & H^1(O, {}_zG_{ad}) \\
\downarrow & & \ell \downarrow & & \ell \downarrow \\
H^1_{fppf}(K, \mu) & \overset{{}_z i_K}{\longrightarrow} & H^1(K, {}_zG) & \overset{{}_z p_O}{\longrightarrow} & H^1(K, {}_zG_{ad}) \\
\partial_K \downarrow & & & & \\
\mu(-1)(k) & & & & \\
\downarrow & & & & \\
1 & & & &
\end{array}$$

L'application $\ell : H^1(\mathcal{G}, {}_zG(O_1)) \to H^1(\mathcal{G}, {}_zG(K_1))$ est injective d'après le th. I.1.2.1. Comme ${}_zp_K(z^{opp}(\gamma)) = 1$, le diagramme montre l'existence de $\alpha \in H^1_{fppf}(K, \mu)$ tel que $z^{opp}(\gamma) =_z i_K(\alpha)$. Par suite, $z^{opp}(\gamma)_{K^d} =_z i_{K^d}(\alpha_{K^d})$. Or on a un diagramme commutatif de ramification

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & H^1_{fppf}(O,\mu) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(K,\mu) & \xrightarrow{\partial_K} & \mu(-1)(k) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow{\scriptstyle \rho_d} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_d} & & \downarrow{\scriptstyle \times d} & & \\
1 & \longrightarrow & H^1_{fppf}(O^d,\mu) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(K^d,\mu) & \xrightarrow{\partial_{K^d}} & \mu(-1)(k) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Comme $d = d_1(\Delta)$ est l'exposant de $\mu(-1)(k_s)$, on a $d.\mu(-1)(k) = 0$. Par suite, $\alpha_{K^d} \in \mathrm{Im}\big(H^1_{fppf}(O^d,\mu) \to H^1_{fppf}(K^d,\mu)\big)$, donc

$$z^{opp}(\gamma)_{K^d} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G},_z G(O_1^d)) \to H^1(\mathcal{G},_z G(K_1^d))\Big) \quad \text{et}$$

$$\gamma_{K^d} \in \mathrm{Im}\Big(H^1(\mathcal{G}, G(O_1^d) \to H^1(\mathcal{G}, G(K_1^d))\Big).$$

□

I.2. — Une suite exacte de Nisnevich

I.2.1. — Pour le reste du § I, on se place dans le cadre suivant. Soit X un schéma de Dedekind, i.e. un schéma noethérien, régulier, intègre et de dimension 1, dont on note K le corps de fonctions. On note $\eta : \mathrm{Spec}(K) \to X$ le point générique de X. Pour tout point fermé x de X, on note v_x la valuation de K associée, O_x (resp. $\widehat{O}_x$) l'anneau local de X en x (resp. son complété pour v_x) et $k(x)$ le corps résiduel en x. On note $\widehat{K}_x$ le corps des fractions de $\widehat{O}_x$. Soit G/X un schéma en groupes affine et de type fini.

Pour tout ouvert $V \subset X$, note $V^{(1)}$ l'ensemble des points fermés de V et on pose $\mathbb{A}(V) = \prod_{x\in V^{(1)}} \widehat{O}_x \times \prod_{x\notin V^{(1)}} \widehat{K}_x$. Si Σ est une partie finie de $X^{(1)}$, on pose $\mathbb{A}_\Sigma = \varinjlim_{V\cap\Sigma=\emptyset} \mathbb{A}(V) \subset \prod_{x\in X^{(1)}} \widehat{K}_x$.

Définition I.2.1.3. — *On appelle $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\emptyset$ l'anneau des adèles de X et $\mathbb{A}_\Sigma$ le sous-anneau des Σ-entiers de $\mathbb{A}$.*

On fixe jusqu'à la fin de la partie I un ouvert U_0 de X de supplémentaire $\Sigma = \{x_1, ..., x_n\}$. Posons $U_i = \mathrm{Spec}(\widehat{O}_{x_i})$ pour $i = 1, .., n$.

I.2.2. — La suite exacte de Nisnevich est une extension en cohomologie non abélienne de la bijection entre $Pic(X)$ et le groupe des diviseurs de X modulo équivalence linéaire. Notons

$$c(X,G) = G(\mathbb{A}(X))\backslash G(\mathbb{A})/G(K)$$

et

$$c_\Sigma(X,G) = \Big(\prod_{x\in\Sigma} G(\widehat{O}_x)\backslash G(\widehat{K}_x)\Big)/G(U_0).$$

Théorème I.2.2.1 ([N1] Th. 2.1). — *Il existe des suites exactes d'ensembles pointés*

$$a) \quad 1 \longrightarrow c_\Sigma(X,G) \overset{T_\Sigma}{\longrightarrow} H^1_{fppf}(X,G) \longrightarrow H^1_{fppf}(U_0,G) \times \prod_{x\in\Sigma} H^1_{fppf}(\widehat{O}_x,G)$$

$$b) \quad 1 \longrightarrow c(X,G) \overset{T}{\longrightarrow} H^1_{fppf}(X,G) \longrightarrow H^1_{fppf}(K,G) \times \prod_{x\in X^{(1)}} H^1_{fppf}(\widehat{O}_x,G)$$

On va démontrer ce théorème en utilisant la technique de descente fidèlement plate.

Par limite inductive, on passe aisément de l'assertion $a)$ à l'assertion $b)$. Comme $H^1_{fppf}(X,G) = H^1_{fpqc}(X,G)$, il suffit de montrer que l'on a une bijection $T_\Sigma : c_\Sigma(X,G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1_{fpqc}(\mathcal{U},G)$, ce qui sera fait en I.2.3.6. C'est une application de la technique de descente fidèlement plate sur X que l'on va développer ici.

I.2.3. — Descente fidèlement plate sur X. Remarquons que U_i est un recouvrement de $\mathrm{Spec}(O_{x_i})$ pour la topologie *fpqc* et que le recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i=0,\dots,n}$ est un recouvrement de X pour la topologie *fpqc*. Pour $i,j,k = 0,..,n$, on prend les notations usuelles $U_{i,j} = U_i \times_X U_j$ et $U_{i,j,k} = U_i \times_X U_j \times_X U_k$. Comme X est de dimension 1, pour tout point x_i de Σ, le morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(O_{x_i})$ induit des isomorphismes

$$\eta_i : \mathrm{Spec}(\widehat{K}_{x_i}) \simeq U_{0,i}$$

et

$$\eta_i^{opp} : \mathrm{Spec}(\widehat{K}_{x_i}) \simeq U_{i,0}.$$

De plus, si x_i, x_j sont des points distincts de Σ, on a un isomorphisme naturel

$$\eta_{i,j} : U_{0,i,j} \simeq U_{i,j}.$$

Soit $(\widetilde{Z}_i/\mathrm{Spec}(O_{x_i}))_{i=1,..,n}$ une famille de schémas affines de type fini et Z_0/U_0 un schéma affine de type fini. On pose $Z_i = \widetilde{Z}_i \times_{\mathrm{Spec}(O_{x_i})} U_i$ pour $i = 1,..n$ et $\mathcal{Z} = (Z_i/U_i)_{i=0,\dots,n}$. On a des morphismes naturels $\phi_i = Z_i \times_X U_{i,i} \to U_{i,i} \times_X Z_i \simeq Z_i \times_X U_{i,i}$ pour $i = 0,..n$ satisfaisant $\phi_i = \phi_i \circ \phi_i$ sur $U_{i,i,i}$ (cf. [Milne] p.18). On rappelle que $D(\mathcal{Z})$ désigne l'ensemble des données de descente de $\mathcal{Z}$ et on note

$$D(\mathcal{Z})_\Delta = \{\varphi = (\varphi_{i,j}) \in D(\mathcal{Z}) \mid \quad \varphi_{i,i} = \phi_i \quad \textit{pour} \quad i = 0,..,n\}.$$

Grâce aux isomorphismes η_i, η_i^{opp} et $\eta_{i,j}$, on peut décrire simplement l'ensemble $D(\mathcal{Z})_\Delta$. Soit $\Psi = (\psi_i : Z_{0/\widehat{K}_{x_i}} \to Z_{i/\widehat{K}_{x_i}})_{i=1,\dots,n}$ une famille d'isomorphismes. On peut associer à Ψ une donnée de recollement $\Phi = (\varphi_{i,j})_{i,j=0,..,n}$. Posons

$$(*)\quad \begin{cases} \varphi_{i,i} = \phi_i : Z_{i/U_{i,i}} \simeq Z_{i/U_{i,i}} & \textit{pour} \quad i = 0, ..., n \\ \varphi_{0,i} = \eta_i \circ \psi_i \circ \eta_i^{-1} : Z_{0/U_{0,i}} \simeq Z_{i/U_{0,i}} & \textit{pour} \quad i = 1, ..., n \\ \varphi_{i,0} = \eta_i^{opp} \circ \psi_i \circ (\eta_i^{opp})^{-1} : Z_{i/U_{i,0}} \simeq Z_{0/U_{i,0}} & \textit{pour} \quad i = 1, ..., n \\ \varphi_{i,j} = \eta_{i,j}^{-1} \circ \varphi_{0,j} \circ (\varphi_{i,0})^{-1} \circ \eta_{i,j} : Z_i/_{U_{i,j}} \to Z_j/_{U_{i,j}} & \textit{pour} \quad i,j = 1,..n, i \neq j, \end{cases}$$

la dernière ligne étant donnée par le diagramme

$$(**)\qquad \begin{array}{ccccc} Z_i/_{U_{0,i,j}} & \xrightarrow{(\varphi_{i,0})^{-1}} & Z_0/_{U_{0,i,j}} & \xrightarrow{\varphi_{0,j}} & Z_j/_{U_{0,i,j}} \\ \eta_{i,j}^{-1} \big\downarrow & & & & \eta_{i,j}^{-1} \big\downarrow \\ Z_i/_{U_{i,j}} & & \xrightarrow{\varphi_{i,j}} & & Z_j/_{U_{i,j}}. \end{array}$$

En fait, ce diagramme montre que si φ est une donnée de descente, $\varphi_{i,j}$ est déterminé par $\varphi_{0,i}$ et $\varphi_{0,j}$. Posons

$$\Theta(\Psi) = (\varphi_{i,j})_{i,j=0,..,n}.$$

Proposition I.2.3.1. — *L'application* $\Theta : \prod_{i=1,..,n} \mathrm{Isom}_{\widehat{K}_{x_i}} \big(Z_{0_{/\widehat{K}_{x_i}}}, Z_{i_{/\widehat{K}_{x_i}}}\big) \to D(\mathcal{Z})_\Delta$ *est bien définie et est bijective.*

Démonstration : Il est aisé de vérifier que Θ est bien définie. L'application Θ est injective car avec les notations précédentes on a la relation $\varphi_{0,i} = \eta_i \circ \psi_i \circ \eta_i^{-1}$ pour $i = 0,..,n$. Montrons la surjectivité. Soit $\varphi = (\varphi_{i,j}) \in D(\mathcal{Z})$. On pose $\Psi_i = \eta_i^{-1} \circ \varphi_{0,i} \circ \eta_i : Z_0/_{\widehat{K}_{x_i}} \to Z_0/_{\widehat{K}_{x_i}}$ pour $i = 1,..,n$. Il est aisé de vérifier que Ψ_i est un isomorphisme d'inverse $(\eta_i^{opp})^{-1} \circ \varphi_{0,i} \circ (\eta_i^{opp})$ pour $i = 1,..,n$. Le diagramme $(**)$ montre que si $i,j \geq 1$, $i \neq j$, on a nécessairement $\varphi_{i,j} = \eta_{i,j}^{-1} \circ \varphi_{0,j} \circ (\varphi_{i,0})^{-1} \circ \eta_{i,j}$. Donc $\varphi = \Theta(\Psi)$. $\square$

Corollaire I.2.3.2. — *Soit* $(\widetilde{E}_i/\operatorname{Spec}(O_{x_i}))_{i=1,..,n}$ *une famille de torseurs sous* G *et* E_0/U_0 *un torseur sous* G *(pour la topologie fppf). On pose* $E_i = \widetilde{E}_i \times_{\operatorname{Spec}(O_{x_i})} U_i$ *pour* $i = 1,..n$ *et* $\mathcal{E} = (E_i/U_i)_{i=0,...,n}$. *On note* $D_{G-tors}(\mathcal{E})$ *l'ensemble des données de recollement* G*-équivariantes de* $\mathcal{E}$. *Alors il existe une bijection*

$$\Theta : \prod_{i=1,..,n} \mathrm{Isom}_{G-tors,\widehat{K}_{x_i}} \big(E_{0_{/\widehat{K}_{x_i}}}, E_{i_{/\widehat{K}_{x_i}}}\big) \to D_{G-tors}(\mathcal{E})_\Delta.$$

Remarque : Dans le cas où la fibre générique G_K est un groupe réductif connexe, Harder a montré que l'on a un énoncé plus fort (cf. I.3.2.1.) où on ne suppose pas que les torseurs E_i proviennent de $\mathrm{Spec}(O_{x_i})$.

Le cas de la suite exacte de Nisnevich est le cas où $E_i = G \times_X U_i$ pour $0,..,n$. Le groupe $\mathrm{Isom}_{G-tors,\widehat{K}_{x_i}}\big(G_{/\widehat{K}_{x_i}}, G_{/\widehat{K}_{x_i}}\big)$ n'est pas autre chose que le groupe $G(\widehat{K}_{x_i})$ agissant par translation à droite sur $G_{/\widehat{K}_{x_i}}$. D'autre part, l'ensemble $D_{G-tors}(\mathcal{E})$ s'identifie à l'ensemble des 1-cocycles $Z^1(\mathcal{U}/X, G)$ pour le recouvrement $\mathcal{U}/X$ et l'ensemble $D_{G-tors}(\mathcal{E})_\Delta$ s'identifie à $Z^1(\mathcal{U}, G)_\Delta$ où

$$Z^1(\mathcal{U}, G)_\Delta = \Big\{(g_{i,j})_{i,j=1,..,n} \in Z^1(\mathcal{U}, G) \mid g_{i,i} = 1 \quad pour \quad i = 1,..,n\Big\}$$

Par suite, on a une bijection $\Theta : \prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i}) \xrightarrow{\sim} Z^1(\mathcal{U}, G)_\Delta$

Lemme I.2.3.3. — *Soit* $g = (g_i)_{i=1,\dots,n} \in \prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i})$*. On a* $\Theta(g) = (g_{i,j})_{i,j=0,..,n}$ *où*

$$\begin{cases} g_{i,i} = 1 & pour \quad i = 1,\dots,n \\ g_{0,i} = (\eta_i^*)^{-1}(g_i^{-1}) & \in G(U_{0,i}) \quad pour \quad i = 1,\dots,n \\ g_{i,0} = \big((\eta_i^{opp})^*\big)^{-1}(g_i) & \in G(U_{i,0}) \quad pour \quad i = 1,\dots,n \\ g_{i,j} = (\eta_{i,j}^*)^{-1}(g_{i,0}.g_{j,0}^{-1}) & \in G(U_{i,j}) \quad pour \quad i,j = 1,..n, \quad i \neq j \end{cases}$$

□

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{cccc} \Theta : & \prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i}) & \longrightarrow & Z^1(\mathcal{U}, G)_\Delta \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & c_\Sigma(X, G) & & \check{H}^1_{fpqc}(\mathcal{U}, G) \end{array}$$

Lemme I.2.3.4. — *L'application* Θ *passe au quotient dans le diagramme ci-dessus et induit une bijection*

$$T_\Sigma : c_\Sigma(X, G) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1_{fpqc}(\mathcal{U}, G).$$

Démonstration : L'application Θ étant surjective, il suffit de montrer que si g et g' sont deux éléments de $\prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{K}_{x_i})$ satisfaisant $[\Theta(g)] = [\Theta(g')]$ dans $\check{H}^1_{fpqc}(\mathcal{U}, G)$, alors $[g]$ et $[g']$ sont égaux dans $c_\Sigma(X, G)$. Soient $g = (g_i)$ et $g' = (g_i)$ tels que $[\Theta(g)] = [\Theta(g')]$. Il existe un élément $h_i \in G(U_i)$ pour $i = 0,\dots,n$ tel que $g_{i,j} = h_i g'_{i,j} h_j^{-1}$ pour $i,j = 0,\dots,n$. Posons $g" = (g_i") = (h_i g_i h_0)_{i=1,\dots,n}$. Alors $\Theta(g") = \Theta(g')$ donc $g" = g'$. Par suite, $[g]$ et $[g']$ sont égaux dans $c_\Sigma(X, G)$. □

Ceci achève la preuve du théorème I.2.2.1.

I.2.4. — Utilisant maintenant les théorèmes I.1.2.2. et I.1.2.4., le théorème précédent I.2.2.1. s'écrit

PROPOSITION I.2.4.1. — *Si le schéma en groupes G/X est réductif, on a des suites exactes d'ensembles pointés*

$$\begin{array}{llccccccc} a) & & 1 & \rightarrow & c_\Sigma(X,G) & \stackrel{T_\Sigma}{\rightarrow} & H^1(X,G) & \rightarrow & H^1(U_0,G) \\ b) & & 1 & \rightarrow & c(X,G) & \stackrel{T}{\rightarrow} & H^1(X,G) & \rightarrow & H^1(K,G) \end{array}$$

∎

Cette proposition conclut la partie "élémentaire" (dont la preuve n'était pas publiée) de la note de Nisnevich [N1]. Il ne sera pas utilisé dans la suite pour l'étude des torseurs sur la droite projective et sur la droite affine.

I.3. — Approximations

On rappelle ici des résultats généraux sur les torseurs sur les schémas de Dedekind.

I.3.1. — Ce paragraphe ne sera pas utilisé dans la suite, le cas des torseurs sur les droites affine et projective étant très particulier. Soit X, G, Σ, U_0,.. comme en I.2.1. L'application naturelle $H^1_{Zar}(X,G) \rightarrow H^1_{fppf}(X,G)$ et la suite exacte de Nisnevich définissent les injections

$$\beta_G^\Sigma : \mathrm{Ker}\big(H^1_{Zar}(X,G) \rightarrow H^1_{Zar}(U_0,G)\big) \rightarrow c_\Sigma(X,G)$$

et

$$\beta_G : H^1_{Zar}(X,G) \rightarrow c(X,G)$$

(la même application β_G a été construite par Harder [H1] 2.3 p.177).

Les applications β_G et β_G^Σ ne sont en général pas bijectives et Nisnevich a donné un résultat général dont la démonstration utilise la théorie de Bruhat-Tits. Toutefois, un cas est élémentaire.

LEMME I.3.1.1. ([H1] p.178). —

a) Si G/X satisfait à l'approximation faible pour l'ensemble de places Σ (cf. [H1] p.174), l'application β_G^Σ est une bijection.

b) Si G/X satisfait à l'approximation faible, l'application β_G est une bijection.

THÉORÈME I.3.1.2. (Nisnevich, [N1] th. 3.2). — *Si G est un X-schéma en groupe réductif, l' application β_G (à fortiori β_G^Σ) est une bijection.*

La proposition I.2.4.1. s'écrit alors

Théorème I.3.1.3. [N1]. — *Si G/X est réductif, on a une suite exacte*

$$1 \to H^1_{Zar}(X,G) \to H^1(X,G) \to H^1(K,G).$$

Autrement dit, dans ce cas, tout X-torseur sous G admettant une section rationnelle est localement trivial pour la topologie de Zariski. Dans le § II, on démontrera ce théorème dans le cas particulier où G est un schéma en groupes constant et X un ouvert de la droite projective (§ II.3.4.).

I.3.2. — Une suite exacte de Harder (utile au § III). Pour tout point fermé x de X, on note ℓ_x la restriction $H^1_{fppf}(\widehat{O}_x, G) \to H^1_{fppf}(\widehat{K}_x, G)$. En utilisant l'approximation faible pour le groupe $G_{K'}$ pour une extension déployante K' de K, Harder a montré l'existence d'une suite exacte de localisation

Théorème I.3.2.1. ([H1] Lemme 4.1.3 p. 184). — *Supposons que la fibre générique G_K soit réductive connexe. On a des suites exactes naturelles d'ensembles pointés*

a) $$H^1_{fppf}(X,G) \longrightarrow H^1_{fppf}(U_0,G) \longrightarrow \coprod_{x\in\Sigma} H^1_{fppf}(\widehat{K}_x,G)/\ell_x\big(H^1_{fppf}(\widehat{O}_x,G)\big).$$

b) $$H^1_{fppf}(X,G) \longrightarrow H^1(K,G) \longrightarrow \coprod_{x\in X^{(1)}} H^1_{fppf}(\widehat{K}_x,G)/\ell_x\big(H^1_{fppf}(\widehat{O}_x,G)\big)$$

□

Remarque : Le recollement de torseurs pour la topologie de Zariski ne posant pas de problèmes, ce théorème est un énoncé local qui est l'exactitude de la suite

$$H^1_{fppf}(O_x,G) \longrightarrow H^1_{fppf}(K,G) \longrightarrow H^1_{fppf}(\widehat{K}_x,G)/\ell_x\big(H^1_{fppf}(\widehat{O}_x,G)\big).$$

pour tout point x de $X^{(1)}$.

Cette suite exacte de Harder a un analogue sur les groupes de Witt. Pour tout point x de X, on choisit une uniformisante π_x de O_x qui détermine une flèche résidu $\partial_x : W(\widehat{K}_x) \longrightarrow W(k(x))$ (cf. [Milnor-Hu] ch. IV).

Proposition I.3.2.2. (cf. [Knebusch1] Satz 13.3.6.). — *On a des suites exactes de groupes*

a) $$W(X) \longrightarrow W(U_0) \xrightarrow{\oplus\partial_x} \bigoplus_{x\in\Sigma} W(k(x))$$

b) $$W(X) \longrightarrow W(K) \xrightarrow{\oplus\partial_x} \bigoplus_{x\in X^{(1)}} W(k(x))$$

□

II. — Torseurs sur la droite projective

Soit $G_{/\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})}$ un schéma en groupes de Chevalley. Grothendieck a calculé l'ensemble $H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, G)$ classifiant les torseurs sur la sphère de Riemann localement triviaux pour la topologie de Zariski [Gr1]. Ce résultat a été étendu par Harder pour un corps de base quelconque k [H2] : c'est le théorème de Grothendieck-Harder qui montre en particulier que tout $\mathbb{P}^1$-torseur localement trivial pour la topologie de Zariski sous un groupe réductif déployé G/k provient d'un sous-groupe à un paramètre de G. Harder ([H2], Satz 3.5) a vu que l'on pouvait "descendre" le théorème de Grothendieck-Harder pour classer les schémas en groupes semi-simples sur $\mathbb{P}^1$, ce qui revient à classer les $\mathbb{P}^1$-torseurs localement triviaux pour la topologie étale sous le groupe $Aut(G)$ où G/k est un groupe semi-simple déployé. En s'inspirant de ce principe de descente de Harder, nous calculons l'ensemble $H^1_{ét}(\mathbb{P}^1_k, G)$ pour un groupe réductif déployé G/k, étendant ainsi le théorème de Grothendieck-Harder à la cohomologie étale (II.1.4.4.). Ensuite, utilisant la décomposition de Witt-Tits qui est la version cohomologique du théorème de Witt, on établit un analogue de cette décomposition pour l'ensemble $H^1(\mathbb{P}^1, H)$ où H/k est un groupe réductif quasi-déployé (II.3.2.4.). Cela nous permet de retrouver le résultat de Raghunathan [Rag3] sur les $\mathbb{P}^1$-torseurs rationnellement triviaux et de calculer $H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1_k, G)$ pour un groupe réductif quelconque G/k. Disons un mot sur la fonctorialité de ces calculs qui est assez longue à developper. Pour les formes internes d'un groupe adjoint déployé, les résultats de cette section se démontrent de façon beaucoup plus économique que le cas général qui demande en particulier l'étude des formes externes (II.2.3.). Dans une première lecture, on pourra sauter le § II.2.

II.1. — Extension du théorème de Grothendieck-Harder

II.1.1. — Notations pour toute la section II. — Soit k un corps. On note k_s une clôture séparable de k et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de k_s sur k. On note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k contenant k_s. Soit G un k-groupe réductif déployé, connexe, T un k-tore déployé maximal de G, $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl et $i : T \hookrightarrow G$ l'inclusion naturelle. Notons $(\quad,\quad) : \widehat{T}^0 \times \widehat{T} \to \mathbb{Z}$ la forme bilinéaire canonique. Le groupe de Weyl W est un k-groupe constant qui agit à droite sur $\widehat{T}$ et à gauche sur $\widehat{T}^0$. Notons $\Phi = \Phi(T, G)$ le système de racines. On choisit un système de racines simples Δ de Φ qui détermine le sous-ensemble des racines positives Φ^+ et un sous-groupe de Borel B de G de radical unipotent U. On ordonne arbitrairement l'ensemble $\Phi^+ = (\alpha_i)_{i=1,..,q}$. On a une famille $(u_\alpha : \mathbb{G}_a \to G)_{\alpha \in \Phi}$ de morphismes de groupes telle que l'on ait un isomorphisme (de variétés) $\prod\limits_{i=1,..,q} u_{\alpha_i} : \prod\limits_{i=1,..,q} \mathbb{G}_a \to U$. Soit $\lambda \in \widehat{T}^0$. On dit que $\lambda \geq 0$ si $(\lambda, \alpha) \geq 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta$. Notons pour tout $\lambda \in \widehat{T}^0$ satisfaisant $\lambda \geq 0$, $U(\lambda)$ le sous-groupe de U engendré par les u_α satisfaisant $(\lambda, \alpha) \geq 0$ et

$$Z(\lambda) = Z_G(\lambda), \quad P(\lambda) = Z(\lambda) \times U(\lambda).$$

Soit $\lambda \in \widehat{T}^0$. Il existe un unique $w \in W$ tel que $w.\lambda \geq 0$. Le théorème 90 de Hilbert permet de trouver un représentant $\widetilde{w} \in N_G(T)(k)$ de w. On définit alors

$U(\lambda) = \widetilde{w}^{-1}U(w.\lambda)\widetilde{w}$, $P(\lambda) = \widetilde{w}^{-1}P(w.\lambda)\widetilde{w} = Z_G(\lambda) \times U(\lambda)$, dont il est aisé de vérifier qu'ils sont indépendants du choix de $\widetilde{w}$.

II.1.2. — Le cas des tores. Soit S un k-tore. Si $\lambda \in \widehat{S}^0(k) = \mathrm{Hom}_{k-gr}(\mathbb{G}_m, S)$, on définit S_λ comme le push-out par $-\lambda$ du fibré de Hopf $\mathcal{O}(-1) = \mathbb{A}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$, ce qui s'écrit

$$S_\lambda = (-\lambda)_*(\mathcal{O}(-1))$$

Lemme II.1.2.1. (cf. [CT-Sa3] p. 408 § 2). — *Soit S un k-tore.*

a) On a une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow H^1(k,S) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1,S) \longrightarrow \widehat{S}^0(k) \longrightarrow 0.$$

b) L'application

$$\begin{array}{ccc} \widehat{S}^0(k) & \longrightarrow & H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1,S) \\ \lambda & & [S_\lambda] \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes qui est un scindage de la suite exacte du a). □

On identifiera dans la suite les groupes $\widehat{S}^0(k)$ et $H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1,S)$. En particulier pour le tore $\mathbb{G}_m$, on a un isomorphisme $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1,\mathbb{G}_m)$ Si $n \in \mathbb{Z}$ et si $f_n : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ est l'application $t \to t^n$, on note $\mathcal{O}(n) = (f_{-n})_*(\mathcal{O}(-1))$ le fibré en droite sur $\mathbb{P}^1$ déduit de f_{-n}.

II.1.3. — Le théorème de Grothendieck-Harder.

Théorème II.1.3.1 [Gr1], [H2], [Ram] p.186. — *Soit G un k-groupe réductif déployé et $i : T \hookrightarrow G$ un k-tore maximal déployé de G. L'application $i_* : H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1,T) \to H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1,G)$ induit une bijection*

$$\widehat{T}^0/W \xrightarrow{\sim} H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1,G).$$

La proposition suivante est une conséquence de la démonstration du théorème de Grothendieck-Harder.

Proposition II.1.3.2. ([Ram] 4.3, 4.4 p.171). — *Avec les hypothèses du théorème II.1.3.1., on a*

$$\widehat{T}^0/W \xrightarrow{\sim} H^1_{Zar}(\overline{\mathbb{P}}^1,G) = H^1(\overline{\mathbb{P}}^1,G).$$

□

Donnons un corollaire du théorème II.1.3.1. qui sera utile dans la suite.

Corollaire II.1.3.3. — *Soit $\pi : \widetilde{G} \to G$ une isogénie centrale de k-groupes réductifs déployés. Alors l'application $\pi_* : H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, \widetilde{G}) \to H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$ est injective.* □

II.1.4. — Extension du théorème de Grothendieck-Harder pour la cohomologie étale. La décomposition de Witt-Tits est la version cohomologique du théorème de Witt [T1], cf. II.3.1.3. : C'est la caractérisation d'un groupe algébrique semi-simple par sa classe d'isomorphie sur $\overline{k}$, son index et son noyau anisotrope. On n'utilisera pas avant le § II.3. cette classification explicitement, mais en exploitant les propriétés cohomologiques des groupes $Z(\lambda)$.

Soit $\lambda \in \widehat{T}^0$. On note $E_\lambda = i_*(T_\lambda)$, et $j_\lambda : Z(\lambda) \to G$ l'inclusion naturelle. Par torsion par E_λ, on a une application naturelle

$$E_\lambda(j_\lambda) : Z(\lambda) \times_k \mathbb{P}^1 \to E_\lambda(G).$$

On a un diagramme commutatif exact d'ensemble pointés (cf 0.8)

$$(*) \qquad H^1_{fppf}(k, \prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G)) \hookrightarrow H^1_{fppf}(\mathbb{P}^1, E_\lambda(G)) \longrightarrow H^1_{fppf}(\overline{\mathbb{P}}^1, E_\lambda(G))$$

Proposition II.1.4.1. (cf. [Ram], Prop. 5.2). — *Il existe un k-groupe unipotent déployé U_λ, sous-groupe de $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G)$ tel que $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G) = Z(\lambda) \times U_\lambda$. De plus, le morphisme $Z(\lambda) \to \prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G)$ est induit par $E_\lambda(j_\lambda)$.* □

Remarque : On passe du cas $\lambda \geq 0$ au cas général par conjugaison. Dans [Rag], il est montré que $\Big(\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G)\Big)(k) = Z(\lambda)(k) \times U_\lambda(k)$. Comme on a cette relation sur $\overline{k}$, on a l'égalité de la prop. II.1.4.1.

Lemme II.1.4.2. (cf. [Sa] Lemme 1.13 p.20). — *Soit H un k-groupe algébrique linéaire connexe. Si U est un k-groupe unipotent, invariant et déployé sur k, l'application canonique $H^1(k, H) \to H^1(k, H/U)$ est une bijection.* □

(L'hypothèse de connexité sur H est superflue dans ce lemme.)

Le k-groupe $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G)$ est lisse. Le lemme II.1.4.2. assure l'égalité

$$H^1(k, Z(\lambda)) = H^1\Big(k, \prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G)\Big) = H^1_{fppf}\Big(k, \prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G)\Big).$$

Le $\mathbb{P}^1$-groupe $E_\lambda(G)$ est lisse. Remplaçant $fppf$ par *ét* dans la suite exacte $(*)$, on obtient la suite exacte d'ensemble pointés

$$(**) \qquad 1 \longrightarrow H^1(k, Z(\lambda)) \xrightarrow{E_\lambda(j_\lambda)_*} H^1(\mathbb{P}^1, E_\lambda(G)) \longrightarrow H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, E_\lambda(G))$$

De plus, l'application $E_\lambda(j_\lambda)_*$ est injective. D'autre part, on a un morphisme de groupes algébriques

$$Z(\lambda) \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{(j,\lambda)} G$$

induisant un diagramme commutatif d'addition

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(\mathbb{P}^1, Z(\lambda)) & \times & H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{((j_\lambda)_*, \lambda_*)} & H^1(\mathbb{P}^1, G) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, Z(\lambda)) & \times & H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) \\
 & & \Vert & & \\
 & & \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

On définit $f_\lambda : H^1(k, Z(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, G)$ comme la composée de l'application naturelle $H^1(k, Z(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, Z(\lambda))$ et de l'addition de $1 \in \mathbb{Z} : H^1(\mathbb{P}^1, Z(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, G)$. On a un diagramme commutatif

$$(***) \qquad \begin{array}{ccccc}
H^1(k, Z(\lambda)) & \xrightarrow{E_\lambda(j)_*} & H^1(\mathbb{P}^1, E_\lambda(G)) & \longrightarrow & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, E_\lambda(G)) \\
\downarrow & f_\lambda & \downarrow{\scriptstyle E_\lambda(.)} & & \\
H^1(\mathbb{P}^1, Z(\lambda)) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1, G) & &
\end{array}$$

Ce diagramme montre que si un $\mathbb{P}^1$-torseur E sous G devient isomorphe sur $\overline{k}$ à $\overline{E_\lambda}$, alors la classe $[E]$ appartient à l'image de f_λ. Immédiatement, on a le

Lemme II.1.4.3. — *L'application f_λ est injective.*

Prenant la somme des applications f_λ, on obtient une application

$$f : \coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, G).$$

On peut alors énoncer une extension du théorème de Grothendieck-Harder pour la cohomologie étale.

Théorème II.1.4.4. — *Soit G un k-groupe réductif déployé et $i : T \hookrightarrow G$ un k-tore maximal déployé avec les notations de II.1.1. Pour tout $\lambda \in \widehat{T}^0$, on note $E_\lambda = i_*(T_\lambda)$, $j_\lambda : Z_G(\lambda) \hookrightarrow G$ et f_λ l'application composée*

$$f_\lambda : H^1(k, Z_G(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, Z_G(\lambda)) \xrightarrow{E_\lambda(j_\lambda)_*} H^1(\mathbb{P}^1, E_\lambda(G)) \xrightarrow{E_\lambda(.)} H^1(\mathbb{P}^1, G)$$

Alors l'application $f : \coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z_G(\lambda)) \xrightarrow{\coprod f_\lambda} H^1(\mathbb{P}^1, G)$ induit une bijection

$$\Big(\coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z_G(\lambda)) \Big) / W \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^1, G).$$

Démonstration : Tout $\overline{\mathbb{P}}^1$–torseur sous G étant isomorphe à un $\overline{E}_\lambda$ (Prop. II.1.3.2), le diagramme $(***)$ ci-dessus montre que l'application $f : \coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, G)$ est surjective. Montrons l'injectivité de l'application quotient $\Big(\coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z(\lambda)) \Big) / W \to H^1(\mathbb{P}^1, G)$. Le th. II.1.3.1. appliqué à $\overline{k}$ montre que si deux éléments de $\coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z(\lambda))$ ont leurs images égales par f, on peut supposer qu'ils proviennent du même $Z(\lambda)$. Or les applications f_λ sont injectives donc f est injective. $\square$

Corollaire II.1.4.5. — *Avec les hypothèses du th. II.1.4.4., on a une bijection naturelle*

$$\widehat{T}^0 / W \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^1_{k_s}, G).$$

$\square$

Une telle égalité entre $H^1(\mathbb{P}^1_{k_s}, G)$ et $H^1(\mathbb{P}^1_{\overline{k}}, G)$ ne vaut pas sur la droite affine, comme on le verra dans le § III.

II.2. — Le cas d'un groupe non connexe

II.2.1. — Soit G un k-groupe réductif déployé et T un k-tore déployé maximal de G. Soit ν un k-schéma en groupes fini constant et G^1 un k-groupe algébrique linéaire tel que l'on ait une suite exacte de faisceaux galoisiens

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G^1 \xrightarrow{p} \nu \longrightarrow 1$$

Notons $W^1 = N_{G^1}(T)/T$ le groupe de Weyl de G^1. La suite exacte ci-dessus induit une suite exacte scindée de faisceaux étales sur $\mathrm{Spec}(k)$

$$1 \longrightarrow W \longrightarrow W^1 \longrightarrow \nu \longrightarrow 1.$$

(pour la surjection $W^1(k) \to \nu(k)$ cf. [Gr1] p.136). On note i^1 l'inclusion naturelle $T \hookrightarrow G^1$ et $j^1_\lambda : Z^1(\lambda) = Z_{G^1}(\lambda) \hookrightarrow G^1$ pour tout $\lambda \in \widehat{T}^0$.

Théorème II.2.1.1. — *Soit G^1/k un groupe algébrique comme ci-dessus.*

a) ([Ram] p.186 th. 9.2) L'application $i^1_* : H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, T) \to H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G^1)$ induit une bijection

$$H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, T)/W^1 \xrightarrow{\sim} H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G^1).$$

b) ([Ram] p.171 remarque 4.4) L'application naturelle

$$H^1_{Zar}(\overline{\mathbb{P}}^1, G^1) \longrightarrow H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, G^1)$$

est un isomorphisme.

II.2.2. — On va calculer l'ensemble $H^1(\mathbb{P}^1, G^1)$. Soit $\lambda \in \widehat{T}^0$. On a un morphisme de groupes algébriques

$$Z(\lambda) \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{(j^1_\lambda, \lambda)} G^1$$

induisant un diagramme commutatif d'addition

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(\mathbb{P}^1, Z^1(\lambda)) & \times & H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{((j^1_\lambda)_*, \lambda_*)} & H^1(\mathbb{P}^1, G^1) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, Z^1(\lambda)) & \times & H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G^1) \\
 & & \| & & \\
 & & \mathbb{Z} & &
\end{array}$$

On définit $f^1_\lambda : H^1(k, Z^1(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, Z^1(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, G^1)$ comme la composée de l'application naturelle $H^1(k, Z^1(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, Z^1(\lambda))$ et de l'addition de $1 \in \mathbb{Z}$: $H^1(\mathbb{P}^1, Z^1(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, G^1)$. Prenant la somme des applications f^1_λ, on obtient une application

$$f^1 : \coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z^1(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, G^1)$$

dont on va montrer qu'elle est surjective.

Théorème II.2.2.1. — *Soit G^1 un k-groupe algébrique tel que l'on ait une suite exacte de faisceaux pour la topologie étale*

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G^1 \longrightarrow \nu \longrightarrow 1$$

où G est un k-groupe réductif déployé et ν un k-groupe fini constant. Soit $i^1 : T \hookrightarrow G^1$ un k-tore maximal déployé et $W^1 = N_{G^1}(T)/T$. Pour tout $\lambda \in \widehat{T}^0$, on note $E_\lambda = i^1_*(T_\lambda)$, $j^1_\lambda : Z_{G^1}(\lambda) \hookrightarrow G$ et f^1_λ l'application composée

$$f^1_\lambda : H^1(k, Z_{G^1}(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, Z_{G^1}(\lambda)) \xrightarrow{E^1_\lambda(j^1_\lambda)_*} H^1(\mathbb{P}^1, E^1_\lambda(G^1)) \xrightarrow{E^1_\lambda(.)} H^1(\mathbb{P}^1, G^1)$$

Alors l'application $f^1 : \coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z_{G^1}(\lambda)) \xrightarrow{\coprod f^1_\lambda} H^1(\mathbb{P}^1, G^1)$ induit une bijection

$$\Big(\coprod_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z_{G^1}(\lambda))\Big)/W^1 \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^1, G^1).$$

Pour la démonstration du théorème II.2.2.1., suivant la preuve du théorème I.1.4.4., on voit aisément qu'il suffit de montrer la proposition suivante analogue de II.1.4.1.

Proposition II.2.2.2. — *Soit G, G^1, T et ν comme dans le th. II.2.2.1. On a $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E^1_\lambda(G^1) = Z^1(\lambda) \times U_\lambda$ où U_λ est le radical unipotent de $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E^1_\lambda(G)$. De plus, le morphisme $Z^1(\lambda) \to \prod_{\mathbb{P}^1/k} E^1_\lambda(G^1)$ est induit par $E^1_\lambda(j^1_\lambda)$.*

Démonstration de la proposition II.2.2.2. : On note $j = j^1_\lambda$ et $j = j_\lambda$. Par torsion par E^1_λ, on a une suite exacte de faisceaux pour la topologie étale sur $\mathbb{P}^1$

$$1 \longrightarrow E_\lambda(G) \longrightarrow E^1_\lambda(G^1) \longrightarrow \nu \longrightarrow 1$$

induisant la suite exacte de cohomologie

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & \prod\limits_{\mathbb{P}^1/k} \big(E_\lambda(G)\big)(k) & \to & \prod\limits_{\mathbb{P}^1/k} \big(E^1_\lambda(G^1)\big)(k) & \to & \nu(k) & \xrightarrow{\varphi} & H^1(\mathbb{P}^1, E_\lambda(G)) \\ & & & & {\scriptstyle E^1_\lambda(j)}\uparrow & & \| & & {\scriptstyle E^{opp}_\lambda}\uparrow \\ & & & & Z^1(\lambda)(k) & \to & \nu(k) & & H^1(\mathbb{P}^1, G) \end{array}$$

où on a rajouté sur le diagramme la torsion $E_\lambda^{opp} : H^1(\mathbb{P}^1, G) \to H^1(\mathbb{P}^1, E_\lambda(G))$ qui est l'inverse de la torsion $E_\lambda : H^1(\mathbb{P}^1, E_\lambda(G)) \to H^1(\mathbb{P}^1, G)$. On va d'abord montrer que tout élément de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ se relève en un élément de $Z^1(\lambda)(k)$. On a un morphisme naturel $W^1 \to \nu$ induisant une surjection $W^1(k) \to \nu(k)$. On rappelle que l'on a une bijection $\widehat{T}^0/W \xrightarrow{\sim} H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$

Lemme II.2.2.3. — *Soit $x \in \nu(k)$ et $w \in W^1(k)$ un relevé de x. Alors*

$$\varphi(x) = E_\lambda^{opp}([w.\lambda]).$$

Démonstration du lemme : Notons $U_0 = \mathrm{Spec}(k[t])$ et $U_1 = \mathrm{Spec}(k[\frac{1}{t}])$ les ouverts naturels de $\mathbb{P}^1$. Le théorème 90 de Hilbert permet de choisir un représentant $\widetilde{w} \in \big(N_{G^1}(T)\big)(k)$ de w. Notons $\widetilde{w}_0 = \widetilde{w} \in G(U_0) = E_\lambda(G(U_0))$, $\widetilde{w}_1 = \widetilde{w} \in G(U_1) = E_\lambda(G(U_1))$ et $(t_{i,j})_{i,j=0,1}$ le cocycle du fibré de Hopf $\mathcal{O}(-1)$. La classe $\varphi(x)$ est représentée par le cocycle $(g_{i,j} = \widetilde{w}_i.(\widetilde{w}_j)^{-1})_{i,j=0,1}$ où le produit est pris dans $E_\lambda(G)$. On a

$$g_{i,j} = \widetilde{w}\lambda(t_{i,j}^{-1})(\widetilde{w})^{-1}\lambda(t_{i,j}) = \big[\big(w.\lambda\big)(t_{i,j}^{-1})\big]\lambda(t_{i,j}^{-1}) \text{ pour } i,j = 0,1.$$

D'où la formule. ∎

Soit $x \in Ker(\varphi)$ et $w \in W^1(k)$ un relevé de x. Alors il existe $w_0 \in W(k)$ tel que $w.\lambda = w_0.\lambda$. On peut donc choisir w tel que $w.\lambda = \lambda$, i.e. $w \in Z^1(\lambda)(k)$. Par suite, $Z^1(\lambda)(k)$ et $\Big(\prod\limits_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda(G)\Big)(k) = Z(\lambda)(k) \times U_\lambda(k)$ engendrent $\Big(\prod\limits_{\mathbb{P}^1/k} E^1_\lambda(G^1)\Big)(k)$. Il est aisé de voir que l'on a un produit semi-direct $\Big(\prod\limits_{\mathbb{P}^1/k} E^1_\lambda(G^1)\Big)(k) = Z^1(\lambda)(k) \times U_\lambda(k)$. Comme on a cette relation pour tout corps k, on a $\prod\limits_{\mathbb{P}^1/k} E^1_\lambda(G^1) = Z^1(\lambda) \times U_\lambda$. ∎

II.2.3. — Un cas particulier. On va préciser le théorème II.2.2.1. en supposant ici que le groupe G du § II.1. est un k-groupe semi-simple adjoint déployé et que le groupe G^1 du

§ II.2. est le k-groupe $Aut(G)$ des automorphismes de G. Le groupe $Aut(G)$ est lisse et on a une suite exacte de faisceaux galoisiens

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{Int} & Aut(G) & \xrightarrow{p} & Aut(\Delta) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \| & & \| & & \\ & & & & G^1 & & \nu & & \end{array}$$

qui est scindée par $s : Aut(\Delta) \xrightarrow{\sim} Aut(G,B,T) \subset Aut(G)$ où $Aut(G,B,T)$ est le sous-groupe de $Aut(G)$ normalisant B et T (cf. [H3]). On prend les notations T, E_λ, E^1_λ,... etc. de II.1.2. et II.2., et on note $\nu = Aut(\Delta)$. Pour tout $\lambda \in \widehat{T}^0$, on note $\nu(\lambda) = Z^1(\lambda)/Z(\lambda)$. Le k-groupe $\nu(\lambda)$ est un k–sous-groupe constant de ν. Les groupes $Z(\lambda)$ et $Z^1(\lambda)$ sont lisses et on a une suite exacte de faisceaux galoisiens

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow Z(\lambda) \xrightarrow{Int} Z^1(\lambda) \xrightarrow{p} \nu(\lambda) \longrightarrow 1$$

Lemme II.2.3.1. —

a) Notons $\widehat{T}^0_+ = \left\{\lambda \in \widehat{T}^0 \mid \lambda \geq 0\right\}$. *On a une bijection*

$$\widehat{T}^0_+ \xrightarrow{\sim} \widehat{T}^0/W.$$

b) Soit $\lambda \in \widehat{T}^0$, $\lambda \geq 0$. *Le scindage* $s : \nu \to Aut(G,B,T)$ *induit un scindage de la suite exacte* $(*)$.

Démonstration : Le a) est bien connu. Montrons le b). Notons encore $s : \nu \to W^1$ la section de p et posons $W^1(\lambda) = N_{Z^1(\lambda)}(T)/T \subset W^1$. On veut montrer que s induit une section $s_\lambda : \nu(\lambda) \to W^1(\lambda)$. Comme $\nu(\lambda)$ est un k-groupe constant, il suffit de voir que pour tout $x \in \nu(\lambda)$, on a $s(x) \in W^1(\lambda)$. Soit $x \in \nu(\lambda)$ et posons $w_1 = s(x) \in W^1$. Il faut montrer que $w_1 \in W^1(\lambda)$. D'après le lemme II.2.2.3., il existe $w_2 \in W^1(\lambda)$ tel que $p(w_1) = p(w_2)$. Posons $w = w_1 w_2^{-1} \in W$. Alors $w_1.\lambda = (w.w_2).\lambda = w.\lambda$. Comme $Aut(\Delta)$ agit par permutation sur Δ, on a $w_1.\lambda \geq 0$ et $w.\lambda \geq 0$. Le a) montre que $w.\lambda = \lambda$. Donc $w_1.\lambda = \lambda$. ∎

Comme ν est un k-groupe constant, on a une bijection $\mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu) = Z^1(k,\nu)$ où $\mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)$ désigne l'ensemble des homorphismes continus du groupe profini $\mathcal{G}$ dans ν. On a ainsi une bijection $\mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)/\nu \xrightarrow{\sim} H^1(k,\nu)$ où $\mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)/\nu$ classifie les morphismes de groupes à conjugaison près. On a donc une application $p_* : H^1(k, G^1) \to \mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)/\nu$. L'ensemble $H^1(k, G^1)$ classifie les k-formes de G. Si $\gamma \in H^1(k, G^1)$, l'élément $p_*(\gamma) \in \mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)/\nu$ représente l' action $*$ du groupe de Galois $\mathcal{G}$ sur le diagramme de Dynkin Δ [T1]. L'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)/\nu$ classifie les k-formes quasi-déployées de G : Si $d \in \mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)$, on note également $d = s_*(d) \in Z^1(k, G^1)$ et on associe le k-groupe quasi-déployé ${}_dG$ qui est le tordu de G par le cocycle d (c'est une torsion externe). Le k-groupe ${}_dG$ contient le sous-groupe de Borel ${}_dB$ et le k-tore maximal ${}_di :_d T \hookrightarrow {}_dG$.

Lemme II.2.3.3. — *Soit G/k un groupe adjoint déployé comme ci-dessus, soit $d \in \mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)$ et ${}_dG$ la k-forme quasi-déployée de G tordue par $s_*(d)$. Alors pour tout $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, {}_dG)$, il existe $\lambda \in \widehat{{}_dT}^0(k)$ tel que $\overline{\gamma} = \overline{[(-\lambda)_*(\mathcal{O}(-1))]}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, {}_dG)$.*

Démonstration : Soit $d \in \mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu)$. Notons $\nu' = \mathrm{Im}(d) \subset \nu$, le k-groupe ν' est un k-groupe constant. Notons $G^{1'}$ le sous-groupe de $Aut(G)$ engendré par G et $s(\nu')$. On a une suite exacte de faisceaux galoisiens

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{Int} & G^{1'} & \xrightarrow{p} & \nu' & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{Int} & Aut(G) & \xrightarrow{p} & Aut(\Delta) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

qui est scindée par $s : \nu' \hookrightarrow G^{1'}$. On note $W^{1'} = N_{G^{1'}}(T)/T$. Pour tout $\lambda \in \widehat{T}^0$, on note $Z^{1'}(\lambda)$, $\nu'(\lambda) = Z^{1'}(\lambda)/Z(\lambda)$, $E_\lambda^{1'}$, $f_\lambda^{1'}$ les objets définis dans le § II.2. Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1,{}_d G)$. On a un diagramme commutatif à lignes horizontales exactes

$$(*) \qquad \begin{array}{ccccc}
H^1(\mathbb{P}^1, {}_dG) & \xrightarrow{Int_*} & H^1(\mathbb{P}^1, {}_dG^{1'}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1, {}_d\nu') \\
 & & {\scriptstyle d(.)}\downarrow & & {\scriptstyle d(.)}\downarrow \\
H^1(\mathbb{P}^1, G) & \xrightarrow{Int_*} & H^1(\mathbb{P}^1, G^{1'}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{P}^1, \nu') \\
{\scriptstyle f}\uparrow & & {\scriptstyle f^{1'}}\uparrow & & \uparrow \\
\bigsqcup_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z(\lambda)) & \to & \bigsqcup_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, Z^{1'}(\lambda)) & \to & \bigsqcup_{\lambda \in \widehat{T}^0} H^1(k, \nu'(\lambda))
\end{array}$$

Le théorème II.2.2.1. montre qu'il existe $\lambda \in \widehat{T}^0$, $\lambda \geq 0$ et $[z] \in H^1(k, Z^{1'}(\lambda))$ tels que $d(Int_*(\gamma)) = f_\lambda^{1'}([z])$, donc

$$(**) \qquad \overline{d(Int_*(\gamma))} = Int_*\Big(\overline{[(-\lambda)_*(\mathcal{O}(-1))]}\Big).$$

On a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} H^1(k, Z(\lambda)) & \xrightarrow{Int_*} & H^1(k, Z^{1'}(\lambda)) & \xrightarrow{p_*} & H^1(k, \nu'(\lambda)) \\ & & [z] & & p_*([z]) \end{array}$$

Posons $d' = p_*(z) \in \mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu'(\lambda))$. Alors $[d'] = [d]$ dans $H^1(k, v)$. Choisissons $\alpha \in \nu'$ tel que $d = \alpha^{-1}.d'.\alpha$ dans $\mathrm{Hom}_c(\mathcal{G}, \nu')$ et posons $\Psi = s(\alpha) \in \mathrm{Aut}(G)(k)$. Le morphisme Ψ agit sur Δ et on a $\Psi \circ \lambda \geq 0$. Quitte à remplacer λ par $\Psi \circ \lambda$, on peut supposer que $\Psi = id_G$ et donc que $p_*(z) = d$. Remarquons que comme $\nu' = \mathrm{Im}(d)$, on a $\nu'(\lambda) = \nu'$. Le lemme II.2.3.1. montre que le cocycle $s_*(d)$ est à valeurs dans $Z^1(\lambda)(k_s)$ et on peut donc tordre λ en ${}_d\lambda \in \widehat{{}_dT}^0(k)$. Par commutation de $Z^1(\lambda)$ et $s_*(d)$, l'égalité $(**)$ devient $Int_*(\overline{\gamma}) = Int_*\Big(\overline{[({}_d\lambda)_*(\mathcal{O}(-1))]}\Big)$. Pour finir, il reste à voir que $\overline{\gamma} = \overline{[({}_d\lambda)_*(\mathcal{O}(-1))]}$. Le théorème de Grothendieck-Harder montre que l'on a des isomorphismes

$$\widehat{{}_dT}^0(\overline{k})/({}_dW)(\overline{k}) \xrightarrow{\sim} H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, {}_dG) \quad et \quad \widehat{{}_dT}^0(\overline{k})/({}_dW^{1'})(\overline{k}) \xrightarrow{\sim} H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, {}_dG^{1'})$$

Il existe $\lambda' \in \widehat{{}_dT}^0(\overline{k})$ tel que $\overline{\gamma} = [\lambda']$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, {}_dG)$. Il existe $w_1 \in ({}_dW^{1'})(\overline{k})$ tel que $\lambda' = w_1.\lambda$. Or $w_1 = w.s(x)$ avec $w \in ({}_dW)(\overline{k})$ et $x \in ({}_d\nu')(\overline{k}) = ({}_d\nu'(\lambda))(\overline{k})$. Donc $\lambda' = (w.s(x)).\lambda = w.\lambda$ et $\overline{\gamma} = [({}_d\lambda)_*(\mathcal{O}(-1))]$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, {}_dG)$. □

II.3. — Le cas d'un groupe réductif

Dans cette section, on retrouve par une méthode différente une description de Raghunathan [Rag3] de l'ensemble $H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$ pour un groupe réductif non nécessairement déployé. Auparavant, on calcule l'ensemble $H^1(\mathbb{P}^1, H)$ pour un groupe quasi-déployé H/k en donnant un résultat analogue de la décomposition de Witt-Tits (II.3.1.3., II.3.2.4.).
II.3.1. — Préliminaires. Soit G/k un groupe réductif, $i : T \hookrightarrow G$ un k-tore déployé maximal, ${}_kW = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl relatif. Notons T_0 un k-tore maximal de G contenant T et $W = N_G(T_0)/T_0$. L'existence d'ordres compatibles sur les systèmes de racines ${}_k\Phi = \Phi(T, G)$ et $\Phi = \Phi(T_0, G)$ (cf. [Bo2] p. 232) et le lemme II.2.3.1.a impliquent le lemme suivant.

Lemme II.3.1.1. — *Soit G, T,... comme ci-dessus. On note*

$$\widehat{T}^0_+ = \Big\{ \lambda \in \widehat{T}^0 \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in_k \Delta \Big\}$$

a) On a une bijection naturelle $\widehat{T}^0_+ \xrightarrow{\sim} \widehat{T}^0/{}_kW$.

b) L'application $\widehat{T}^0 \to \widehat{T_0}^0(\overline{k})$ induit une injection

$$\widehat{T}^0/{}_kW \longrightarrow \widehat{T_0}^0(\overline{k})/W(\overline{k})$$

□

Généralisons les constructions E_λ,... du § II.1. Pour tout $\lambda \in \widehat{T}^0$, on note $E_\lambda^G = i_*(T_\lambda)$, $j_\lambda : Z_G(\lambda) \hookrightarrow G$ qui se tord en un $\mathbb{P}^1$-morphisme $E_\lambda(j_\lambda) : Z_G(\lambda) \to E_\lambda^G(G)$. On note f_λ^G l'application composée

$$f_\lambda^G : H^1(k, Z_G(\lambda)) \to H^1(\mathbb{P}^1, Z_G(\lambda)) \overset{E_\lambda^G(j_\lambda)_*}{\longrightarrow} H^1(\mathbb{P}^1, E_\lambda^G(G)) \overset{E_\lambda^G(.)}{\longrightarrow} H^1(\mathbb{P}^1, G)$$

Proposition II.3.1.2. — *Soit G/k un groupe réductif et $i : T \hookrightarrow G$ un k-tore déployé maximal. Soit $\lambda \in \widehat{T}^0$.*

a) Il existe un k-groupe unipotent k-déployé U_λ^G, sous-groupe de $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G)$ tel que $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G) = Z_G(\lambda) \times U_\lambda^G$. De plus, le morphisme $Z_G(\lambda) \to \prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G)$ est induit par $E_\lambda^G(j_\lambda)$.

b) On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow H^1(k, Z_G(\lambda)) \overset{E_\lambda^G(j_\lambda)_*}{\longrightarrow} H^1(\mathbb{P}^1, E_\lambda^G(G)) \longrightarrow H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, E_\lambda^G(G))$$

c) L'application f_λ^G est injective.

Démonstration : La proposition est connue dans le cas d'un groupe déployé (cf. II.1.4.1., II.1.4.3.) et est donc connue si $k = k_s$. Il faut donc montrer que l'on peut "descendre" cette proposition de k_s à k. Soient G, T et $\lambda \in \widehat{T}^0$ comme dans l'énoncé. Notons T_0 un k-tore maximal contenant T.

a) Le $\mathbb{P}^1$-morphisme $E_\lambda(j_\lambda) : Z_G(\lambda) \to E_\lambda^G(G)$ induit un morphisme $(E^G(j_\lambda))_* : Z_G(\lambda) \to \prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G)$. La proposition II.1.4.1. appliquée à $\lambda \in \widehat{T_0}^0(k_s)$ et au groupe déployé G_{k_s} montre que le morphisme $(E^G(j_\lambda))_*$ fait de $Z_G(\lambda)_{k_s}$ un k_s-sous-groupe de Lévi de $\Big(\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G)\Big)_{k_s}$. Par suite le morphisme $(E^G(j_\lambda))_*$ fait de $Z_G(\lambda)$ un k-sous groupe de Lévi de $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G)$. Passons au radical unipotent U_λ^G de $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G)$. Le groupe $(U_\lambda^G)_{k_s}$ est le radical unipotent de $\Big(\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G)\Big)_{k_s}$ qui d'après la proposition II.1.4.1. est déployé sur k_s. La proposition 0.7.2. montre que le groupe U_λ^G est déployé sur k. On a donc un produit semi-direct $\prod_{\mathbb{P}^1/k} E_\lambda^G(G) = Z_G(\lambda) \times U_\lambda^G$. Les assertions b) et c) se démontrent exactement de la même façon qu'en II.1.4.3. □

On rappelle le théorème suivant permettant de ramener la cohomologie galoisienne d'un groupe réductif quasi-déployé à celle de groupes anisotropes. Ce théorème est la forme cohomologique du théorème de Witt sur les formes quadratiques.

Théorème II.3.1.3. (Borel-Tits). — *Soit H/k un groupe réductif quasi-déployé. Soit $q : S \hookrightarrow H$ un k-tore déployé maximal et B un sous-groupe de Borel de H contenant T. Notons $P_0 = H$, P_1,..., P_l les k-sous-groupes paraboliques de H contenant B. Pour $i = 0,..,l$, on note Z_i un sous-groupe de Lévi de P_i et $H^1(k, Z_i)_{an}$ l'ensemble des classes $[z]$ telles que le groupe ${}_zZ_i$ soit anisotrope (c'est bien défini).*

a) Pour $i = 0,..,l$, l'application $H^1(k, Z_i) \to H^1(k, P_i)$ est bijective et l' application $H^1(k, P_i) \to H^1(k, H)$ est injective.

b) (Witt-type decomposition [T1]) L'application

$$\coprod_{i=0,..,l} H^1(k, Z_i)_{an} \longrightarrow H^1(k, H)$$

est une bijection. □

II.3.2. — Descente quasi-déployée. On a déjà commencé à étudier les torseurs sous un groupe quasi-déployé au § II.2.3. Etendons le lemme II.2.3.3. au cas d'un groupe réductif quasi–déployé (non nécessairement adjoint).

Proposition II.3.2.1. — *Soit H un k-groupe quasi-déployé et $q : S \hookrightarrow H$ un k-tore déployé maximal. Alors, pour tout $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, H)$, il existe $\lambda \in \widehat{S}^0$ tel que $\overline{\gamma} = \overline{[E_\lambda^H]}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, H)$.*

Démonstration : Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, H)$.

$1^{\text{ier cas}}$: Le groupe H est adjoint. On peut supposer que $H = {}_dG$ où G est un groupe adjoint déployé avec les notations de II.2.3. Le lemme II.2.3.3. montre qu'il existe un k-sous-groupe à un paramètre $\upsilon : \mathbb{G}_m \hookrightarrow H$ tel que $\overline{\gamma} = \overline{(-\upsilon_*)(\mathcal{O}(-1))}$. Il existe un k-tore déployé maximal S_υ contenant υ. Or deux k-tores déployés maximaux sont conjugués par un élément de $G(k)$ ([Bo2] th. 20.9 p. 228), donc il existe $g \in G(k)$ tel $S = gS_\upsilon g^{-1}$. Posons $\lambda = g\upsilon g^{-1} : \mathbb{G}_m \hookrightarrow H$. Alors $\gamma \in \widehat{S}^0$ et $\overline{\gamma} = \overline{[E_\lambda^H]}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, H)$.

2^{nd} cas : Le cas général.

Lemme II.3.2.2. — *Soit $\pi : H \to H'$ une l'isogénie centrale de k-groupes réductifs. Si la proposition II.3.2.1. vaut pour le groupe H', elle vaut pour le groupe H.*

Le premier cas et le lemme II.3.2.2. entraînent le la proposition II.3.2.1. En effet, soit H un k-groupe réductif; il existe une k-isogénie centrale $\pi : H \to H' = H_{ad} \times T$ où H_{ad} est le groupe adjoint de H et T le k-tore coradical de H ([SGA3] Exp. XXIII prop. 6.2.4 p. 258). La proposition II.3.2.1. est vraie pour H_{ad} d'après le premier cas et on déduit aisément du lemme II.1.2.1. qu'elle est également vraie pour le tore T. Par suite, la proposition II.3.2.1. est vraie pour le groupe H' et donc pour le groupe H. Montrons le lemme II.3.2.2. Soit $\pi : H \to H'$ une k-isogénie centrale et notons $\mu = \mathrm{Ker}(\lambda)$. Notons S_0 un k-tore maximal contenant S. On a $Z_H(S_0) = S_0$ et donc $\mu \subset S_0$. Notons $S'_0 = S_0/\mu$. Remarquons que S (resp. S') est un k-tore déployé maximal de S_0 (resp. S'_0). Par suite, on a $\widehat{S}^0(k) = \widehat{S_0}^0(k)$ et $\widehat{S'}^0(k) {=} \widehat{S'_0}^0(k)$. On a un diagramme commutatif à lignes horizontales exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^1(\mathbb{P}^1, H) & \xrightarrow{\pi_*} & H^1(\mathbb{P}^1, H') & \longrightarrow & H^2_{fppf}(\mathbb{P}^1, \mu) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, H) & \xrightarrow{\pi_*} & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, H') & \longrightarrow & H^2_{fppf}(\overline{\mathbb{P}}^1, \mu) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| \\
 & & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, S_0) & \xrightarrow{\pi_*} & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, S'_0) & \longrightarrow & H^2_{fppf}(\overline{\mathbb{P}}^1, \mu) \\
 & & \| & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \widehat{S_0}^0 & \longrightarrow & \widehat{S'_0}^0 & &
\end{array}$$

Par hypothèse, la proposition II.3.2.1. vaut pour le groupe H' et une chasse au diagramme montre qu'il existe $\lambda \in \widehat{S_0}^0(\overline{k})$ tel que $\pi_*(\lambda) \in \widehat{S_0}^0(k)$ et $\overline{\pi_*\gamma} = \overline{\pi_*([E^H_\lambda])}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, H')$. Comme $\widehat{S_0}^0(\overline{k}) = \widehat{S_0}^0(k_s) = \widehat{S_0}^0$, on a $\widehat{S_0}^0(k) = \left(\widehat{S_0}^0\right)^{\mathcal{G}}$ et l'injection $\widehat{S_0}^0 \hookrightarrow \widehat{S'_0}^0$ montre que $\lambda \in \widehat{S_0}^0(k) = \widehat{S}^0(k)$. La proposition II.1.3.2. assure que $\overline{\gamma} \in H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, H)$ et le corollaire II.1.3.3. montre que $\overline{\gamma} = \overline{[E^H_\lambda]}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, H)$. □

Théorème II.3.2.3. — *Soit H un k-groupe réductif quasi-déployé, $q : S \hookrightarrow H$ un k-tore déployé maximal de H et ${}_kW = N_G(S)/S$ le groupe de Weyl relatif de H. Alors l'application $f^H : \bigsqcup_{\lambda \in \widehat{S}^0} H^1(k, Z_H(\lambda)) \xrightarrow{\bigsqcup f^H_\lambda} H^1(\mathbb{P}^1, H)$ induit une bijection*

$$\Big(\bigsqcup_{\lambda \in \widehat{S}^0} H^1(k, Z_H(\lambda))\Big)/{}_kW \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^1, H).$$

Démonstration : Soient H, S, ${}_kW$ comme dans l'énoncé. Choisissons un k-tore maximal S_0 de H contenant S et notons $W = N_H(S_0)/S_0)$.

$1^{\text{ière}}$ étape : la surjectivité de f^H. On suit la démonstration du th. II.1.4.4. Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, H)$. La proposition précédente II.3.2.1. fournit $\lambda \in \widehat{S}^0$ tel que $\overline{\gamma} = \overline{[E^H_\lambda]}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, H)$. La proposition II.3.1.2.b montre que $\gamma \in \mathrm{Im}(f^H_\lambda) \subset \mathrm{Im}(f^H)$. Ceci montre la surjectivité de f^H.

2^{nde} étape : l'injectivité de f^H. Le groupe $H_{\overline{k}}$ est déployé et $(S_0)_{\overline{k}}$ est un $\overline{k}$-tore déployé maximal de $H_{\overline{k}}$. Par suite, le théorème de Grothendieck-Harder II.1.3.1. appliqué à $H_{\overline{k}}$

et $(S_0)_{\overline{k}}$ montrent que si deux éléments $[z_1] \in H^1(k, Z_H(\lambda_1))$, $[z_2] \in H^1(k, Z_H(\lambda_2))$ de $\coprod_{\lambda \in \widehat{S}^0} H^1(k, Z_H(\lambda))$ ont leurs images égales par f^H, il existe $w \in W(\overline{k})$ tel que $\lambda_1 = w.\lambda._2$. Le lemme II.3.1.1. assure que l'on peut choisir $w \in {}_kW$ et que l'on peut donc supposer que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Or l'application f^H_λ est injective (II.3.1.2.c), donc $[z_1] = [z_2]$ dans $H^1(k, Z_H(\lambda))$. Ceci montre que l'application f^H est injective. □

On peut rassembler l'extension du théorème de Grothendieck-Harder et la décom–position de Witt-Tits (II.3.1.3.) dans le théorème suivant (voir app. B th. B.1.2.) qui est un analogue de cette décomposition sur la droite projective.

Théorème II.3.2.4. — *Soit H un k-groupe réductif quasi-déployé et $q : S \to H$ un k-tore maximal déployé. Notons ${}_k\Delta$ un système de racines simples de $\Phi(S, H)$. On note $\widehat{S}^0_+ = \Big\{\lambda \in \widehat{S}^0 \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in {}_k\Delta\Big\}$. Pour toute partie $\Theta \subset {}_k\Delta$, on note S_Θ le sous–tore (déployé) de S défini par*

$$S_\Theta = \Big(\bigcap_{\alpha \in \Theta} \mathrm{Ker}(\alpha)\Big)^0, \ \ \widehat{S}^0_{\Theta,+} = \widehat{S}^0_\Theta \cap \widehat{S}^0_+ \ \ \textit{et} \ \ Z_\Theta = Z_H(S_\Theta).$$

On définit une application $F_\Theta : H^1(k, Z_\Theta) \times \widehat{S}^0_\Theta \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, H)$ en posant $F_\Theta(\beta, \lambda) = f^H_\lambda(\beta)$ $(Z_\Theta \subset Z_H(\lambda))$. Alors l'application

$$F : \coprod_{\Theta \subset {}_k\Delta} H^1(k, Z_\Theta) \times \widehat{S}^0_\Theta \xrightarrow{\coprod F_\Theta} H^1(\mathbb{P}^1, H)$$

induit une bijection

$$\coprod_{\Theta \subset {}_k\Delta} H^1(k, Z_\Theta)_{an} \times \widehat{S}^0_{\Theta,+} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^1, H).$$

Démonstration : Soit H, S et ${}_k\Delta$ comme dans l'énoncé. L'ensemble ${}_k\Delta$ définit un sous-groupe de Borel B de H de radical unipotent U et on sait que les $P_\Theta = Z(\Theta).U$ $\Theta \subset {}_k\Delta$ sont les k-groupes paraboliques de H contenant B (cf [Bo] p. 233). Posons ${}_kW = N_G(S)/S$. Le théorème précédent II.3.2.3. et le lemme II.3.1.1. montrent que l'on a une bijection

$$(*) \qquad \bigsqcup_{\lambda \in \widehat{S}^0_+} f^H_\lambda : \bigsqcup_{\lambda \in \widehat{S}^0_+} H^1(k, Z_H(\lambda)) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^1, H).$$

Soit $\Theta_0 \subset_k \Delta$. Grâce à la proposition 21.13 p. 235 de [Bo2], il est aisé de voir que la famille $P_\Theta \cap Z_{\Theta_0}$ $(\Theta_0 \subset \Theta \subset {}_k\Delta)$ est la famille des k-sous-groupes paraboliques de $Z_H(\lambda)$ contenant le k-sous-groupe de Borel $B \cap Z_{\Theta_0}$ de Z_{Θ_0} et que les Z_Θ $(\Theta_0 \subset \Theta \subset {}_k\Delta)$ sont des sous-groupes de Lévi de $P_\Theta \cap Z_{\Theta_0}$ $(\Theta_0 \subset \Theta \subset {}_k\Delta)$. On peut donc écrire la décomposition de Witt-Tits II.3.1.3.b pour le groupe Z_{Θ_0}.

Lemme II.3.2.5. — *Soit $\Theta_0 \subset {}_k\Delta$. On a une bijection.*

$$\coprod_{\Theta_0 \subset \Theta \subset_k \Delta} H^1(k, Z_\Theta)_{an} \xrightarrow{\sim} H^1(k, Z_{\Theta_0}).$$

□

Remplaçant $H^1(k, Z_H(\lambda))$ dans la bijection $(*)$ par la décomposition ci-dessus, on a une bijection naturelle

$$\coprod_{\Theta \subset_k \Delta} H^1(k, Z_\Theta)_{an} \times \widehat{S}^0_{\Theta,+} \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, H)$$

qui est décrite dans le théorème. □

II.3.3. — Torseurs rationnellement triviaux

Proposition II.3.3.1. — *Soit G un k-groupe réductif et $i : T \hookrightarrow G$ un k-tore déployé maximal. Soit $M_0 \in \mathbb{P}^1(k)$. Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, G)$ telle que $\gamma(M_0) = 1 \in H^1(k, G)$. Alors il existe $\lambda \in \widehat{T}^0$ tel que $\overline{\gamma} = \overline{[E^G_\lambda]}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, G)$.*

Démonstration : 1$^{\text{er}}$ cas : Le groupe G est adjoint. D'après [T1], le groupe G est isomorphe à une k-forme interne d'un k-groupe quasi-déployé H. Prenons les notations S, ${}_k\Delta$, Θ,... du th. II.3.2.4. La décomposition de Witt-Tits montre qu'il existe une partie $\Theta \subset_k \Delta$ et $[z] \in H^1(k, Z_\Theta) \hookrightarrow H^1(k, H)$ tel que G soit k-isomorphe à ${}_zH$ et on peut supposer que $G = {}_zH$. La torsion induit un isomorphisme

$$z(.) : H^1(\mathbb{P}^1, G) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^1, H).$$

Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, G)$ tel que $\gamma(0) = 1$. Le théorème II.3.2.4. montre qu'il existe un unique triplet $(\Theta_0, \beta, \lambda)$ avec $\Theta_0 \subset_k \Delta$, $\beta \in H^1(k, Z_{\Theta_0})_{an}$, $\lambda \in \widehat{S}^0_{\Theta_0,+}$ tel que $\gamma = f^H_\lambda(\beta)$. Spécialisant en 0, il vient $z(\gamma)(0) = [z] = \beta \in H^1(k, H)$. La décomposition de Witt-Tits montre que $\Theta = \Theta_0$ et $\beta = [z]$. Comme $Z_\Theta \subset Z(\lambda)$, le sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{G}_m \hookrightarrow H$ induit un sous-groupe à un paramètre ${}_z\lambda : \mathbb{G}_m \hookrightarrow_z H = G$ et on a $\gamma = ({}_z\lambda)_*(\mathcal{O}(-1))$. Comme les k-tores déployés maximaux sont conjugués sous $G(k)$ ([Bo2] th. 20.9), le même argument qu'en II.3.2.2. montre que $\gamma \in \mathrm{Im}\big(i_* : \widehat{T}^0 \to H^1(\mathbb{P}^1, G)\big)$, ce qui implique l'égalité $\overline{\gamma} = \overline{[E^G_\lambda]}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, G)$.

2$^{\text{nd}}$ cas : Le cas général. La proposition étant vraie pour les tores, le même argument qu'en II.3.2.2. permet de ramener le cas général au

Lemme II.3.3.2. — *Soit $\pi : G \to G'$ une k-isogénie centrale de k-groupes réductifs. Si la proposition II.3.3.1. vaut pour le groupe G', elle vaut pour le groupe G.*

Montrons le lemme. Soit $\pi : G \to G'$ une k-isogénie centrale et notons $\mu = \mathrm{Ker}(\lambda)$. Notons T_0 un k-tore maximal contenant T. On a $Z_G(T_0) = T_0$ et donc $\mu \subset T_0$. Notons

$T_0' = T_0/\mu$. Le groupe T_0' est un k-tore maximal de G'. Remarquons que T (resp. T') est un k-tore déployé maximal de T_0 (resp. T_0'). Par suite, on a $\widehat{T}^0(k) = \widehat{T_0}^0(k)$ et $\widehat{T'}^0(k) = \widehat{T_0'}^0(k)$. On a un diagramme commutatif où les horizontales sont exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^1(\mathbb{P}^1, G) & \xrightarrow{\pi_*} & H^1(\mathbb{P}^1, G') & \longrightarrow & H^2_{fppf}(\mathbb{P}^1, \mu) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, G) & \xrightarrow{\pi_*} & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, G') & \longrightarrow & H^2_{fppf}(\overline{\mathbb{P}}^1, \mu) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| \\
 & & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, T_0) & \xrightarrow{\pi_*} & H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, T_0') & \longrightarrow & H^2_{fppf}(\overline{\mathbb{P}}^1, \mu) \\
 & & \| & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \widehat{T}^0 & \longrightarrow & \widehat{T_0'}^0 & &
\end{array}$$

Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, G)$ satisfaisant $\gamma(M_0) = 1$. Par hypothèse, la proposition II.3.3.1. vaut pour le groupe G'. Comme on a $(\pi_*\gamma)(M_0) = 1$, une chasse au diagramme montre qu'il existe $\lambda \in \widehat{T_0}^0(\overline{k})$ tel que $\pi_*(\lambda) \in \widehat{T_0'}^0(k)$ et $\overline{\pi_*\gamma} = \overline{\pi_*([E_\lambda^G])}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, G')$. Comme $\widehat{T_0}^0(\overline{k}) = \widehat{T_0}^0(k_s) = \widehat{T_0}^0$, on a $\widehat{T_0}^0(k) = \left(\widehat{T_0}^0\right)^{\mathcal{G}}$ et l'injection $\widehat{T_0}^0 \hookrightarrow \widehat{T_0'}^0$ montre que $\lambda \in \widehat{T}_0^0(k)$. La proposition II.1.3.2. assure que $\overline{\gamma} \in H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$ et le corollaire II.1.3.3. montre que $\overline{\gamma} = \overline{[E_\lambda^G]}$ dans $H^1(\overline{\mathbb{P}}^1, G)$. ∎

Le théorème suivant a été démontré par Raghunathan comme une conséquence du théorème A sur les torseurs sur la droite affine. Ici, on prend un chemin inverse en démontrant d'abord ce théorème que l'on utilisera pour démontrer le th. A (cf. introduction générale).

Théorème II.3.3.3. ([Rag3] Prop. 3.7 p. 418). — *Soit G/k un groupe réductif. Soit $i : T \hookrightarrow G$ un k-tore déployé maximal et ${}_kW = N_H(T)/T$ le groupe de Weyl relatif. Soit $M_0 \in \mathbb{P}^1(k)$.*

a) Tout $\mathbb{P}^1$-torseur sous G dont la fibre en M_0 est triviale est localement trivial pour la topologie de Zariski, i.e. on a une suite exacte

$$H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, G) \xrightarrow{(ev_{M_0})_*} H^1(k, G).$$

b) Tout $\mathbb{P}^1$-torseur sous G rationnellement trivial est localement trivial pour la topologie de Zariski i.e. on a une suite exacte

$$H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, G) \xrightarrow{\eta_*} H^1(k(t), G).$$

c) L'application naturelle $i_* : H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, T) \to H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$ *induit une bijection*

$$\widehat{T}^0/_k W \xrightarrow{\sim} H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$$

d) ([H2] Satz 3.5) Il y a équivalence entre les assertions

d_1) Le groupe G/k est anisotrope.

d_2) $H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) = 1$.

Démonstration : $1^{\text{ière}}$ étape : Montrons tout d'abord que l'application $i_* : H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, T) \to H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$ induit une surjection

$$H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, T) \to \operatorname{Ker}\Big(H^1(\mathbb{P}^1, G) \overset{(ev_{M_0})_*}{\longrightarrow} H^1(k, G)\Big).$$

Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, G)$ telle que $\gamma(M_0) = 1$. La proposition précédente II.3.3.2. assure l'existence d'un élément $\lambda \in \widehat{T}^0$ tel que $\overline{\gamma} = \overline{[E^G_\lambda]}$. La proposition II.3.1.2.b) montre qu'il existe $\beta \in H^1(k, Z_G(\lambda))$ tels que $\gamma = f^G_\lambda(\beta)$. Spécialisant en M_0 dans cette égalité, il vient $(j_\lambda)_*(\beta) = 1$ dans $H^1(k, G)$. Comme l'application $H^1(k, Z_G(\lambda)) \overset{(j_\lambda)_*}{\longrightarrow} H^1(k, G)$ est injective, on a $\gamma = f^G_\lambda(1) = i_*([T_\lambda])$. Ceci montre le a).

$2^{\text{ième}}$ étape : Montrons l'assertion b) du théorème. Si le corps k est infini, un argument de spécialisation montre que le b) se déduit du a). Supposons le corps k fini. On sait ([Se1] II.14) que $H^1(k, G) = 1$. Le a) montre que $H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{P}^1, G)$ ce qui implique le b).

$3^{\text{ième}}$ étape : Montrons l'assertion c) du théorème. D'après le a), il suffit de montrer que l'application $\widehat{T}^0/_k W \to H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$ est injective. Notons T_0 un k-tore maximal de G contenant T et $W = N_G(T)/T$. D'après le lemme II.3.1.1., l'application $\widehat{T}^0 \to \widehat{T_0}^0(\overline{k})$ induit une injection $\widehat{T}^0/_k W \to \widehat{T_0}^0(\overline{k})/W(\overline{k})$ Par suite, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T}^0/_k W & \longrightarrow & H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widehat{T_0}^0(\overline{k})/W(\overline{k}) & \longrightarrow & H^1_{Zar}(\overline{\mathbb{P}}^1, G) \end{array}$$

Le tore $(T_0)_{\overline{k}}$ est un $\overline{k}$-tore maximal de $G_{\overline{k}}$ donc l'application $\widehat{T_0}^0(\overline{k})/W(\overline{k}) \to H^1_{Zar}(\overline{\mathbb{P}}^1, G)$ est bijective (II.1.3.1.). Ceci montre que l'application $\widehat{T}^0/_k W \to H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$ est injective. Le d) est une conséquence immédiate du c). $\square$

II.3.4. — Applications. Colliot-Thèlène et Ojanguren ont appliqué le théorème A à l'étude des torseurs rationnellement triviaux sur les courbes algébriques. Ici, on traite seulement le cas de $\mathbb{P}^1$ et des anneaux semi-locaux de $\mathbb{A}^1$. Il est à noter que l'on passe par un théorème global (sur $\mathbb{P}^1$) pour établir un résultat local. Cela se reproduira pour les principes de norme (§ IV et § VI). Le *c*) du th. II.3.4.1. sera appliqué dans la partie III.

Théorème II.3.4.1. — *Soit G/k un groupe réductif et $i : T \to G$ un k-tore maximal déployé.*

a) Soit U un ouvert de Zariski de la droite projective. Alors on a une suite exacte

$$H^1_{Zar}(U, G) \longrightarrow H^1(U, G) \xrightarrow{\eta_*} H^1(k(t), G)$$

et une surjection

$$\widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}(U) \longrightarrow H^1_{Zar}(U, G)$$

b) ([CT-O] Th. 3.1. p.109) Soit A un anneau semi-local de $\mathbb{A}^1$. Alors l'application naturelle $H^1(A, G) \to H^1(k(t), G)$ a un noyau trivial.

c) La restriction de toute classe de $H^1(\mathbb{P}^1, G)$ à $\mathbb{A}^1$ est constante, i.e. on a une inclusion

$$\mathrm{Im}\Big(H^1(\mathbb{P}^1, G) \to H^1(\mathbb{A}^1, G)\Big) \subset \mathrm{Im}\Big(H^1(k, G) \to H^1(\mathbb{A}^1, G)\Big)$$

d) La fibre générique de toute classe de $H^1(\mathbb{P}^1, G)$ est constante, i.e. on a une inclusion

$$\mathrm{Im}\Big(H^1(\mathbb{P}^1, G) \xrightarrow{\eta_*} H^1(k(t), G)\Big) \subset \mathrm{Im}\Big(H^1(k, G) \to H^1(k(t), G)\Big)$$

Démonstration : *a*) Soit U un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^1$ de supplémentaire Σ. Soit $\gamma = [E] \in \mathrm{Ker}\Big(H^1(U, G) \xrightarrow{\eta_*} H^1(k(t), G)\Big)$. On pose pour tout $x \in \Sigma$, $\widetilde{E}_x = G/_{\mathrm{Spec}(O_x)}$. Il existe des isomorphismes de G-torseurs $f_x : E_\eta \xrightarrow{\sim} (\widetilde{E}_x)_\eta$. Comme $U \times_{\mathbb{P}^1} \mathrm{Spec}(O_x) = \mathrm{Spec}(k(t))$, on peut recoller les torseurs E et les $\widetilde{E}_x$ ($x \in \Sigma$) en un $\mathbb{P}^1$-torseur $\widetilde{E}$ sous G, qui est rationnellement trivial. Posons $\widetilde{\gamma} = [\widetilde{E}] \in H^1(\mathbb{P}^1, G)$. D'après le théorème précédent II.3.3.3. (b et c), $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Im}\Big(i_* : H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, T) \to H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)\Big)$. Comme $H^1_{Zar}(U, T) \xrightarrow{\sim} \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} Pic(U)$, on a $\gamma \in \mathrm{Im}\Big(i_* : \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} Pic(U) \to H^1_{Zar}(U, G)\Big)$.

b) Soit A un anneau semi-local de la droite affine en les points fermés $(M_i)_{i=1,..,n}$. Soit $\xi \in \mathrm{Ker}(H^1(A, G) \to H^1(k(t), G))$. La classe ξ est la restriction à A d'une classe γ définie sur un ouvert U de la droite affine contenant les points fermés $(M_i)_{i=1,..,n}$. La classe γ est rationnellement triviale, et $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^1) = 1$ donc le *a*) montre que la classe ξ est triviale.

c) Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1, G)$. Quitte à tordre G par un cocycle représentant $\gamma(0)$, on peut supposer que $\gamma(0) = 1$. Le th. II.3.3.3.a montre que $\gamma \in H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$. Comme $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^1) = 1$, le *a*) montre que $\gamma/_{\mathbb{A}^1} = 1$, donc la restriction de γ à $\mathbb{A}^1$ est constante. Le *d*) est une conséquence directe du *c*). ∎

Une application de la suite exacte de Nisnevich I.2.1.1. est le théorème suivant que l'on utilisera au § IV.3.2. Dans ce théorème, l'ensemble $c_\Sigma(\mathbb{P}^1, G)$ est défini au § I.2.1.

Théorème II.3.4.2. — *Soit G/k un groupe réductif et $i : T \hookrightarrow G$ un k-tore déployé maximal. Notons $\varphi : \widehat{T}^0 \to T(k(t))$ le morphisme déduit de $\varphi : \mathbb{Z} \to k(t)^*$ où $\varphi(1) = t^{-1}$. Soit ${}_k\Phi^+$ un système de racines positives de ${}_k\Phi(T,G)$ et $\widehat{T}^0_+ = \{\lambda \in \widehat{T}^0 \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in {}_k\Phi^+\}$.*

a) Soit U un ouvert de Zariski de la droite projective. Notons $\Sigma = \mathbb{P}^1 - U$. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \Big(\prod_{M\in\Sigma} G(\widehat{O}_M)\backslash G(\widehat{k}_M)\Big)/G(U) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, G) \longrightarrow H^1(U, G).$$

Si de plus $\mathrm{Pic}(U) = 1$, *on a une bijection*

$$\widehat{T}^0/W \xrightarrow{\sim} \Big(\prod_{M\in\Sigma} G(\widehat{O}_M)\backslash G(\widehat{k}_M)\Big)/G(U)$$

b) ([Rag3] th. 3.4 p. 416) On a une bijection

$$\widehat{T}^0/W \xrightarrow{\sim} G(\widehat{O}_\infty)\backslash G(\widehat{k}_\infty)/G(k[t])$$

et une décomposition

$$G\Big(k((\frac{1}{t}))\Big) = G\Big(k[[\frac{1}{t}]]\Big).\varphi(\widehat{T}^0_+).G\big(k[t]\big).$$

c) On a

$$c(\mathbb{A}^1, G) = 1.$$

Démonstration : *a*) Prenant les notations de I.2.1., on a

$$c_\Sigma(\mathbb{P}^1, G) = \Big(\prod_{M\in\Sigma} G(\widehat{O}_M)\backslash G(\widehat{k}_M)\Big)/G(U).$$

La suite exacte de Nisnevich I.2.1.1. s'écrit

$$1 \quad \longrightarrow \quad c_\Sigma(\mathbb{P}^1, G) \quad \overset{T_\Sigma}{\longrightarrow} \quad H^1(\mathbb{P}^1, G) \quad \longrightarrow \quad H^1(U, G) \times \prod_{M\in\Sigma} H^1(\widehat{O}_M, G)$$

D'autre part, on a l'injection naturelle $\beta_\Sigma^G : \mathrm{Ker}\Big(H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) \to H^1_{Zar}(U, G)\Big) \longrightarrow c_\Sigma(\mathbb{P}^1, G)$. Comme toute classe de $H^1(\mathbb{P}^1, G)$ dont la restriction à U est triviale provient de $H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$ (th. II.3.3.3.b), l'application β^G_Σ est surjective, donc bijective et on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \Big(\prod_{M\in\Sigma} G(\widehat{O}_M)\backslash G(\widehat{k}_M)\Big)/G(U) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, G) \longrightarrow H^1(U, G).$$

Si de plus $\mathrm{Pic}(U) = 1$, on a $H^1_{Zar}(U, G) = 1$ et l'égalité

$$c_\Sigma(\mathbb{P}^1, G) = \mathrm{Ker}\Big(H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) \to H^1_{Zar}(U, G)\Big) = H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G) \xrightarrow{\sim} \widehat{T}^0/W.$$

b) On prend $U = \mathbb{A}^1$ dans le *a*) et on obtient une bijection

$$\widehat{T}^0/W \xrightarrow{\sim} G(\widehat{O}_\infty)\backslash G(\widehat{k}_\infty)/G(k[t]).$$

L'application résidu $\partial_\infty : T(\widehat{k}_\infty) \to \widehat{T}^0$ (cf. App. A) induit un isomorphisme de groupes $T(\widehat{O}_\infty)\backslash T(\widehat{k}_\infty) \xrightarrow{\sim} \widehat{T}^0$ scindé par $\varphi : \widehat{T}^0 \to T(k(t)) \subset T(\widehat{k}_\infty)$ tel que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T(\widehat{O}_\infty)\backslash T(\widehat{k}_\infty) & \xrightarrow{\partial_\infty} & \widehat{T}^0 = H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(\widehat{O}_\infty)\backslash G(\widehat{k}_\infty) & \to & G(\widehat{O}_\infty)\backslash G(\widehat{k}_\infty)/G(k[t]) = \widehat{T}^0/W \end{array}$$

D'après le th. II.3.3.3.c et le lemme II.3.3.1., on a

$$\widehat{T}^0_+ \xrightarrow{\sim} \widehat{T}^0/W \xrightarrow{\sim} H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, G)$$

et le diagramme ci-dessus montre que

$$G\Big(k((\frac{1}{t}))\Big) = G\Big(k[[\frac{1}{t}]]\Big).\varphi(\widehat{T}^0_+).G\big(k[t]\big).$$

c) D'après le th. II.3.4.1.a, comme $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^1) = 1$, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow H^1(\mathbb{A}^1, G) \xrightarrow{\eta_*} H^1(k(t), G).$$

La suite exacte de Nisnevich montre que $c(\mathbb{A}^1, G) = 1$. $\square$

III. — Torseurs sur la droite affine

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Raghunathan et Ramanathan, cité dans l'introduction générale. Soit k un corps, k_s une clôture séparable de k et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k contenant k_s.

Théorème A [Rag-Ram]. — *Soit G/k un groupe réductif. L'application naturelle $H^1(k,G) \to H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_k, G)$ induit une bijection*

$$H^1(k,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_k, G) \to H^1_{ét}(\mathbb{A}^1_{k_s}, G)\big)$$

La démonstration diffère de la démonstration originale. Cependant, le principe en est le même, inspiré du cas du groupe orthogonal traité par Harder (cf. [Knebusch1]) et utilise également la théorie de Bruhat-Tits. D'après [Rag-Ram], on peut réduire au cas d'un groupe G/k semi-simple, simplement connexe et absolument presque k-simple (§ III.1). Donnons le plan de la démonstration. Soit $\xi \in H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1, G)$. Pour montrer que la classe ξ est constante (i.e. provient de $H^1(k,G)$), on essaie de la prolonger en une classe sur la droite projective. D'après une suite exacte de localisation de Harder (I.3.2.1.), la classe ξ se prolonge à la droite projective si et seulement si la fibre générique de ξ est régulière à l'infini. Plaçons-nous d'abord dans ce cas. La classe ξ est alors la restriction à $\mathbb{A}^1$ d'une classe $\widetilde{\xi}$ de $H^1(\mathbb{P}^1, G)$. Or, la restriction de toute classe de $H^1(\mathbb{P}^1, G)$ à $H^1(\mathbb{A}^1, G)$ est constante, donc la classe ξ est constante (II.3.4.1.). Pour terminer la démonstration, il reste à voir que la fibre générique de ξ est régulière à l'infini : c'est la partie délicate de la démonstration où l'on utilise les applications résidus de Bruhat-Tits. Modulo une astuce empruntée à une nouvelle démonstration de la suite exacte de Milnor-Tate (cf. appendice B) qui consiste à introduire une indéterminée supplémentaire, on se sert du cas déjà traité (i.e. le cas où la fibre générique de ξ est régulière à l'infini) pour prouver que le cas régulier est le seul (III.2.2.1.).

III.1. — Préliminaires

III.1.1. — Réductions

Lemme III.1.1.1. [Rag-Ram] § 2. — *Si le théorème A est vrai pour les groupes semi-simples et simplement connexes, alors le théorème A est vrai pour tout groupe réductif.*
□

Lemme III.1.1.2. — *Si le théorème A est vrai pour les groupes semi-simples, simplement connexes et absolument presque k-simples, alors le théorème A est vrai pour tout groupe réductif.*

Démonstration : D'après le lemme III.1.1.1., il faut montrer que si le th. A vaut pour les groupes semi-simples, simplement connexes et absolument presque k-simples, il vaut pour les groupes semi-simples et simplement connexes. Soit G un k-groupe simplement connexe. On sait [T1] qu'il existe une famille $(k_i/k)_{i=1,..,n}$ d'extensions séparables finies de corps et une famille $(G_i/k_i)_{i=1,..,n}$ de groupes absolument presque k_i–simples tels que $G = \prod_{i=1,..,n} R_{k_i/k} G_i$. Le th. A passant au produit, on peut supposer que $n = 1$. Posons $d_1 = [k_1 : k]$. Grâce au théorème de l'élément primitif, on a un isomorphisme

$k_1 \otimes_k k_s \xrightarrow{\sim} (k_s)^{d_1}$. Le lemme de Shapiro assure l'égalité $H^1(k, R_{k_1/k}(G_1)) = H^1(k_1, G_1)$ et on a un diagramme commutatif de restrictions

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{A}^1, R_{k_1/k}G_1) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}, R_{k_1/k}G_1) \\ \| & & \| \\ H^1(\mathbb{A}^1_{k_1}, G_1) & \longrightarrow & H^1((\mathbb{A}^1_{k_s})^{d_1}, G_1) \\ {\scriptstyle j^*}\downarrow & & \| \\ H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}, G_1) & \xrightarrow{\Delta^*} & H^1((\mathbb{A}^1_{k_s})^{d_1}, G_1) \end{array}$$

où Δ est l'application diagonale $k_s \to (k_s)^{d_1}$. Le premier cas appliqué à k_1 assure que $H^1(k_1, G_1) = H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_{k_1}, G_1)$. L'application Δ^* étant injective, on a donc $H^1(k_1, G_1) = \mathrm{Ker}\big(H^1(\mathbb{A}^1_{k_1}, G_1) \to H^1((\mathbb{A}^1_{k_s})^{d_1}, G_1)\big)$. Donc $H^1(k, R_{k_1/k}G_1) = H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_k, R_{k_1/k}G_1)$. $\square$

III.1.2. — Spécialisation et suite exacte de localisation. Soit G/k un groupe réductif. On sait (Th. I.1.2.2.) que pour tout point fermé M de $\mathbb{P}^1$, l'application naturelle $\ell_M : H^1(\widehat{O}_M, G) \to H^1(\widehat{k}_M, G)$ est injective (I.1.2.4.). Cela permet de définir une application de spécialisation en M

$$ev_M^* : \mathrm{Ker}\Big(H^1(k(t), G) \to H^1(\widehat{k}_M, H)/H^1(\widehat{O}_M, G)\Big) \to H^1(k(M), G).$$

Si $\beta \in \mathrm{Ker}\Big(H^1(k(t), G) \to H^1(\widehat{k}_M, G^1)/H^1(\widehat{O}_M, G)\Big)$, on notera parfois $(M) = ev_M^*(\beta)$.

Lemme II.1.2.1. — *Soit H/k un groupe algébrique réductif. Alors l'application*

$$H^1(k, H) \to H^1(k(t), H)$$

est injective.

Démonstration : Si le corps k est infini, le lemme est clair via un argument de spécialisation. Si le corps k est fini, l'ensemble $H^1(k, H)$ est trivial ([Se1] II.14) et il n'y a rien à démontrer. $\square$

Une conséquence de la suite exacte de localisation de Harder I.3.2.1. est la proposition suivante.

Proposition III.1.2.2. — *Soit G/k un groupe réductif. On a une suite exacte d'ensembles pointés*

$$1 \longrightarrow H^1(k,G) \longrightarrow H^1(k(t),G) \longrightarrow \coprod_{M\in\mathbb{P}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,G)/H^1(\widehat{O}_M,G)$$

Démonstration : D'après le lemme précédent, il suffit de montrer l'exactitude de la suite en $H^1(k(t),G)$. Soit $\beta=\beta(t)\in \mathrm{Ker}\Big(H^1(k(t),G)\longrightarrow \coprod_{M\in\mathbb{P}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,G)/H^1(\widehat{O}_M,G)\Big)$. La suite exacte de Harder I.3.2.1. montre qu'il existe $\gamma\in H^1(\mathbb{P}^1,G)$ satisfaisant $\gamma_\eta=\beta$. Le t. II.3.4.1.d montre que $\beta\in \mathrm{Im}\Big(H^1(k,G)\to H^1(k(t),G)\Big)$. ∎

2. — Démonstration du th. A

La preuve du th. A se réduit au cas d'un groupe simplement connexe absolument presque k-simple (III.1.1.2.). Soit donc G/k un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque k-simple. Soit $\xi\in H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1,G)$. On note $\xi_\eta\in H^1(k(t),G)$ la classe générique de ξ. On veut montrer que l'on peut prolonger la classe ξ à la droite projective. On va séparer les deux cas de l'introduction, c'est à dire les cas

$(\xi_\eta)_{\widehat{k}_\infty}\in \mathrm{Im}(H^1(\widehat{O}_\infty,G)\to H^1(\widehat{k}_\infty,G))$ et

$(\xi_\eta)_{\widehat{k}_\infty}\notin \mathrm{Im}(H^1(\widehat{O}_\infty,G)\to H^1(\widehat{k}_\infty,G))$.

III.2.1. — Le premier cas

Proposition III.2.1.1. — *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque k-simple. Soit $\xi\in H^1(\mathbb{A}^1,G)$ tel que*

$$(\xi_\eta)_{\widehat{k}_\infty}\in \mathrm{Im}\big(H^1(\widehat{O}_\infty,G)\to H^1(\widehat{k}_\infty,G)\big).$$

Alors ξ est constante, i.e. $\xi\in \mathrm{Im}\big(H^1(k,G)\to H^1(\mathbb{A}^1,G)\big)$.

Démonstration : Soit ξ comme dans l'énoncé. La suite exacte de Harder I.3.2.1. assure l'existence d'une classe $\widetilde{\xi}$ de $H^1(\mathbb{P}^1,G)$ prolongeant ξ. Le théorème II.3.4.1.c montre que la restriction de $\widetilde{\xi}$ à $\mathbb{A}^1$ est une classe constante. Donc ξ est constante. ∎

III.2.2. — Le second cas.

Proposition III.2.2.1. — *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque k-simple. On a dans la catégorie des ensembles pointés une suite exacte*

$$1 \to H^1(k, G) \to H^1(k(t), G) \to H^1(\widehat{(k_s)}_\infty, G) \times \coprod_{M \in \mathbb{A}^1_k} H^1(\widehat{k}_M, G)/H^1(\widehat{O}_M, G).$$

où $\widehat{(k_s)}_\infty = k_s\big((\frac{1}{t})\big)$.

Si G est le groupe orthogonal $O(q)$ d'une forme quadratique hyperbolique, l'injection $H^1(k, O(q)) \hookrightarrow W(k)$ (cf. [Se1]) montre que cette suite exacte est l'analogue de la suite exacte de Milnor-Tate sur les groupes de Witt (cf. [L] th. 3.1 p. 265 et appendice B). Dans l'appendice B, on démontre l'exactitude en $W(k(t))$ de la suite exacte de Milnor-Tate et la démonstration ci-dessous est une démonstration adaptée au groupes algébriques linéaires, via la théorie de Bruhat-Tits.

Démonstration : D'après la proposition III.1.2.2., on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow H^1(k, G) \longrightarrow H^1(k(t), G) \longrightarrow \coprod_{M \in \mathbb{P}^1_k} H^1(\widehat{k}_M, G)/H^1(\widehat{O}_M, G).$$

Il faut donc montrer l'exactitude en $H^1(k(t), G)$ de la suite d'ensembles pointés de la proposition III.2.2.1. Posons $F = k(t)$.

$$\text{Soit} \quad \beta \in \mathrm{Ker}\Big(H^1(F, G) \to H^1(\widehat{(k_s)}_\infty, G) \times \coprod_{M \in \mathbb{A}^1_k} H^1(\widehat{k}_M, G)/H^1(\widehat{O}_M, G)\Big).$$

On doit montrer que β est régulière à l'infini. D'après la suite exacte de Harder I.3.2.1., la classe β est la restriction de $\gamma \in H^1(\mathbb{A}^1, G)$. Quitte à tordre le groupe G par un cocycle représentant $\gamma(0)$, on peut supposer que $\gamma(0) = 1$ et on est ramené à montrer que $\beta = 1$. On va utiliser ici les applications résidus de la théorie de Bruhat-Tits, c'est le point crucial de la démonstration du th. A. Comme $\beta_{\widehat{k_{s,\infty}}} = 1$ dans $H^1(\widehat{(k_s)}_\infty, G)$, le théorème I.1.4.2. assure l'existence d'un entier de "torsion" d tel que

$$\beta_{\widehat{k}_\infty(\frac{1}{\sqrt[d]{t}})} \in \mathrm{Im}\Big(H^1\big(\widehat{O}_\infty[\frac{1}{\sqrt[d]{t}}], G\big) \longrightarrow H^1\big(\widehat{k}_\infty(\frac{1}{\sqrt[d]{t}}), G\big)\Big).$$

L'astuce est d'introduire une indéterminée supplémentaire u. Posons $L = k(u, t, x)$ où $x = \sqrt[d]{ut}$.

$$\begin{array}{ccc} & L = k(u,t,x) & \\ k(u) & & F = k(t) \\ & k & \end{array}$$

Appliquons la suite exacte de localisation sur $\mathbb{P}^1$ au corps de base $k(u)$ et au corps à une indéterminée $L = k(u)(x)$. On a la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H^1(k(u), G) & \longrightarrow & H^1(k(u)(x), G) & \longrightarrow & \coprod_{N \in \mathbb{P}^1_{k(u)}} H^1(\widehat{k}_N, G)/H^1(\widehat{O}_N, G) \\ & & \gamma(u) & & \beta_L = \beta(\frac{x^d}{u}) & & \end{array}$$

On a forcé la classe β_L à être régulière à l'infini. Par suite,

$$\beta_L \in \mathrm{Im}\big(H^1(k(u), G) \to H^1(L, G)\big),$$

définissant une classe $\gamma(u) \in H^1(k(u), G)$. On a $\beta(\dfrac{x^d}{u}) = \gamma(u)$. Spécialisant en $x = 0$ (cf. III.1.2.), il vient $\gamma(u) = \beta(0) = 1$ et on a $\beta_L = 1$. Comme L est isomorphe au corps à une indéterminée $F(x)$, le lemme II.1.2.1. assure que l'application $H^1(F, G) \to H^1(F(x), G) = H^1(L, G)$ est injective. Donc $\beta = 1$. $\square$

Proposition III.2.2.3. — *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque k-simple. Alors le th. A vaut pour le groupe G, i.e. on a une bijection*

$$H^1(k, G) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_k, G).$$

Démonstration : La combinaison des propositions III.2.1.1. et III.2.2.1. montre le théorème A pour le groupe G. En effet, soit $\xi \in H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_k, G)$. La proposition précédente assure que la fibre générique de ξ est constante, donc en particulier régulière à l'infini. La proposition III.2.1.1 assure que la classe ξ est constante. L'application naturelle $H^1(k, G) \to H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}/\mathbb{A}^1_k, G)$ est donc une bijection. $\square$

Le lemme III.1.1.2. et la proposition III.2.2.3. entraînent le théorème A.

III.3. — Applications

Remarquons tout d'abord que comme on a la suite exacte $1 \to H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}, G) \xrightarrow{\eta_*} H^1(k_s(t), G)$ pour tout groupe réductif G/k (II.3.4.1.a), on peut écrire le th. A comme

$$H^1(k, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^1(\mathbb{A}^1_k, G) \to H^1(k_s(t), G)\big).$$

Par suite, la suite exacte de Harder I.3.2.1. implique le

Corollaire III.3.1. — *Soit G/k un groupe réductif. On a dans la catégorie des ensembles pointés une suite exacte*

$$1 \to H^1(k, G) \to H^1(k_s(t)/k(t), G) \to \coprod_{M \in \mathbb{A}^1_k} H^1(\widehat{k}_M, G)/H^1(\widehat{O}_M, G).$$

□

On suppose que k est parfait. Soit G/k un groupe réductif connexe. On sait d'après un théorème de Steinberg [St] que $H^1(k_s(t), G) = 1$. Par suite, on a

$$H^1(k, G) = H^1(\mathbb{A}^1, G) \qquad (k \quad \text{parfait})$$

Si k n'est pas parfait, les ensembles $H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}, PGL_n)$ et à fortiori $H^1(k_s(t), PGL_n)$ ne sont pas triviaux en général [K-O-Sal]. L'application $H^1(\mathbb{A}^1_{k_s}, PGL_n) \longrightarrow H^1(\mathbb{A}^1_{\overline{k}}, PGL_n)$ n'est donc pas bijective en général, on a donc une différence avec le cas de $\mathbb{P}^1$.

IV. — R–équivalence et principe de norme

Soit k un corps parfait. On note $\overline{k}$ une clôture séparable de k et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. On fixe pour les § 0, 2, 3 une k–isogénie $\lambda : \widetilde{G} \to G$ centrale de groupes réductifs définis sur k, de noyau le k–groupe fini μ de type multiplicatif. La suite exacte de cohomologie $fppf$ s'écrit, $G(k)$ étant le groupe des k–points rationnels de G :

$$1 \longrightarrow \mu(k) \longrightarrow \widetilde{G}(k) \xrightarrow{\lambda_k} G(k) \xrightarrow{\varphi_k} H^1_{fppf}(k,\mu) \xrightarrow{i_k} H^1(k,\widetilde{G})$$

On note $C_\lambda(k)$ le groupe abélien $G(k)/\lambda(\widetilde{G}(k))$ identifié à $\mathrm{Ker}(i_k)$. Soit L/k une extension finie de corps. On note $N_{L/K} : H^1_{fppf}(L,\mu) \to H^1_{fppf}(k,\mu)$ la norme (ou corestriction). Une question naturelle se pose. A–t–on $N_{L/k}(C_\lambda(L)) \subset C_\lambda(k)$? Pour les corps de nombres, la réponse est positive si le groupe $\widetilde{G}$ est semi-simple simplement connexe, comme l'a remarqué Deligne ([Del] p. 277).

Définition. — *Si $N_{L/k}(C_\lambda(L)) \subset C_\lambda(k)$, on dit que λ satisfait au principe de norme pour l'extension L/k.*

Bans cette section, on établit un principe de norme pour un sous-groupe de $C_\lambda(k)$, qui donne une nouvelle démonstration du principe de norme de Knebusch (cf. [L] th. 2.3 p. 198).

Théorème B. — *Soient $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une k-isogénie centrale de groupes réductifs définis sur un corps parfait k, de noyau le k-groupe commutatif fini μ et L/k une extension finie de corps. Soit $R(k,G) \subset G(k)$ le sous-groupe (normal) des éléments R-équivalents à e. Notons*
$N_{L/k} : H^1_{fppf}(L,\mu) \to H^1_{fppf}(k,\mu)$ la corestriction de L à k et $\varphi_k : G(k) \to H^1_{fppf}(k,\mu)$ l'application caractéristique associée à λ. Alors, on a

$$N_{L/k}\Big(\varphi_L(R(L,G))\Big) \subset \varphi_k(R(k,G))$$

Cela nous permet de donner des conditions suffisantes sur l'existence d'un principe de norme.

Théorème. — *Soient $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une isogénie centrale de k–groupes semi–simples de noyau μ, et L/k une extension finie de corps. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *a) Le groupe $G_L(L)/R$ est trivial.*
- *b) Le groupe $G_{ad,L}(L)/R$ est trivial.*
- *c) La L–variété $G_{ad,L}$ est L–rationnelle.*
- *d) Le groupe G_L est quasi–déployé.*

Alors λ satisfait le principe de norme pour l'extension L/k.

IV.1. — Notations et rappels.

Soit μ un k-groupe fini de type multiplicatif. On a la suite exacte de localisation

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow H^1_{fppf}(k,\nu) \longrightarrow H^1_{fppf}(k(t),\nu) \xrightarrow{\oplus\partial_M} \oplus\nu(-1)(k(M)) \longrightarrow 0$$

où M parcourt les points fermés de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$.

Soit $c \in H^1(k(t),\mu)$. Si $\partial_M(c)$ est non nul, on dit que le point M est un pôle de c, sinon on dit que c est régulière au point M et on peut alors spécialiser c en M obtenant $c(M) \in H^1_{fppf}(k(M),\mu)$.

Définition IV.1.1.1. — *On appelle application degré, notée d^0, la flèche résidu $\partial_\infty : H^1_{fppf}(k(t),\mu) \to \mu(-1)(k)$ au point à l'infini de $\mathbb{P}^1_k$.*

La "formule des résidus" s'écrit alors

$$d^0(c) + \sum N_{k(M)/k}(\partial_M(c)) = 0\,.$$

où M parcourt les points fermés de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$.

IV.2. — R–équivalence et isogénie

Soit X une k–variété. La R–équivalence (Manin, cf. [Man]) est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $X(k)$ engendrée par la relation élémentaire :

Deux points x_0, $x_1 \in X(k)$ sont élémentairement reliés si il existe une k–application rationnelle $f : \mathbb{P}^1_k \to X$ définie en 0 et 1 telle que $f(0) = x_0$ et $f(1) = x_1$.

Soit H un k-groupe algébrique linéaire. On note $R(k,H)$ la classe de R–équivalence de l'élément neutre de $H(k)$.

Lemme IV.2.1. — *a) $R(k,H)$ est un sous–groupe normal de $H(k)$ et $H(k)/R \xrightarrow{\sim} H(k)/R(k,H)$.*

b) Deux points de $H(k)$ R–équivalents le sont élémentairement.

c) Si le corps k est infini, l'extension des scalaires de k à $k(t)$ induit un isomorphisme $H(k)/R \cong H(k(t))/R$.

Démonstration : L'assertion *a*) est évidente, la relation élémentaire étant compatible avec la multiplication dans $H(k)$. Montrons l'assertion *b*). Soient h et h' deux points de $H(k)$ R–équivalents. Il existe une chaîne $h_0 = h$, h_1,...,$h_n = h'$ où h_i est directement R–équivalent à h_{i+1} pour $i = 0,..,n-1$. Notons e l'élément neutre de $H(k)$. Par induction, on peut supposer $n = 2$ et $h_0 = e$. Il existe $h_0(t)$ et $h_1(t)$ dans $H(k(t))$ régulières en 0 et 1 satisfaisant $h_0(0) = e$, $h_0(1) = h_1$, $h_1(0) = h_1$ et $h_1(1) = h_2$. Posons $\varphi(t) = h_1(t)(h_0(1-t))^{-1}$. Alors $\phi(t)$ est régulière en 0 et 1 et satisfait $\phi(0) = e = h_0$ et $\varphi(1) = h_2$. Donc h_0 et h_1 sont directement R–équivalents.

Montrons *c*). Il y a une flèche naturelle de restriction $r : H(k)/R \to H(k(t))/R$. Montrons que r est un isomorphisme. Soit $h(t) \in H(k(t))$. Le corps k est infini donc il existe un point rationnel t_0 de la droite affine où $h(t)$ est régulière. L'élément $h(t)$ est directement R–équivalent à $h(t_0)$. Ceci montre la surjectivité de r. Soit un élément du noyau de r représenté par h. L'assertion *b*) assure l'existence de $h(t,u)$ dans $H(k(t,u))$ tel que $h(t,0) = e$ et $h(t,1) = h$. Il existe un point t_0 de k tel que $h(t_0,u)$ soit régulière en 0 et 1. On a $h(t_0,0) = e$ et $h(t_0,1) = h$. Ceci montre l'injectivité de r. □

Il est aisé de voir que si H est k–rationnel, $H(k)/R$ est trivial. Plus généralement, on sait que si k est un corps de caractéristique nulle ([CT-Sa1] via Hironaka) que l'ensemble $H(k)/R$ est un invariant birationnel de la catégorie des k–groupes algébriques connexes. L'isogénie du § 0 induit un morphisme de groupes $\lambda : \widetilde{G}(k)/R \to G(k)/R$ dont on se propose de calculer le conoyau.

Proposition IV.2.2. — *Le groupe $C_\lambda(k(t))$ est stable par spécialisation i.e. si $c(t) \in C_\lambda(k(t)) \subset H^1(k(t),\mu)$ et si M_0 est un point rationnel de $\mathbb{P}^1_k$ où c est régulier, alors $c(M_0) \in C_\lambda(k)$.*

Démonstration de 2.2. : Soit $c(t) \in C_\lambda(k(t))$ régulier en M_0 . On sait que $c(t)$ est la restriction d'un élément c de $H^1(O_{M_0},\mu)$. Le théorème II.3.4.1.c assure que le diagramme suivant est exact.

$$\begin{array}{ccc}
1 & & 1 \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^1_{fppf}(O_{M_0},\mu) & \longrightarrow & H^1(O_{M_0},\widetilde{G}) \\
c & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1_{fppf}(k(t),\mu) & \longrightarrow & H^1(k(t),\widetilde{G}) \\
c & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Le diagramme donne $c \in \mathrm{Ker}\big(H^1_{fppf}(O_{M_0},\mu) \to H^1_{fppf}(O_{M_0},\widetilde{G})\big)$. Ecrivons les flèches d'évaluations (verticales) induites par le morphisme $ev_{M_0} : O_{M_0} \to k$.

$$\begin{array}{ccc}
H^1(O_{M_0},\mu) & \longrightarrow & H^1(O_{M_0},\widetilde{G}) \\
c & \longrightarrow & 1 \\
{\scriptstyle ev^*_{M_0}}\downarrow & & {\scriptstyle ev^*_{M_0}}\downarrow \\
H^1_{fppf}(k,\mu) & \longrightarrow & H^1(k,\widetilde{G}) \\
c(M_0) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

On a bien $c(M_0) \in C_\lambda(k)$. $\square$

On peut alors définir la R–équivalence sur $C_\lambda(k)$ comme la relation engendrée par la relation élémentaire suivante : deux éléments c_0 et c_1 de $C_\lambda(k)$ sont élémentairement R–équivalents s'il existe $c(t) \in C_\lambda(k(t))$ régulier en 0 et 1 satisfaisant $c(0) = c_0$ et $c(1) = c_1$. On note $R(k, C_\lambda)$ la classe d'équivalence de l'élément neutre et un lemme analogue au lemme $2-1$ vaut. On a donc $C_\lambda(k)/R = C_\lambda(k)/R(k, C_\lambda)$.

Proposition IV.2.3. — *On a une suite exacte de groupes :*

$$\widetilde{G}(k)/R \longrightarrow G(k)/R \longrightarrow C_\lambda(k)/R \longrightarrow 1\,.$$

Démonstration : Une seule chose est à prouver : l'exactitude de la suite en $G(k)/R$. Notons A l'anneau semi-local de la droite affine aux points 0 et 1. On notera $[\ \ ]_R$ les classes de R–équivalence. Soit $[g]_R \in \mathrm{Ker}(G(k)/R \to C_\lambda(k)/R)$. Alors il existe $c(t) \in C_\lambda(k(t))$ provenant de $H^1_{fppf}(A,\mu)$ satisfaisant $c(0) = 1$ et $c(1) = \varphi(g)$. Le théorème II.3.4.1.c assure que le diagramme d'ensembles pointés suivant est exact.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & 1 \\
 & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
G(A) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(A,\mu) & \longrightarrow & H^1(A,\widetilde{G}) \\
g(t) & \longrightarrow & c(t) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
G(k(t)) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(k(t),\mu) & \longrightarrow & H^1(k(t),\widetilde{G}) \\
 & & c(t) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Le diagramme montre que $c(t)$ se relève en $g(t)$ dans $G(A)$ et $g(0)$ est R–équivalent à $g(1)$. Or $g(0), g(1)g^{-1} \in \lambda(\widetilde{G}(k))$. Par suite $[g]_R \in \mathrm{Im}(\widetilde{G}(k)/R \to G(k)/R)$. Ceci montre l'exactitude. $\square$

IV.3. — Principe de norme

IV.3.1. — *Fonctorialité*. Soit un diagramme d'isogénies de k-groupes réductifs connexes

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
 & \mu^1 \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & \mu^1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{G} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda_1"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu^2 \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d] & G \arrow[r] & 1 \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

On pose $C_{\lambda_1}(k) = \mathrm{Ker}(H^1(k,\mu^1) \to H^1(k,G))$ et $C_{\lambda_2}(k) = \mathrm{Ker}(H^1(k,\mu^2) \to H^1(k,G'))$.

Lemme IV.3.1.1. — *Soit L/k une extension finie de corps. Dans la situation ci-dessus,*

a) Si $C_{\lambda_1}(k)/R = 1$ et $C_{\lambda_2}(k)/R = 1$ alors on a $C_\lambda(k)/R = 1$.

b) La trivialité de $C_\lambda(k)/R$ implique la trivialité de $C_{\lambda_2}(k)/R$.

c) Si λ satisfait le principe de norme pour L/k, alors λ_1 et λ_2 satisfont le principe de norme pour L/k. □

Démonstration : Les assertions a) et b) résultent de l'exactitude du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G}(k)/R \arrow[r] \arrow[d] & G(k)/R \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_\lambda(k)/R \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
G'(k)/R \arrow[r] \arrow[d] & G(k)/R \arrow[r] & C_{\lambda_2(k)}/R \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
C_{\lambda_1(k)}/R \arrow[d] & & 1 & \\
1 & & &
\end{tikzcd}$$

Montrons c). On suppose que l'isogénie λ satisfait au principe de norme pour l'extension L/k. Soit $c_2 \in C_{\lambda_2}(L)$. On a un diagramme de suites exactes d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{G}(L) & \xrightarrow{\lambda} & G(L) & \xrightarrow{\varphi} & H^1_{fppf}(L,\mu) \\
\downarrow \lambda_1 & & \| & & \downarrow \lambda_1 \\
\widetilde{G}(L) & \xrightarrow{\lambda_2} & G(L) & \xrightarrow{\varphi_2} & H^1_{fppf}(L,\mu^2)
\end{array}$$

qui assure que c_2 est l'image de $c \in C_\lambda(L)$. Comme $N_{L/k}(c) \in C_\lambda(k)$ et par commutativité du diagramme de corestrictions

$$\begin{array}{ccc}
H^1_{fppf}(L,\mu) & \xrightarrow{N_{L/k}} & H^1_{fppf}(k,\mu) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1_{fppf}(L,\mu^2) & \xrightarrow{N_{L/k}} & H^1_{fppf}(k,\mu^2)
\end{array}$$

on a $N_{L/k}(c_2) \in C_{\lambda_2}(k)$.

Soit $c_1 \in C_{\lambda_1}(L)$. Notons c l'image de c_1 par le morphisme $H^1_{fppf}(L,\mu^1) \to H^1_{fppf}(L,\mu)$. De

$$\begin{array}{ccc}
H^1_{fppf}(L,\mu^1) & = & H^1_{fppf}(L,\mu^1) \\
c_1 & & c_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^1_{fppf}(L,\mu) & \longrightarrow & H^1(L,\widetilde{G}) \\
c & & 1
\end{array}$$

on a $c \in C_{\lambda_1}(L)$. Comme $N_{L/k}(c) \in C_\lambda(k)$, il est clair que $N_{L/k}(c_1) \in C_{\lambda_1}(k)$. $\square$

IV.3.2. — *Calcul de* $C_\lambda(k(t))$.

Pour tout point fermé M de $\mathbb{P}^1$, le morphisme de groupe $\partial_M \circ \varphi_{\widehat{k}_M} : G(\widehat{k}_M) \to H^1_{fppf}(\widehat{k}_M,\mu) \to \mu(-1)(k(M)$ induit une application (cf. § I.1.1.)

$$\varphi_M : G(\widehat{k}_M)/G(\widehat{O}_M) \longrightarrow \mu(-1)(k(M)).$$

Proposition IV.3.2.1. — *Soit $c = c(t) \in H^1_{fppf}(k(t), \mu)$ et M_0 un point rationnel où la classe c est régulière. Alors c appartient à $C_\lambda(k(t))$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

a) $\partial_M(c) \in \mathrm{Im}(\varphi_M)$ *pour tout point fermé M de $\mathbb{A}^1_k$.*

b) $c(M_0) \in C_\lambda(k)$.

Il y a deux façons d'établir cette proposition, l'une en utilisant la description des $\mathbb{P}^1$-torseurs rationnellement triviaux, l'autre en utilisant le th. A. La première preuve n'utilise pas la théorie de Bruhat-Tits et la seconde est la preuve originale de [Gil1] dont le cas du groupe spécial orthogonal fournit un exemple ([L] th. 3.4 p. 268).

Première démonstration de la proposition IV.3.2.1. (n'utilisant pas la théorie de Bruhat-Tits) : Soient $c \in H^1_{fppf}(k(t), \mu)$ et M_0 un point rationnel de $\mathbb{P}^1$ où c est régulière. Quitte à faire agir un élément de $PGL_2(k)$ sur $\mathbb{P}^1$, on peut supposer que $M_0 \neq \infty$. Si $c(t) \in C_\lambda(k(t))$, il est clair que $\partial_M(c) \in \mathrm{Im}(\varphi_M)$ pour tout point fermé M de $\mathbb{A}^1_k$ et la proposition IV.2.2. assure que $c(M_0) \in C_\lambda(k)$. Les conditions $a)$ et $b)$ sont donc vérifiées. Montrons le sens non trivial. Supposons que les assertions $a)$ et $b)$ de la proposition sont vérifiées. Il faut montrer que $c(t) \in \mathrm{Im}(\varphi_{k(t)})$. Notons $\Sigma = \{M_1, .., M_n\}$ les points fermés de $\mathbb{A}^1$ tels que $\partial_{M_i}(c(t)) \neq 0$ et posons $U = \mathbb{A}^1 - \Sigma$. En particulier $M_0 \in U(k)$. Pour $i = 1, .., n$, il existe $g_i \in G(\widehat{k}_{M_i})$ tel que $\partial_{M_i}\big(\varphi(g_i)\big) = \partial_{M_i}(c(t))$. D'après le th. II.3.4.2.c, on sait que $c(\mathbb{A}^1, G) = 1$ donc on a

$$1 = c_\Sigma(\mathbb{A}^1, G) = \Big(\prod_{M \in \Sigma} G(\widehat{O}_M)\backslash G(\widehat{k}_M)\Big)/G(U).$$

Il existe donc $h \in G(U)$ tel que $g_i h^{-1} \in G(\widehat{O}_{M_i})$. Utilisons l'hypothèse b). Il existe $g_0 \in G(k)$ tel que $\varphi(g_0) = c(M_0)$. Posons $g = g_0 h(M_0)^{-1} h$. Alors $g \in G(U)$ et satisfait

$$(*) \qquad g_i g^{-1} \in G(\widehat{O}_{M_i}) \quad et \quad g(M_0) = g_0.$$

Posons $d(t) = \varphi_{k(t)}(g)$ et montrons que $c(t) = d(t)$. Comme $g \in G(U)$, on a $\partial_M(d(t)) = 0 = \partial_M(c(t))$ pour tout point fermé M de $\mathbb{A}^1 - \Sigma$. Comme le morphisme de groupes $\partial_{M_i} \circ \varphi_{\widehat{k}_{M_i}} : G(\widehat{k}_{M_i}) \to \mu(-1)(k(M_i))$ est trivial sur $G(\widehat{O}_{M_i})$, la condition $(*)$ montre que $\partial_{M_i}(d(t)) = \partial_{M_i}(c(t))$ pour $i = 1, .., n$. Par suite , les classes $c(t)$ et $d(t)$ ont mêmes résidus en tous les points fermés de $\mathbb{A}^1$ donc diffèrent d'une classe constante (i.e. de $H^1(k, \mu)$). Or $c(M_0) = \varphi(g_0) = \varphi(g(M_0)) = d(M_0)$. Donc $c(t) = d(t) \in \mathrm{Im}(\varphi_{k(t)})$. $\square$

Seconde démonstration de la proposition IV.3.2.4. (utilisant la théorie de Bruhat-Tits et le th. A) : Cette preuve consiste à établir l'exactitude d'un diagramme. Soit M un point fermé de la droite projective. Le critère valuatif de propreté et le lemme I.1.1.1. montre l'existence des applications φ_M, i_M et d'une suite exacte locale d'ensembles pointés

$$(**)\qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \widetilde{G}(\widehat{k}_M)/\widetilde{G}(\widehat{O}_M) & \longrightarrow & G(\widehat{k}_M)/G(\widehat{O}_M) & \stackrel{\varphi_M}{\longrightarrow} & \\ & \stackrel{\varphi_M}{\longrightarrow} & \mu(-1)(k(M)) & \stackrel{i_M}{\longrightarrow} & H^1(\widehat{k}_M, \widetilde{G})/H^1(\widehat{O}_M, \widetilde{G}). & & \end{array}$$

Les suites exactes locales s'insèrent donc dans un diagramme global
$(* * *)$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H^0_{fppf}(k,\mu) & = & H^0_{fppf}(k(t),\mu) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H^0(k[t],\widetilde{G}) & \longrightarrow & H^0(k(t),\widetilde{G}) & \longrightarrow & \coprod_{M\in\mathbb{A}^1_k} \widetilde{G}(\widehat{k}_M)/\widetilde{G}(\widehat{O}_M) \\ & & \lambda_k\downarrow & & \lambda_{k(t)}\downarrow & & \lambda_M\downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H^0(k[t],G) & \longrightarrow & H^0(k(t),G) & \longrightarrow & \coprod_{M\in\mathbb{A}^1_k} G(\widehat{k}_M)/G(\widehat{O}_M) \\ & & \varphi_k\downarrow & & \varphi_{k(t)}\downarrow & & \varphi_M\downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H^1_{fppf}(k,\mu) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(k(t),\mu) & \longrightarrow & \oplus\mu(-1)(k(M)) \\ & & i_k\downarrow & & i_{k(t)}\downarrow & & i_M\downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H^1(k,\widetilde{G}) & \longrightarrow & H^1(k(t),\widetilde{G}) & \longrightarrow & \coprod_{M\in\mathbb{A}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,\widetilde{G})/H^1(\widehat{O}_M,\widetilde{G}) \end{array}$$

Les suites exactes de localisation de IV.1. et III.3.1. (k est parfait) impliquent l'exactitude du diagramme (***) ci-dessus. Montrons maintenant la proposition. Soient $c \in H^1_{fppf}(k(t),\mu)$ et M_0 un point rationnel de $\mathbb{P}^1$ où c est régulière. Si $c(t) \in C_\lambda(k(t))$, il est clair que $\partial_M(c) \in \mathrm{Im}(\varphi_M)$ pour tout point fermé M de $\mathbb{A}^1_k$ et la proposition IV.2.2. assure que $c(M_0) \in C_\lambda(k)$. Réciproquement, supposons que les assertions $a)$ et $b)$ de la proposition sont vérifiées. Il faut montrer que $i_k(t)(c(t)) = 1$. L'exactitude du diagramme $(* * *)$ ci-dessus pour la ligne

$$H^1(k,\widetilde{G}) \longrightarrow H^1(k(t),\widetilde{G}) \longrightarrow \coprod_{M\in\mathbb{A}^1_k} H^1(\widehat{k}_M,\widetilde{G})/H^1(\widehat{O}_M,\widetilde{G})$$

montre que $i_{k(t)}(c(t)) \in H^1(k,\widetilde{G})$. Spécialisant en M_0, il vient $i_{k(t)}(c(t)) = i_k(c(M_0)) = 1$ par hypothèse. Donc $c(t) \in C_\lambda(k(t))$. $\square$

On va voir que l'ensemble $\mathrm{Im}(\varphi_M)$ ne dépend que du corps résiduel $k(M)$.

IV.3.3. — *Résidus λ–spéciaux.* Notons $K = k((u))$ le corps de séries formelles sur k, d'anneau de valuation $O = k[[u]]$ et ∂_K est la flèche résidu $H^1_{fppf}(K,\mu) \to \mu(-1)(k)$.

Définition IV.3.3.1. — *Soit $r \in \mu(-1)(k)$. On dit que r est λ–spécial sur k si r appartient à l'image de l'application composée*

$$G(K) \xrightarrow{\varphi_K} H^1_{fppf}(K,\mu) \xrightarrow{\partial_K} \mu(-1)(k)\,.$$

L'ensemble des résidus λ–spéciaux est un sous–groupe de $\mu(-1)(k)$, dont la taille, dans une certaine mesure, indique l'isotropie de G. Soit M un point fermé de la droite projective.

Lemme IV.3.3.2. — *Soit $r \in \mu(-1)(k(M))$. Il y a équivalence entre les assertions*

a) $r \in \mathrm{Im}(\varphi_M)$

b) Le résidu r est λ–spécial sur $k(M)$.

Démonstration : On va justifier ici l'hypothèse k parfait. Puisque k est parfait (c'est faux en général), il existe un k-isomorphisme de corps $f : \widehat{k}_M \xrightarrow{\sim} k(M)((u))$ où $k(M)((u))$ est le corps de de séries formelles à une variable sur $k(M)$ (cf. [Gr-D] chap. 0, corollaire 19.6.2 p.100). On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} G(\widehat{k}_M) & \xrightarrow{\varphi_{\widehat{k}_M}} & H^1_{fppf}(\widehat{k}_M,\mu) & \xrightarrow{\partial_M} & \mu(-1)(k(M)) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \| \\ G\big(k(M)((u))\big) & \xrightarrow{\varphi_{k(M)((u))}} & H^1_{fppf}(\big(k(M)((u)),\mu\big) & \xrightarrow{\partial} & \mu(-1)(k(M)). \end{array}$$

Ceci montre le lemme. ∎

On peut alors réécrire la proposition IV.3.2.1.

Proposition IV.3.3.3. — *Soient $c = c(t) \in H^1_{fppf}(k(t),\mu)$ et M_0 un point rationnel de la droite projective où c est régulière. Alors c appartient à $C_\lambda(k(t))$ si et seulement si on a les deux conditions*

a) Le résidu $\partial_M(c)$ est λ-spécial sur $k(M)$ pour tout point fermé de $\mathbb{A}^1_k$.

b) $c(M_0) \in C_\lambda(k)$.

IV.3.4. — *Principes de norme.*

Proposition IV.3.4.1 (Principe de norme sur les résidus). — *Soit L/k une extension finie de corps et $r \in \mu(-1)(L)$ un résidu λ–spécial sur L. Alors $N_{L/k}(r)$ est λ–spécial sur k.*

Démonstration : On peut supposer L distinct de k et identifier l'extension séparable L à $k(M)$ où M est un point fermé de la droite affine. La surjectivité de la suite de localisation pour μ permet de choisir $y(t)$ dans $H^1_{fppf}(k(t), \mu)$ régulière en dehors de M satisfaisant $\partial_M(y) = r$ et $y(0) = 1$. La proposition précédente donne $y(t) \in C_\lambda(k(t))$ ce qui s'écrit : $i_{k(t)}(y(t)) = 1$ donc $i_{\widehat{k_\infty}}(y(t)) = 1$. L'infini est un k–point rationnel de la droite projective, donc $\widehat{k_\infty}$ est le corps des séries formelles à une variable sur k. Par définition de *"λ–spécial"*, $d^0(y(t))$ est λ–spécial sur k. La formule des résidus donne : $d^0(y(t)) = -N_{L/k}(r) \in \mu(-1)(k)$. Donc $N_{L/k}(r)$ est λ–spécial sur k. $\square$

Cette proposition a un intérêt en soi (cf § VI). Ici, elle permet d'isoler un sous–groupe de $C_\lambda(k)$ stable par les normes, qui est le résultat principal de cette section.

Théorème B (IV.3.4.2.). — *Soient $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une k-isogénie centrale de groupes réductifs définis sur un corps parfait k, de noyau le k-groupe commutatif fini μ et L/k une extension finie de corps. Notons $N_{L/k} : H^1_{fppf}(L, \mu) \to H^1_{fppf}(k, \mu)$ la corestriction de L à k et $R(k, C_\lambda)$ le sous-groupe de $H^1_{fppf}(k, \mu)$ défini en IV.2.2. Alors, on a*

$$N_{L/k}\Big(R(L, C_\lambda))\Big) \subset R(k, C_\lambda) \subset H^1_{fppf}(k, \mu)$$

Démonstration : Notons p la projection $\mathbb{P}^1_L \longrightarrow \mathbb{P}^1_k$. Soit $y_0 \in R(L, C_\lambda) \subset C_\lambda(L)$. Il existe $y(t) \in C_\lambda(L(t))$ telle que $y(0) = y_0$ et $y(\infty) = 1$. En particulier $d^0(y(t)) = 0$. Posons $x(t) = N_{L/k}(y(t))$. Avec la notation des 0–cycles, on a $p^{-1}(0) = [L : k]\{0\}$ et $p^{-1}(\infty) = [L : k]\{\infty\}$. Par suite, $x(t)$ est régulière en 0 et à l'infini. Montrons $x(t) \in C_\lambda(k(t))$. Comme $x(\infty) = 1$, il suffit de montrer que $\partial_N(x(t))$ est λ–spécial sur $k(N)$ pour tout point fermé N de $\mathbb{A}^1_k$. Soit N un tel point de 0–cycle inverse $p^{-1}(N) = \sum_{i=1}^{s} [L(M_i) : k(N)] \cdot M_i$. On a la relation $k(N) \underset{k}{\otimes} L = \prod_i L(M_i)$ et le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont les flèches résidus :

$$\begin{array}{rccc}
N_{L/k} : & H^1_{fppf}(L(t), \mu) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(k(t), \mu) \\
& \sum_i \partial_{M_i} \big\downarrow & & \partial_N \big\downarrow \\
\sum_i N_{L(M_i)/k(N)} : & \bigoplus_i \mu(-1)(L(M_i)) & \longrightarrow & \mu(-1)(k(N))
\end{array}$$

Alors $\partial_N(x(t)) = \sum_i N_{L(M_i)/k(N)}(\partial_{M_i}(y(t)))$. Par hypothèse, $\partial_{M_i}(y(t))$ est λ–spécial sur $L(M_i)$. La proposition précédente appliquée au corps de base $k(N)$ assure que $\partial_N(x(t))$ est λ–spécial sur $k(N)$, les résidus λ–spéciaux sur $k(N)$ formant un groupe. Alors $x(t) \in C_\lambda(k(t))$ et par spécialisation en 0, on a : $x(0) = N_{L/k}(y)(0) = N_{L/k}(y(0)) \in C_\lambda(k)$. Comme $x(\infty) = 1$, $N_{L/k}(y(0)) \in R(k, C_\lambda)$. $\square$

Si $R(L, C_\lambda) = C_\lambda(L)$, le théorème B ci-dessus montre que l'isogénie λ satisfait au principe de norme pour l'extension L/k. Compte tenu de la fonctorialité IV.3.1, on a donc montré le

Théorème IV.3.4.3. — *Soient $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une isogénie centrale de k–groupes semi–simples de noyau μ, et L/k une extension finie de corps. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

a) Le groupe $G_L(L)/R$ est trivial.

b) Le groupe $G_{ad,L}(L)/R$ est trivial.

c) La L–variété $G_{ad,L}$ est L–rationnelle.

d) Le groupe G_L est quasi–déployé.

Alors λ satisfait le principe de norme pour l'extension L/k.

Les assertions sont liées par : $d) \Longrightarrow c) \Longrightarrow b)$ car on a le

Lemme IV.3.4.4. — *Les k–groupes semi-simples quasi–déployés adjoints ou simplement connexes sont k–rationnels et donc triviaux pour la R-équivalence.*

Démonstration ([CT-Sa] Prop. 14 p. 204) : Le groupe G possède un sous-groupe de Borel $B = T.U$ où T est un tore déployé maximal. Notons U^- le sous-groupe unipotent opposé de U. Les groupes U et U^- sont déployés et l'application produit $U \times T \times U^- \to G$ est une immersion ouverte ayant pour image la "grosse cellule" Ω. Puisque G est adjoint ou simplement connexe, on sait [Ha1] que le tore T est quasi-trivial, donc k rationnel. Ceci montre que G est k-rationnel. ∎

Platonov avait conjecturé que les groupes semi-simples adjoints sont rationnels sur leur corps de définition. Il en est ainsi pour les groupes adjoints de type ${}^1A_n$, ${}^2A_{2n}$ [V-Kl] et B_n. Cette conjecture est fausse, Merkurjev ayant trouvé un contre-exemple avec un groupe adjoint de type ${}^2D_3$ non trivial pour la R-équivalence [Me2].

On peut donc conclure que le principe de norme vaut pour toute isogénie de groupes semi–simples de facteurs ${}^1A_n$, ${}^2A_{2n}$ et B_n et pour toute extension finie de k.

IV.4. — Applications directes

IV.4.1. — Norme réduite. Soit D une k–algèbre à division d'indice n. On note D^* le groupe des unités de D, $N_{red} : D \to k$ la norme réduite, $SL(D) = SL_1(D)$ le groupe spécial linéaire de D et $PGL(D)$ le groupe projectif linéaire de D. Pour la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow SL(D) \xrightarrow{\lambda} PGL(D) \longrightarrow 1\,,$$

le groupe $C_\lambda(k)$ est l'image de $N_{red}(D_k^*)$ dans $k^*/k^{*n} = H^1_{fppf}(k, \mu_n)$. On sait que $PGL(D)$ est k–rationnel. On retrouve ainsi le fait bien connu : si L/k est une extension finie de corps, on a $N_{L/k}(N_{red}(D_L^*)) \subset N_{red}(D_k^*)$.

IV.4.2. — Norme spinorielle. On suppose que la caractéristique de k n'est pas 2. Soit q une k–forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel V. Notons $SO(q)$ (resp.

Spin(q)) le groupe spécial orthogonal de q (resp. le groupe des spineurs de q) et $D_q(k)$ (resp. $D^2_q(k)$) le sous–groupe de k^* engendré par les valeurs non nulles de q (resp. les produits pairs de valeurs non nulles de q). Pour la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(q) \xrightarrow{\lambda} SO(q) \longrightarrow 1\,,$$

on sait que l'application caractéristique $\varphi : SO(q)(k) \to H^1(k,\mu_2) \xrightarrow{\sim} k^*/k^{*2}$ est la norme spinorielle (cf [L] p. 109) dont le théorème de Cartan-Dieudonné [Di2] permet de donner une description explicite. Soit $g \in SO(q)(k)$. L'elément g est un produit de réflexions $g = \prod\limits_{i=1,..2n} \tau_{v_i}$ ($v_i \in V$, non isotrope) et

$$\varphi(g) = \varphi\Big(\prod_{i=1,..2n} \tau_{v_i}\Big) = \prod_{i=1,..2n} \varphi(\tau_{v_i}) = \prod_{i=1,..2n} q(v_i) \mod k^{*2}$$

Par suite $C_\lambda(k)$ est égal à $D^2_q(k)/k^{*2}$.

Lemme IV.4.2.1. — *Il y a équivalence entre les assertions*

a) $1 \in \mathbb{Z}/2 = \mu_2(-1)$ *est* λ*–spécial sur* k

b) *La forme* q *est isotrope.*

Démonstration : Montrons $a) \Longrightarrow b)$. On suppose donc qu'il existe $g \in SO(q)\big(k((t))\big)$ tel que $\varphi(g) = ut \mod k((t))^{*2}$, $u \in k[[t]]^*$. Il y a une décomposition $g = \prod_{i=1,..2n} \tau_{v_i}$ avec $v_i \in V \otimes_k k((t))$ pour $i = 1, ..., n$. L'homogénité de q permet de supposer que $v_i \in V \otimes_k k[[t]]$ et $\overline{v}_i \neq 0$ où $\overline{v}_i$ désigne la réduction de v_i modulo t. Réduisant modulo t, il vient $\prod_{i=1,..2n} q(\overline{v}_i) = 0$ donc q est isotrope. La réciproque est évidente. □

Le principe de norme sur les résidus (cf. § VI. pour d'autres applications) permet de retrouver par une méthode différente le

Théorème IV.4.2.2 (Springer, [Sp1], cf. [L] Th 2.3 p.198). — *Soit* L/k *une extension finie de corps de degré impair. Alors*

$$q_k \quad \textit{isotrope} \quad \Longleftrightarrow \quad q_L \quad \textit{isotrope}$$

La k–rationalité de $SO(q)$ permet de retrouver le principe de norme de Knebusch.

Théorème IV.4.2.3 (Knebusch, cf. [L] p. 207). — *Soit* L/k *une extension finie de corps. On a l'inclusion* $N_{L/k}(D_q(L)) \subset D_q(k)$.

Démonstration : On a $N_{L/k}(D^2_q(L)) \subset D^2_q(k)$ par application de 3.3.3. Si q représente 1, $D^2_q(k) = D_q(k)$ et le résultat est clair. Sinon on choisit $\alpha \in k^*$ une valeur de la forme q. Soit $\beta \in L^*$ une valeur de q sur L. Alors $N_{L/k}(\alpha\beta) \in D^2_q(k) \subset D_q(k)$. Donc $N_{L/k}(\beta) = \alpha^{-[L:k]} N_{L/k}(\alpha\beta) \in D_q(k)$. □

La méthode précédente n'est pas suffisante pour démontrer le principe de norme de Scharlau (cf. [L] th. 4.3 p.206). Soit q une forme quadratique non dégénérée de rang pair. On note $G_q(k)$ le groupe des k–facteurs de similitude de q, i.e. le sous–groupe de k^* formé des a tel que les formes q et aq soient isomorphes. Pour la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow SO(q) \xrightarrow{\lambda} PSO(q) \longrightarrow 1\,,$$

on sait que $C_\lambda(k) = G_q(k)/k^{*2}$. On montre aisément que $1 \in \mathbb{Z}/2 = \mu_2(-1)$ est λ–spécial sur k si et seulement si la forme q est hyperbolique. Le groupe $G_q(k)$ satisfait au principe de norme mais le groupe $PSO(q)(k)/R$ est non trivial en général [Me2], qui est un résultat postérieur à [Gil1].

V. — Un théorème de finitude arithmétique sur les groupes réductifs

V.1. — Introduction : On montre ici le

Théorème C. — *Soit G un k-groupe réductif défini sur un corps de nombres k. Alors le groupe $G(k)/R$ est fini.*

Il est aisé de voir que cela implique la finitude du groupe $G(k)/R$ pour tout k-groupe algébrique affine G. En effet G est le produit semi-direct d'un groupe réductif H et de son radical unipotent. Or les groupes unipotents sont k-rationnels en caractéristique nulle et par suite on a $G(k)/R \simeq H(k)/R$. Ce résultat généralise pour les corps de nombres le cas des tores et des groupes réductifs quasi–déployés, pour lesquels Colliot–Thélène et Sansuc ont montré la finitude du nombre des classes de R–équivalence pour un corps k de type fini sur le corps premier [CT-Sa1].

Le plan de la démonstration est de réduire au cas d'un groupe semi–simple simplement connexe, d'utiliser le principe de norme établi dans la partie précédente, et de conclure par une étude arithmétique de modules finis utilisant le résultat de finitude pour les tores. Colliot–Thélène et Sansuc ont remarqué qu'un théorème *"ergodique"* de Margulis [Mar] résout de façon évidente le cas d'un groupe semi–simple simplement connexe.

Théoréme V.1.1. (Margulis [Mar] Th. 2.4.6). — *Soit G un k–groupe connexe, semi–simple, simplement connexe et presque k–simple. Tout sous–groupe normal (abstrait) de $G(k)$ est soit d'indice fini, soit inclus dans le centre de $G(k)$.*

Il existe des énoncés arithmétiques plus précis sur l'existence ou non de sous-groupes abstraits normaux non centraux pour les groupes semi-simples simplement connexe dont une liste est donnée dans [P]. Soit alors G un k–groupe semi–simple simplement connexe. Montrons que le groupe $G(k)/R$ est fini. On peut supposer le groupe G connexe. Quitte à écrire G comme un produit direct fini $G = \prod\limits_i G_i$ de groupes simplement connexes presque k–simples, comme le groupe $G(k)/R$ est égal à $\prod\limits_i G_i(k)/R$, on peut supposer le groupe G connexe et presque k–simple. On peut alors appliquer le théorème précédent au sous–groupe normal $R(k,G)$ de $G(k)$. On sait que G est k–unirationnel (cf. [Bo2] p. 218 th. 18.2) et par suite le groupe $R(k,G)$ est Zariski–dense dans G, donc $R(k,G)$ ne peut être central dans $G(k)$. Par suite, le groupe $G(k)/R$ est fini.

V.2. — Préliminaires : Soient k un corps de caractéristique nulle et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k.

V.2.1. — Revêtements spéciaux :

Définition V.2.1.1 [Sa]. — *Soit G un k–groupe algébrique réductif. On appelle k–revêtement spécial de G une k–isogénie centrale $\lambda : \widetilde{G} \to G$ de k–groupes algébriques telle que $\widetilde{G}$ soit le produit direct d'un k–tore quasi–trivial et d'un k–groupe semi–simple simplement connexe.*

Lemme V.2.1.2. [Sa] p.20 lemme 1.10. — *Soit G un groupe algébrique réductif défini* *sur k. Alors il existe un tore quasi–trivial E et un entier $m \geq 1$ tel que $G^m \times E$ admette un k–revêtement spécial.* ∎

V.2.2. — Principe de Hasse sur les groupes de normes : On suppose que k est un corps de nombres et on note V l'ensemble des places de k et $(k_v)_{v\in V}$ les complétés de k pour chaque place. Soit X une k–variété projective lisse géométriquement intègre. On sait grâce aux estimées de Lang-Weil que $X(k_v)$ est non vide pour presque toute place v. Kato et Saito ont établi un principe de Hasse pour le groupe $k^*/N_X(k)$.

Théorème V.2.2.1. [K-S]. — *Avec les hypothèses ci–dessus, $N_X(k_v)$ est égal à k_v^* pour presque toute place v et il y a un isomorphisme naturel*

$$k^*/N_X(k) \approx \bigoplus_{v\in V} k_v^*/N_X(k_v)\,.$$

Il est clair que les groupes $k_v^*/N_X(k_v)$ sont finis pour toute place v et ainsi le groupe $k^*/N_X(k)$ est fini.

Corollaire V.2.2.2. — *Soit E un tore quasi–trivial. Le groupe $N_X(k,E)$ est d'indice fini dans $E(k)$.*

Démonstration : Il suffit de le démontrer pour un tore $E = R_{L/k}\mathbb{G}_m$ où L/k est une extension finie de corps. L est donc un corps de nombres. On voit aisément que $N_{X_L}(L) \subset N_X(k,E) \subset E(k) = L^*$. Le théorème précédent appliqué au corps de nombres L assure que le groupe $L^*/N_{X_L}(L)$ est fini. Par suite, le groupe $N_X(k,E)$ est d'indice fini dans $E(k)$. ∎

Si la variété X satisfait au principe de Hasse "absolu", i.e. X_L satisfait au principe de Hasse pout toute extension finie de corps L/k, la preuve de V.2.2.1. se déduit de la preuve de Kneser (cf. [Kneser] p. 87) d'un théorème d'Eichler qui traite le cas des variétés de Severi-Brauer. Dans la suite, on utilisera seulement le cas où la variété X satisfait le principe de Hasse.

Démonstration de V.2.2.1. si X satisfait le principe de Hasse :

Lemme V.2.2.3. — *Soit F un corps de caractéristique nulle et soit A/F une algèbre étale de degré d. Soit $a \in N_{A/F}(A^*)$. Alors il existe un polynôme unitaire séparable P de degré d tel que $F_P \simeq A$ et $P(0) = (-1)^d a$.*

Montrons le lemme. $A = \prod_{j=1,..,s} L_j \quad (L_j/F$ extension finie de corps). Il existe des $b_j \in L_j^*$ tels que si $a_j = N_{L_j/F}(b_j)$, on ait $a = \prod_{j=1,..,s} a_j$.

Comme $R^1_{A/k}(k) = \Big\{(\beta_j)_{j=1,..,s} \prod_{j=1,..,s} N_{L_j/F}(\beta_j) = 1\Big\}$ est Zariski-dense dans le tore $R^1_{A/k}$, on peut supposer les a_j deux à deux distincts et chaque b_j primitif pour l'extension

L_j/F. Posons $P_j(t) = (-1)^{[L_j:F]} N_{L_j/F}(b_j - t)$ et $P(t) = \prod_{j=1,..,s} N_{L_j/F}(b_j - t)$. Les P_j sont distncts deux à deux. Si deux polynômes P_{j_0} et P_{j_1} ont une racine commune, ils sont égaux. Donc P est bien séparable, unitaire, satisfait $F_P \simeq A$, et on a $P(0) = (-1)^{deg(P)}a$. $\square$

Le lemme V.2.2.3. et le lemme de Krasner permettent de conclure. Notons v_1, ...,v_n les places de k où la variété X n'a pas de points rationnels. Il est clair que le morphisme $k^*/N_X(k) \to \bigoplus_{v\in V} k_v^*/N_X(k_v) = \bigoplus_{i=1,..,n} k_{v_i}^*/N_X(k_{v_i})$ est surjectif. Montrons l'injectivité. Soit (a) un élément du noyau. Pour toute place v de k, il existe une algébre étale A_v tel que $a \in N_{A_v/k_v}(A_v^*)$. Choisissant l'algébre étale triviale aux places où X a des points rationnels, on peut supposer que les A_v ont même degré d (pair). Le sous-lemme assure l'existence d'une famille $(P_v)_{v\in V}$ de polynômes unitaires séparables de degré d satisfaisant $P_v \in k_v[t]$, $P_v(O) = a$ et $X(k_{v,P_v})$ non vide pour toute place v. Le lemme de Krasner assure l'existence d'un polynôme unitaire séparable P de degré d appartenant à $k[t]$, tel que $(k_P)_{v_i} \xrightarrow{\sim} (k_{v_i})_{P_{v_i}}$ pour $i = 1$,...,n et $P(0) = a$. Comme X satisfait le principe de Hasse absolu, $X(k_P)$ est non vide et donc $a \in N_X(k)$. $\square$

V.2.3. — Tores flasques :

Définition V.2.3.1. [CT-Sa1]. — *Soit T un k–tore algébrique. T est dit flasque si pour toute extension finie de corps L/k, le groupe $H^1(L, \widehat{T}^\circ)$ est trivial.*

Théorème V.2.3.2. — *a*) (Endo–Miyata, cf. [CT-Sa 2]) *Soit μ un k–groupe fini de type multiplicatif. Il existe une résolution flasque de μ, i.e. une suite exacte*

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow 1$$

où E est un k–tore quasi–trivial et S un k–tore flasque.

b) (Colliot–Thélène, Sansuc [CT-Sa 1]) *Soit S un k–tore flasque. Si k est un corps de type fini sur $\mathbb{Q}$, $H^1(k, S)$ est fini.*

V.3. — Démonstration du théorème B : Soient k un corps de nombres et G un k–groupe réductif.

V.3.1. — Une réduction : Il est clair que l'on peut supposer G connexe. De 1.1, on sait qu'il existe un revêtement *" spécial"* :

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \widetilde{G} \times F \xrightarrow{\lambda} G^m \times E \longrightarrow 1\,.$$

où E et F sont des tores quasi–triviaux et $\widetilde{G}$ est un groupe semi–simple simplement connexe. Les tores quasi–triviaux étant triviaux pour la R–équivalence, on a :

$$(G^m \times E)(k)/R = (G(k)/R)^m \quad \text{et} \quad (\widetilde{G} \times F)(k)/R = \widetilde{G}(k)/R\,.$$

On pose $G' = G^m \times E$ et $\widetilde{G}' = \widetilde{G} \times F$. Il suffit de montrer $G'(k)/R$ fini pour avoir $G(k)/R$ fini. Quitte à remplacer G (resp. $\widetilde{G}$) par G' (resp. $\widetilde{G}'$), on peut donc supposer qu'il existe un revêtement spécial de groupes connexes

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow \widetilde{G} \xrightarrow{\lambda} G \longrightarrow 1\,.$$

V.3.2. — Le groupe G est une forme interne d'un groupe quasi–déployé G^{qd}. Il existe un cocycle z du groupe adjoint G^{qd}_{ad} de G^{qd} tel que $G = {}_zG^{qd}$. La classe $[z]$ est un élément de $H^1(k, G^{qd}_{ad})$. On choisit un sous–groupe de Borel B de G^{qd}_{ad} et on note $D = G^{qd}_{ad}/B$ une variété drapeau de G^{qd}_{ad}. Le groupe G^{qd}_{ad} agit à gauche sur D, et on peut tordre par z obtenant $X = {}_zD$. On sait que X est une variété projective lisse géométriquement intègre, et X est un espace homogène sous le groupe G. D'après Harder [H3] Satz. 4.3.3. p. 214, la variété X satisfait au principe de Hasse (le cas des facteurs de type E_8 ne pose pas de problème d'après Chernousov [Cher]). De plus X vérifie la propriété :

Lemme V.3.2.1 (cf. [Se1], I, prop. 37). — *Soit L/k une extension de corps. L'ensemble $X(L)$ est non vide si et seulement si G_L est quasi–déployé.*

Prenons les notations de (A.II.2) . On a une suite exacte de groupes

$$\widetilde{G}(k)/R \longrightarrow G(k)/R \longrightarrow C_\lambda(k)/R \longrightarrow 1\,.$$

Comme le groupe $\widetilde{G}(k)/R$ est fini (§ 0), il suffit de montrer que $C_\lambda(k)/R$ est fini. On est donc ramené à un problème de modules galoisiens finis. La stabilité de $R(k, C_\lambda)$ par les normes (IV.3.4.2) permet de définir le groupe de normes du foncteur $R(\,.\,, C_\lambda)$ pour la k–variété X (cf. 0.9).

Lemme V.3.2.2. — *a) Soit L/k une extension de corps quasi–déployant G. Alors $C_\lambda(L) = H^1(L, \mu)$.*

b) Le groupe $N_X(k, R(\,.\,, C_\lambda))$ est d'indice fini dans $H^1(k, \mu)$.

Le lemme donne le théorème. En effet, on a les inclusions :

$$N_X(k, R(\,.\,, C_\lambda)) \subset R(k, C_\lambda) \subset C_\lambda(k) \subset H^1(k, \mu)\,.$$

Ceci montre que $C_\lambda(k)/R(k, C_\lambda)$ est fini.

V.3.3. — Démonstration du lemme V.3.2.2.

a) Un groupe simplement connexe quasi–déployé possède un tore maximal quasi–trivial (cf. [Ha1]). Le groupe $\widetilde{G}_L$ étant le produit d'un groupe simplement connexe et d'un tore quasi–trivial a donc un L-tore (maximal) quasi–trivial T. L'application $H^1(L, \mu) \longrightarrow H^1(L, \widetilde{G})$ se factorise par $H^1(L, T) = 1$, donc est triviale. Par suite, $C_\lambda(L) = H^1(L, \mu)$.

b) On utilise ici le § V.2.3. On choisit une résolution flasque de μ

$$1 \longrightarrow \mu \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow 1$$

où E est un k–tore quasi–trivial et S un k–tore flasque. Soit L/k une extension finie de corps quasi–déployant G. Comme $H^1(k, E)$ et $H^1(L, E)$ sont triviaux, on a le diagramme de suites exactes suivant où les flèches verticales sont les corestrictions,

$$\begin{array}{ccccccc}
E(L) & \xrightarrow{\delta} & H^1(L, \mu) & \longrightarrow & H^1(L, S) & \longrightarrow & 1 \\
{\scriptstyle N_{L/k}} \downarrow & & {\scriptstyle N_{L/k}} \downarrow & & {\scriptstyle N_{L/k}} \downarrow & & \\
E(k) & \xrightarrow{\delta} & H^1(k, \mu) & \longrightarrow & H^1(k, S) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

et où $H^1(k, S)$ est fini (V.2.3.2.).

On a $C_\lambda(L) = H^1(L, \mu)$. Comme le L-tore E_L est trivial pour la R–équivalence, il est aisé de voir que $\delta(E(L)) \subset R(L, C_\lambda)$. Appliquant cela à toutes les extensions finies de k quasi–déployant G, il vient

$$\delta(N_X(k, E)) \subset N_X(k, R(\,.\,, C_\lambda))\,.$$

Or $N_X(k, E)$ est d'indice fini dans $E(k)$ (V.2.3.3.) et $H^1(k, S)$ est fini. Par suite, $\delta(N_X(k, E))$ est un sous–groupe d'indice fini de $H^1(k, \mu)$ donc $N_X(k, R(\,.\,, C_\lambda))$ est un sous–groupe d'indice fini de $H^1(k, \mu)$. $\square$

VI. — Extensions non déployantes de groupes algébriques semi-simples

VI.1. — Introduction

Soit k un corps parfait. On note $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois de $\overline{k}$ sur k. Soit X un type d'algèbre de Lie simple. Soit G un groupe algébrique défini sur k, connexe, semi-simple et simple de type X. On fixe une famille $(k_i/k)_{i=1,..r}$ d'extensions finies de corps, non isomorphes deux à deux, dont les degrés sont premiers dans leur ensemble. Dans [$T3$], Tits pose la question suivante

(Q) : Si les groupes G_{k_i} sont déployés, le groupe G_k est-t-il déployé ?

On donne ici une méthode générale permettant de répondre à Q pour les groupes absolument presque k–simples tels que le centre du revêtement universel de G soit non trivial.

Théorème D. — *Soit G un k-groupe algébrique connexe, semi– simple, absolument presque k-simple d'un des types suivants A_n, B_n, C_n, D_n, E_6 ou E_7. Si G_{k_i} est déployé pour $i = 1, .., r$ alors le groupe G est déployé.*

Le cas de A_n est facile, les cas de B_n, C_n et D_n ont été traités par Bayer-Lenstra [Ba-L]. Les seuls cas nouveaux de ce théorème sont donc les types E_6 et E_7. D'autre part, Sansuc a répondu affirmativement à Q, dans une forme plus forte, dans le cas des corps de nombres [Sa].

Tits a associé à toute algèbre de Lie complexe simple X un entier $d(X)$ (dont les facteurs premiers sont optimaux pour cette propriété) tel que tout groupe algébrique de type X sur k se déploie sur une extension finie de k de degré divisant $d(X)$ [T3]. Notons $r(X)$ le radical de l'entier $d(X)$, i.e le produit des nombres premiers apparaissant dans la décomposition de $d(X)$.

Corollaire VI.1.2. — *Soit X une algèbre de Lie simple complexe d'un des types suivants A_n, B_n, C_n, D_n, E_6 ou E_7. Soit G un k-groupe algébrique connexe, semi-simple, absolument presque k-simple de type X. Soit L/k une extension de corps de degré premier à $r(X)$. Si l'extension L/k déploie G, alors le groupe G est déployé.*

On a $r(A_n) = rad(2(n+1))$, $r(B_n) = 2$, $r(C_n) = 2$, $r(D_4) = 2.3$, $r(D_n) = 2$ $(n \geq 5)$, $r(E_6) = 2.3$, $r(E_7) = 2.3$. Les cas de E_8, F_4 et G_2 échappent à la méthode précédente et l'enoncé du corollaire pour E_8 et F_4 sont des conjectures.

VI.2. — Une conséquence du principe de norme sur les résidus IV.3.3.1.

Soit $\lambda : \widetilde{G} \to G$ une k–isogénie centrale de k-groupes semi-simples, de noyau μ qui est un k-groupe fini de type multiplicatif.

Lemme VI.2.1. — *a) Si le groupe G est déployé, le groupe des résidus λ–spéciaux est le groupe $\mu(-1)(k)$.*

b) Si le groupe G est anisotrope, le groupe des résidus λ–spéciaux est trivial.

Démonstration : Soit $K = k((u))$ d'anneau de valuation $O = k[[u]]$. Le diagramme commutatif exact $(*)$ de I.1.1. s'écrit

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d] & \\ G(O) \arrow[r, "\varphi_O"] \arrow[d] & H^1_{fppf}(O,\mu) \arrow[r, "i_O"] \arrow[d, "\ell"'] & H^1(O,\widetilde{G}) \arrow[d, "\ell"'] \\ G(K) \arrow[r, "\varphi_K"] & H^1_{fppf}(K,\mu) \arrow[r, "i_K"] \arrow[d, "\partial_K"'] & H^1(K,\widetilde{G}) \\ & \mu(-1)(k) \arrow[d] & \\ & 1 & \end{tikzcd}$$

Le groupe des résidus λ-spéciaux sur k est par définition l'image de l'application $\partial_K \circ \varphi_K$.

a) Supposons que G est déployé et notons T un tore déployé maximal de G. On a $\mu \subset T$. L'application $i_k : H^1(k,\mu) \to H^1(k,G)$ factorise par l'application naturelle $1 = H^1(k,T) \to H^1(k,G)$, donc i_k est l'application triviale. Par suite, l'application caractéristique φ_k est surjective et il en est de même de φ_K. L'application ∂_K étant aussi surjective, le groupe des résidus λ–spéciaux est le groupe $\mu(-1)(k)$.

b) Supposons que G soit anisotrope. Le corps valué $\widehat{k}_\infty = k((\frac{1}{t}))$ est k-isomorphe à K. Le théorème deux.3.4.2.b montre que l'on a une décomposition

$$G\big(\widehat{k}_\infty\big) = G\big(\widehat{O}_\infty\big).G\big(k[t]\big).$$

Par suite

$$\varphi_{\widehat{k}_\infty}\Big(G\big(\widehat{k}_\infty\big)\Big) = H^1_{fppf}(\widehat{O}_\infty,\mu).H^1_{fppf}(\mathbb{A}^1,\mu) \subset H^1_{fppf}(\widehat{k}_\infty,\mu).$$

Or $H^1_{fppf}(k,\mu) \xrightarrow{\sim} H^1_{fppf}(\mathbb{A}^1,\mu)$ (0.6.3.b). Donc

$$\partial_\infty \circ \varphi_{\widehat{k}_\infty}\Big(G\big(\widehat{k}_\infty\big)\Big) = 1.$$

Ceci montre que l'ensemble des résidus λ-spéciaux sur k est trivial.

On peut faire autrement : un théorème de Bruhat-Tits-Rousseau ([B-T2], cf. [Rag1] Prop. 1.2) assure que si G est anisotrope, on a $G(O) = G(K)$. Par suite, comme l'application ∂_K est nulle sur $H^1_{fppf}(O,\mu)$, le groupe des résidus λ–spéciaux est trivial. $\square$

Si le groupe groupe fondamental μ de G est tel que le groupe $\mu(-1)(k)$ est non trivial, on a ainsi un critère simple pour distinguer les deux cas extrémaux de déploiement qui sont le cas anisotrope et le cas déployé. Avec la proposition VI.2.2., on est ramené à des calculs de normes sur le module galoisien fini $\mu(-1)$. Appliquant un argument classique de restriction-corestriction, on a la

Proposition VI.2.4. — *Dans la situation ci-dessus, supposons que $\mu(-1)(k)$ soit non trivial. Si le groupe G_{k_i} est déployé pour $i = 1, .., r$, alors le groupe G est isotrope.* $\square$

Remarque : Les conditions G déployé ou G anisotrope ne dépendant que de la classe d'isogénie de G, la proposition vaut pour tout groupe isogène à G.

VI.3. — Preuve du théorème D.

Soit G un groupe semi-simple d'un des types de l'énoncé du th. D. On suppose que G_{k_i} est déployé pour $i = 1, .., r$. Notons G^d la k-forme déployée de G. On sait que l'ensemble pointé $H^1(k, Aut(G^d))$ classe les k-formes de G^d. Notons $\gamma \in H^1(k, Aut(G^d))$ la classe de G. On doit montrer que $\gamma = 1$.

VI.3.1. — Réduction au cas des formes internes. On a une suite exacte scindée de faisceaux galoisiens

$$1 \longrightarrow G^d \xrightarrow{Int} Aut(G^d) \xrightarrow{p} \nu \longrightarrow 1$$

où ν est le k-groupe commutatif fini des automorphismes extérieurs de G^d. On a une suite exacte d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H^1(k,G) & \xrightarrow{Int_*} & H^1(k,Aut(G)) & \xrightarrow{p_*} & H^1(k,\nu) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \prod_{i=1,..,r} H^1(k_i,G) & \xrightarrow{Int_*} & \prod_{i=1,..,r} H^1(k_i,Aut(G)) & \xrightarrow{p_*} & \prod_{i=1,..,r} H^1(k_i,\nu) \end{array}$$

Lemme VI.3.1.1. — *Soit Δ un diagramme de Dynkin irréductible et $\nu = Aut(\Delta)$ le k-groupe constant associé. L'application $H^1(k,\nu) \to \prod_{i=1,..,r} H^1(k_i,\nu)$ a un noyau trivial.*

Admettons le lemme. Comme $\gamma_{k_i} = 1$ pour $i = 1, .., n$, on a $p_*(\gamma)_{k_i} = 1$ pour $i = 1, .., n$, on a $p_*(\gamma) = 1$. On peut donc supposer que $\gamma \in H^1(k, G)$ et $\gamma_{k_i} = 1$ pour $i = 1, .., n$. Montrons le lemme.

Démonstration du lemme VI.3.1.1. : Le groupe ν est un k-groupe constant. Si Δ est distinct de D_3, le groupe ν est un k-groupe fini commutatif constant donc un k-groupe de type multiplicatif et un argument classique de restriction-corestriction montre le lemme. On suppose donc que $\Delta = D_3$ et que $\nu = S_3$ le groupe de permutations de trois éléments. On a une suite exacte de groupes $1 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$ assurant un diagramme exact d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & 1 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & H^1(k,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(k,S_3) & \longrightarrow & H^1(k,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
 & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
1 & \longrightarrow & \prod\limits_{i=1,..,r} H^1(k_i,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \prod\limits_{i=1,..,r} H^1(k_i,S_3) & \longrightarrow & \prod\limits_{i=1,..,r} H^1(k_i,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})
\end{array}$$

Une chasse au diagramme montre le lemme pour S_3. □

VI.3.2. — Réduction au cas d'une forme anisotrope. Pour pouvoir appliquer la proposition VI.2.4., il faut que le groupe G soit anisotrope. On va se ramener à cette situation. Soit T un k-tore déployé maximal de G^d. On note $\Phi = \Phi(T, G^d)$ le système de racines associé à la représentation adjointe de G, Φ^+ un système de racines positives, Δ l'ensemble des racines simples positives et $B = T.U$ le sous-groupe de Borel associé. Si Θ est une partie de Δ, on note T_Θ le sous–tore (déployé) de T défini par

$$T_\Theta = \Big(\bigcap_{\alpha\in\Theta} \mathrm{Ker}(\alpha)\Big)^0$$

On sait que les parties Θ de Δ paramètrent les groupes $P_\Theta = Z(T_\Theta).U$ qui sont les k–sous–groupes paraboliques de G^d contenant B (G^d est un sous-groupe parabolique de G^d). Notons Q_Θ le groupe semi-simple déployé $Z(T_\Theta)/T_\Theta$. Le diagramme de Dynkin de Q_Θ par rapport au projeté du tore $T_{\Delta-\Theta}$ est $\Delta - \Theta$.

D'après le théorème de Borel II.3.1.3., on sait que l'application naturelle $H^1(k, Z(T_\Theta)) \longrightarrow H^1(k, P_\Theta)$ est bijective. Le théorème 90 de Hilbert assure une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \to H^1(k, Z(T_\Theta)) \to H^1(k, Q_\Theta)$$

La décomposition de Witt-Tits (II.3.1.3.) sécrit

$$\coprod_{\Theta\subset\Delta} H^1(k, Z(T_\Theta))_{an} \xrightarrow{\sim} H^1(k, G).$$

Il existe une partie Θ de Δ telle que $\gamma \in \mathrm{Im}(H^1(k, Z(T_\Theta))_{an} \to H^1(k, G))$. On peut supposer que $\gamma \in H^1(k, Z(T_\Theta)_{an}$. Le $a)$ assure assure que $\gamma \in \mathrm{Ker}\big(H^1(k, Z(T_\Theta) \to \prod_{i=1,..,r} H^1(k_i, Z(T_\Theta))\big)$. On a un diagramme commutatif de restrictions

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \longrightarrow & H^1(k, Z(T_\Theta)) & \longrightarrow & H^1(k, Q_\Theta) \\
 & & \gamma & & \gamma' \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \prod\limits_{i=1,..,r} H^1(k_i, Z(T_\Theta)) & \longrightarrow & \prod\limits_{i=1,..,r} H^1(k_i, Q_\Theta) \\
 & & 1 & & 1
\end{array}$$

On note γ' l'image de γ par l'application $H^1(k, Z(T_\Theta)) \to H^1(k, Q_\Theta)$. Choisissons un cocycle z' de $Z^1(k, Q_\Theta)$ représentant γ'. Le groupe ${}_{z'}Q_\Theta$ est anisotrope et si μ_Θ est le centre du revêtement universel de Q_Θ, on vérifie cas par cas que le groupe μ_Θ est non trivial et que le groupe $\mu_\Theta(-1)(k)$ est non trivial. La proposition VI.2.4. appliquée au groupe ${}_{z'}Q_\Theta$ montre que ${}_{z'}Q_\Theta$ n'est pas anisotrope. Le seul cas où le groupe ${}_{z'}Q_\Theta$ puisse être isotrope et anisotrope est le cas du groupe trivial, i.e $\Theta = \Delta$. Dans ce cas, $Z(T(\Theta)) = T$ et $H^1(k, T) = 1$ (th. 90 de Hilbert), donc $\gamma = 1$. $\square$

Appendice A : flèches résidus

Soit k un corps et k_s une clôture séparable de k dont on note $\mathcal{G}$ le groupe de Galois. Soit O un anneau complet pour une valuation discrète normalisée, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Notons $O \hookrightarrow O_1$ l'extension étale maximale de O, de corps des fractions K_1. On va montrer la proposition suivante.

Proposition A.1. —

a) Soit μ un O-groupe de type multiplicatif fini. Il existe une application naturelle de résidu $\partial : H^1_{fppf}(K,\mu) \to \mu(-1)(k)$ telle que l'on ait la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{fppf}(O,\mu) \longrightarrow H^1_{fppf}(K,\mu) \xrightarrow{\partial} \mu(-1)(k) \longrightarrow 0.$$

b) Soit μ un k-groupe de type multiplicatif fini. Il existe une suite exacte de localisation

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \longrightarrow & H^1_{fppf}(k,\mu) & \longrightarrow & H^1_{fppf}(k(t),\mu) & \xrightarrow{\oplus\partial_M} \\ \xrightarrow{\oplus\partial_M} & \bigoplus \mu(-1)(k(M)) & \xrightarrow{\sum N_{k(M)/k}} & \mu(-1)(k) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où M parcourt les points fermés de la droite projective $\mathbb{P}^1_k$.

Lemme A.2. —

a) Soit T un O-tore. On a une suite exacte naturelle de $\mathcal{G}$-modules

$$0 \longrightarrow T(O_1) \longrightarrow T(K_1) \xrightarrow{\partial} \widehat{T}^0 \longrightarrow 0$$

scindée par le choix d'une uniformisante de K. Les applications naturelles $H^1(\mathcal{G},T(O_1)) \to H^1(O,T)$ et $H^1(\mathcal{G},T(K_1)) \to H^1(K,T)$ sont des isomorphismes.

b) Soit T un k-tore. On a une suite exacte naturelle de $\mathcal{G}$-modules

$$0 \to T(k_s) \to T(k_s(t)) \xrightarrow{\oplus\partial_M} \bigoplus_{N\in\mathbb{P}^1_{k_s}} \widehat{T}^0 \xrightarrow{\sum} \widehat{T}^0 \to 0$$

induisant la suite exacte

$$0 \to T(k) \to T(k(t)) \xrightarrow{\oplus\partial_M} \widehat{T}^0(k(M)) \xrightarrow{N_{k(M)/k}} \widehat{T}^0(k) \to 0$$

où M parcourt les points fermés de la droite projective $\mathbb{P}^1_k$. L'application naturelle $H^1\big(\mathcal{G}, T(k_s(t))\big) \to H^1(k(t), T)$ est bijective.

Démonstration : *a*) La valuation induit une suite exacte de $\mathcal{G}$–modules

$$0 \longrightarrow O_1^* \longrightarrow K_1^* \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

qui est scindée par le choix d'une uniformisante de K. On tensorise cette suite par le $\mathcal{G}$ module $\widehat{T}^0 = \widehat{T}^0(k_s) = \widehat{T}^0(O_1) = \widehat{T}^0(K_1)$. On a une suite exacte scindée de $\mathcal{G}$–modules

$$0 \longrightarrow T^0(O_1) \otimes_{\mathbb{Z}} O_1^* \longrightarrow T^0(K_1) \otimes_{\mathbb{Z}} K_1^* \longrightarrow \widehat{T}^0 \longrightarrow 0.$$

Or $T(O_1) = \mathrm{Hom}(\widehat{T}^0(O_1), O_1^*) = \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} O_1^*$ et $T(K_1) = \widehat{T}^0(K_1) \otimes_{\mathbb{Z}} K_1^*$. D'où la suite exacte scindée de $\mathcal{G}$–modules

$$0 \longrightarrow T(O_1) \longrightarrow T(K_1) \longrightarrow \widehat{T}^0(O_1) \longrightarrow 0$$

Le tore T_{O_1} est déployé donc le th. 90 de Hilbert montre que $H^1(O_1, T) = 1$ et $H^1(K_1, T) = 1$. Par suite, on a des isomorphismes $H^1(\mathcal{G}, T(O_1)) \xrightarrow{\sim} H^1(O, T)$ et $H^1(\mathcal{G}, T(K_1)) \xrightarrow{\sim} H^1(K, T)$. Le *b*) est laissé au lecteur. $\square$

Démonstration de la proposition A.1. : *A.1.a*) Il existe une suite exacte
$1 \to \mu \to E \to S \to 1$ de O-schémas en groupes sur $\mathrm{Spec}(O)_{fppf}$ où E est un O-tore quasi-trivial et S un O-tore.

Lemme A.3. — *On a une suite exacte naturelle de $\mathcal{G}$-modules*

$$0 \longrightarrow \widehat{E}^0 \longrightarrow \widehat{S}^0 \longrightarrow \mu(-1) \longrightarrow 0$$

Démonstration du lemme A.3 : On a une suite exacte de $\mathcal{G}$-modules

$$0 \longrightarrow \widehat{S} \longrightarrow \widehat{E} \longrightarrow \widehat{\mu} \longrightarrow 0.$$

Prenant la suite exacte de cohomologie associée au foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(.,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\mathcal{G}]}(.,\mathbb{Z})$, on a

$$0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Z}) \rightarrow \widehat{E}^0 \rightarrow \widehat{S}^0 \rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\widehat{E}, \mathbb{Z}) = 0$$

car $\widehat{E}$ est un $\mathcal{G}$-module de permutation. La suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ induit la suite exacte

$$0 = Hom_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Q}) = 0$$

car $\mathbb{Q}$ est divisible. Donc $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Z})$ et par dualité on a un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\widehat{\mu}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim \mathrm{Hom}_{k_s-gr}(\mu_n, \mu) = \mu(-1)$. On a donc une suite exacte de $\mathcal{G}$-modules $\quad 0 \longrightarrow \widehat{E}^0 \longrightarrow \widehat{S}^0 \longrightarrow \mu(-1) \longrightarrow 0$ ∎

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \to & \mu(O) & \to & S(O) & \to & E(O) & \to & H^1_{fppf}(O, \mu) & \to & H^1_{fppf}(O, E) = 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & \mu(K) & \to & S(K) & \to & E(K) & \to & H^1_{fppf}(K, \mu) & \to & H^1_{fppf}(K, E) = 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \widehat{E}^0(k) & \hookrightarrow & \widehat{S}^0(k) & & & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

où les suites horizontales sont les suites exactes de cohomologie $fppf$ et les deux premières verticales sont les suites de localisation du lemme $A.2$ auxquelles on a appliqué le foncteur $(\quad)^{\mathcal{G}}$ (la surjectivité est due au scindage). Une chasse au diagramme assure l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{fppf}(O, \mu) \longrightarrow H^1_{fppf}(K, \mu) \xrightarrow{\partial_K} \widehat{S}^0(k)/\widehat{E}^0(k) \longrightarrow 0$$

D'après le lemme A.3, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \widehat{E}^0(k) \longrightarrow \widehat{S}^0(k) \longrightarrow \mu(-1)(k) \longrightarrow H^1(k, \widehat{E}^0) = 0$$

car E^0 est un $\mathcal{G}$-module de permutation. On a ainsi construit une application $\partial : H^1_{fppf}(K,\mu) \to \mu(-1)(k)$ induisant une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{fppf}(K,\mu) \longrightarrow H^1_{fppf}(K,\mu) \xrightarrow{\partial} \mu(-1)(k) \longrightarrow 0.$$

Il est aisé de voir que l'application ∂ ne dépend pas de la résolution choisie. Le $A.b)$ est laissé au lecteur. $\square$

Appendice B : le groupe orthogonal et la suite exacte de Milnor-Tate

Le groupe orthogonal est un bon exemple pour l'étude des torseurs sur les droites projective et affine et a inspiré notre preuve du théorème A. Soit k un corps de caractéristique distincte de 2.

$B.1.$ — *Fibrés quadratiques de rang pair sur* $\mathbb{P}^1$. Soit $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 0$. Soit $(e_i)_{i=1,..,2l}$ la base canonique de l'espace vectoriel $V_{2l} = k^{2l}$. On note Q_{2l} la forme hyperbolique

$$Q_{2l}\Big(\sum_{i=1,..,2l} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1,..,l} x_i x_{i+l}$$

et $O(2l) \subset GL_{2l}$ de Q_{2l}. Si $1 \leq r \leq l$, on a un isomorphisme naturel $Q_{2l} \simeq Q_{2r} \oplus Q_{2(l+r)}$ induisant un morphisme $O(2r) \times O(2(l-r)) \longrightarrow O(2l)$. L'ensemble pointé $H^1(k, O(2l))$ classe les k-formes quadratiques non dégénérées de rang $2l$. On a donc des applications naturelles

$$H^1(k, O(2l)) \to I(k) \subset W(k)$$

Soit $\mathbb{G}_m^{2l} \subset GL_{2l}$ le tore diagonal et on note $(\lambda_i : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m^{2l})_{i=1,..,2l}$ la base canonique de $\widehat{\mathbb{G}_m^{2l}}^0$. Notons T_l le sous-tore de $\mathbb{G}_m^{2l}$ défini par $\widehat{T}_l^0 = \bigoplus_{i=1,..,l} \mathbb{Z}.(\lambda_i - \lambda_{i+l})$. Le tore T_l est un k-tore déployé maximal de $SO(2l)$. Notons $W = N_{SO(2l)}(T)/T$ et $W^1 = N_{O(2l)}(T)/T$. On a une suite exacte scindée de groupes finis

$$1 \longrightarrow W \longrightarrow W^1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Notons $\Delta = (\alpha_i)_{i=1,..,l}$ l'ensemble de racines simples de $\Phi(T_l, SO(2l))$ défini par

$\alpha_i = \lambda_i^* - \lambda_{i+1}^*$ pour $i = 1, .., l-1$ et $\alpha_l = \lambda_{l-1}^* + \lambda_l^*$ (cf. [Bo1] p. 79). Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = Aut(\Delta)$ agit en permutant α_{l-1} et α_l. Notant $\widehat{T}_{l,+}^0 = \Big\{\lambda \in \widehat{T}^0 \mid (\lambda, \alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta\Big\}$, on a

$$\widehat{T}_{l,+}^0 = \Big\{ \sum_{i=1,..,l} a_i(\lambda_i - \lambda_{i+l}) \mid \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad a_1 \geq ... \geq a_{l-1} \geq \mid a_l \mid \Big\}.$$

Par suite, l'application

$$\Big\{ \sum_{i=1,..,l} a_i.(\lambda_i - \lambda_{i+l}) \mid \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad a_1 \geq .. \geq a_{l-1} \geq a_l \geq 0 \Big\} \longrightarrow \widehat{T}_l^0 / W^1$$

est une bijection. Le théorème de Grothendieck-Harder pour les groupes non connexes (II.2.1.1.) permet de déterminer $H^1_{Zar}(\mathbb{P}^1, O(2l))$ ([Rag] p.188). Tout $\mathbb{P}^1$-torseur sous $O(2l)$, i.e. tout fibré quadratique sur $\mathbb{P}^1$ de rang $2l$ est isomorphe à $D(a_1,..,a_l) = \sum_{i=1,..,l} \{\mathcal{O}(a_i) \oplus \mathcal{O}(-a_i)\}$ (somme orthogonale) où les a_i sont des entiers satisfaisant $a_1 \geq a_2... \geq a_l \geq 0$ et où le fibré vectoriel $\{\mathcal{O}(a_i) \oplus \mathcal{O}(-a_i)\}$ est muni de la forme quadratique hyperbolique fournie par la dualité $\mathcal{O}(a_i)^* = \mathcal{O}(-a_i)$. Appliquons le théorème II.2.2.1. déterminant $H^1(\mathbb{P}^1, O(2l))$. Soit $\lambda = \sum_{i=1,..,r} a_i(\lambda_i - \lambda_{i+l}) \in \widehat{T}_l^0$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_1 \geq a_2... \geq a_r \geq 1$ et $r \leq l$. On a un morphisme

$$\begin{array}{cccc} \prod_{i=1,..,l}(\lambda_i - \lambda_{i+l}) : & \mathbb{G}_m^r & \longrightarrow & Z_{SO(2l)}(\lambda) \\ & (t_i)_{i=1,..,r} & \longrightarrow & \prod_{i=1,..,r} \lambda_i(t_i)\lambda_{i+l}(t_i^{-1}) \end{array}$$

induisant un isomorphisme

$$\mathbb{G}_m^r \times O(l-r) \xrightarrow{\sim} Z_{O(2l)}(\lambda).$$

Le théorème 90 de Hilbert assure que $H^1(k, O(l-r)) \xrightarrow{\sim} H^1(k, Z_{O(2l)}(\lambda))$. Le théorème II.2.2.1. montre que tout $\mathbb{P}^1$-torseur sous $O(2l)$, i.e. tout fibré quadratique de rang $2l$ est isomorphe à $q_0 \oplus D(a_1,..,a_r,0,..,0) \simeq q_0 \oplus D(a_1,..,a_r)$ où q_0 est une k-forme quadratique non dégénérée de rang $2(l-r)$ et a_1,..,a_r sont des entiers satisfaisant $a_1 \geq a_2... \geq a_r \geq 1$. Le théorème th. II.3.2.4. s'écrit

Théorème B.1.1. (Harder cf. [Knebusch1] th. 13.2.2). — *Soit $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$.*

a) Tout fibré quadratique sur $\mathbb{P}^1$ de rang $2l$ est isomorphe à

$$q_0 \oplus D(a_1,..,a_r)$$

où q_0 est une k-forme quadratique non dégénérée de rang $2(l-r)$ et a_1,.., a_r des entiers satisfaisant $a_1 \geq a_2... \geq a_r \geq 1$. Deux fibrés quadratiques $q_0 \oplus D(a_1,..,a_r)$ et $q_0' \oplus D(a_1',..,a_s')$ sont isomorphes si et seulement si $r = s$, $a_i = a_i'$ pour $i = 1,.,r$ et $q_0 \simeq q_0'$.

b) L'application naturelle $W(k) \longrightarrow W(\mathbb{P}^1)$ induit un isomorphisme

$$W(k) \xrightarrow{\sim} W(\mathbb{P}^1).$$

$\square$

Si de plus, on applique le théorème de Witt, on obtient un énoncé équivalent que l'on peut voir comme un analogue du théorème de Witt sur la droite projective.

Théorème B.1.2. (Harder cf. [Knebusch1] th. 13.2.2). — *Soit $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$. Tout fibré quadratique sur $\mathbb{P}^1$ de rang $2l$ est isomorphe à*

$$q_0 \oplus D(a_1, .., a_r)$$

où q_0 est une k-forme quadratique anisotrope de rang $2(l-r)$ et a_1,.., a_r des entiers satisfaisant $a_1 \geq a_2 ... \geq a_r \geq 0$. Deux tels fibrés quadratiques $q_0 \oplus D(a_1, .., a_r)$ et $q_0' \oplus D(a_1', .., a_s')$ sont isomorphes si et seulement si $r = s$, $a_i = a_i'$ pour $i = 1, ., r$ et $q_0 \simeq q_0'$. □

A.2. — La suite exacte de Milnor-Tate. Pour tout point fermé M de $\mathbb{P}^1$, on a une flèche résidu (choisie avec une uniformisante qui est un polynôme unitaire irréductible) $\partial_M : W(\widehat{k}_M) \to W(k(M))$. Harder a montré la suite exacte du th. B.2.1. ci-dessousà partir de l'égalité $W(k) = W(\mathbb{P}^1$ et d'une formule de réciprocité sur les applications résidus de Milnor. En modifiant l'argument sur les résidus, on se propose d'en donner une nouvelle démonstration qui peut sétendre aux ensembles pointés $H^1(k(t), G)$ (III.2.2.1.).

Théorème B.2.1. (cf. [Knebusch1], [L] p. 265). — *On a une suite exacte de groupes*

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow W(k) \longrightarrow W(k(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_M} \bigoplus_{M \in \mathbb{A}^1_k} W(k(M)) \longrightarrow 0$$

Puisque $W(k) = W(\mathbb{P}^1)$, la suite exacte I.3.2.2.b montre le

Lemme B.2.2. — *On a une suite exacte de groupes*

$$0 \longrightarrow W(k) \longrightarrow W(k(t)) \xrightarrow{\oplus \partial_M} \bigoplus_{M \in \mathbb{P}^1_k} W(k(M))$$

□

Remarque : Cette suite exacte est à comparer à celle établie en II.3.3.5.e pour le groupe $SO(2l)$

$$1 \to H^1(k, SO(2l)) \to H^1(k(t), SO(2l)) \to \coprod_{M \in \mathbb{P}^1_k} H^1(\widehat{k}_M, SO(2l))/H^1(\widehat{O}_M, SO(2l)).$$

Proposition B.2.3. — *La suite de Milnor-Tate $(*)$ est exacte en $W(k(t))$.*

Démonstration : Soit $c(t) = [q] \in W(k(t))$ satisfaisant $\partial_M([q]) = 0$ pour tout point fermé M de $\mathbb{A}^1$. On peut supposer que $c(0) = 1$. Notons $G_q(k(t))$ le groupe des facteurs de similitude de q. On va montrer que $k^* \subset G_q(k(t))$. Soit $a \in k^*$. Notons $x = \sqrt{at}$. Le corps $k(t)(x)$ est isomorphe au corps à une indétérminée $k(x)$. Le morphisme de corps $f : k(t) \hookrightarrow k(x)$ induit un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & W(k) & \xrightarrow{i} & W(k(t)) & \xrightarrow{\oplus\partial_M} & \bigoplus_{M\in\mathbb{P}^1_k} W(k(M)) \\
 & & \| & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow \\
0 & \to & W(k) & \xrightarrow{i} & W(k(x)) & \xrightarrow{\oplus\partial_N} & \bigoplus_{N\in\mathbb{P}^1_k} W(k(N))
\end{array}$$

En particulier, au point ∞, l'application $f_* : W(k(\infty)) \to W(k(\infty))$ est l'application nulle. Par suite, $\partial_N(f_*([q])) = 0$ pour tout point fermé N donc $f_*([q])$ est constante et par spécialisation en 0, on a $f_*([q]) = 0$. Donc il existe une $k(t)$-forme quadratique Ψ telle que $q = \langle 1, -at\rangle \otimes \Psi$ sur $k(t)$. Donc $-at \in G_q(k(t))$ pour tout $a \in k^*$. Il résulte que $k^* \subset G_q(k(t))$. Notons u une nouvelle indéterminée. On a alors $u \in G_q(k(u)(t))$. Notons $\partial_{0,u} : W\big(k(t)(u)\big) \to W(k(t))$ l'application résidu de Milnor prise avec l'uniformisante u. On a $0 = \partial_{0,u}([uq] - [q]) = [q]$ donc $[q]_{k(t)} = 0$ donc $[q] = 0$. ∎

La suite exacte de Milnor-Tate permet d'avoir une nouvelle démonstration du résultat classique suivant.

Théorème B.2.4. (Springer [Sp1], cf. [L] p.198). — *Supposons k parfait. Soit L/k une extension de corps de degré impair. Alors la restriction $W(k) \to W(L)$ est injective.*

Démonstration : La suite exacte de Milnor-Tate s'écrit :

$$0 \longrightarrow W(k) \longrightarrow W(k(t)) \xrightarrow{\oplus\partial_M} \oplus W(k(M)) \longrightarrow 0$$

où M parcourt les points fermés de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$. On choisit un point fermé M de la droite affine tel que $L = k(N) = k_\pi$ où $\pi(t)$ est un polynôme irréductible unitaire de degré impair. Soit $[q] \in \mathrm{Ker}(W(k) \to W(L))$. Calculons les résidus de $[\pi(t).q] \in W(k(t))$. Alors $[\pi(t).q]$ n'a qu'un résidu en N qui vaut $[q_L] = 0$ par hypothèse. Donc

$([\pi(t).q]) \in \mathrm{Im}(W(k) \to W(k(t))$. Or, on a une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & [\pi(t).q] \in \quad W(k(t)) & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & W(k) & \longrightarrow & W\Big(k((\frac{1}{t}))\Big) & \xrightarrow{\partial_\infty} & W(k) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & [q] & &
\end{array}$$

On calcule le résidu à l'infini de $[\pi(t).q]$ qui est nul donc $[q] = 0$. ∎

Bibliographie

[Bo1] A. Borel. — *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann (1969) .

[Bo2] A. Borel. — *Linear algebraic groups*, 2^{nde} édition, Graduate Texts in Mathematics 126, Springer-Verlag .

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud. — *Néron Models*, (1990) Springer-Verlag.

[B-T1] F. Bruhat et J. Tits. — *Groupes réductifs sur un corps local I*, Publ. Math. IHES 41 (1972), 13–234.

[B-T2] F. Bruhat et J. Tits. — *Groupes réductifs sur un corps local II*, Publ. Math. IHES 60 (1984), .

[B-T3] F. Bruhat et J. Tits. — *Groupes algébriques sur un corps local III. Compléments et application à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 34 (1987), 671-698.

[B-T4] F. Bruhat et J. Tits. — *Groupes algébriques simples sur un corps local*, Proc. Local Fields (Driebergen 1966), Springer (1967), 23–36 .

[Cher] V.I. Chernousov. — *The Hasse principle for groups of type E_8*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 306 (1989), 1059-1063 (en russe), et Math. USSR-Izv. 34 (1990), 409-423 (en anglais) .

[Chev] C. Chevalley. — *Classification des groupes de Lie algébriques*, Secrétariat Math., Paris (1958).

[CT-O] J.–L. Colliot–Thélène et M. Ojanguren. — *Espaces principaux homogènes localement triviaux*, Publ. Math. IHES 72 (1992), 97–122.

[CT-Sa1] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc. — *La R–équivalence sur les tores*, Ann. Scient. ENS, vol. 10 (1977), 175–230.

[CT-Sa2] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc. — *Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori : Applications*, J. of Alg. 106 (1987), 148–205.

[CT-Sa3] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc. — *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. 54(1987), 375–492.

[Di1] J. Dieudonné. — *La géométrie des groupes classiques, $3^{\text{ième}}$ édition*, Springer (1973).

[Di2] J. Dieudonné. — *Sur les générateurs des groupes classiques*, Summa Bras. Math. 3 (1955), 149–178.

[Del] P. Deligne. — *Variétés de Shimura. Interprétation modulaire et technique de construction de modèles canoniques*, Proc. Symp. Pure. Math 33 (1979), 247-290.

[Dem] M. Demazure. — *Schémas en groupes réductifs*, Bull. S.M.F. 93 (1973), 369–413.

[Gil1] P. Gille. — *R–équivalence et principe de norme en cohomologie galoisienne*, C.R. Acad. Sci. Paris 316 (1993), 315–320.

[Gil2] P. Gille. — *Un théorème de finitude arithmétique sur les groupes réductifs*, C.R. Acad. Sci. Paris 316 (1993), 701–704 .

[Gir] J. Giraud. — *Cohomologie non abélienne*, Springer (1971) .

[Gr1] A. Grothendieck. — *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Am. J. Math. 79 (1957), 121-138.

[Gr2] A. Grothendieck. — *Techniques de descente en géométrie algébrique*, Séminaire Bourbaki 190 et 195 (1959-60), Secrétariat mathématique de l'institut Henri Poincaré.

[Gr3] A. Grothendieck. — *Torsion homologique et sections rationnelles*, Séminaire Chevalley, Paris (1958), 2^{nde} année, *Anneaux de Chow et applications*, exposé n ^{0} 5.

[Gr-D] A. Grothendieck et J. Dieudonné. — *Éléments de géométrie algébrique EGA IV*, Publ. Math. IHES 24 (1965) et 28 (1966) .

[H1] G. Harder. — *Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen*, Inv. Math. 4 (1967), 165–191.

[H2] G. Harder. — *Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven*, Inv. Math. 6 (1968), 107–149.

[H3] G. HARDER. — *Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie halbeinfacher Gruppen*, Jahresbericht d. DMV 70 (1968), 182–216.

[I-M] N. IWAHORI et H. MATSUMOTO. — *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups*, Pub. IHES 25 (1965), 5–48.

[K-S] K. KATO et S. SAITO. — *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. 118 (1983), 241–275.

[Knebusch1] M. KNEBUSCH. — *Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen*, Sistzungber. Heidelb. Akad. Wiss. Math 3 (1970), 93–157.

[Knebusch2] M. KNEBUSCH. — *Symmetric bilinear forms over algebraic varieties*, Conference on quadratic forms, Kingston 1976, Ed. Orzech, Queen's paper in pure and applied mathematics 46 (1977), 103-283.

[Kneser] M. KNESER. — *Galois cohomology of classical groups*, Tata Instute for fondamental Research, Bombay (1967).

[Kn-O-Sal] M. KNUS, M. OJANGUREN et D. SALTMAN. — *Brauer Groups*, Evanston , 25–29, Lecture Notes in Math. 549 (1975), Springer Verlag.

[L] T.–Y. LAM. — *The Theory of Algebraic Quadratic Forms*, Benjamin/Cummings (1980).

[Man] Yu.I. MANIN. — *Cubic forms*, 2^{nde} édition, North–Holland (1986).

[Mar] G.A. MARGULIS. — *Finiteness of quotient groups of discrete groups*, Func. Anal. App. 13 (1979), 178–187.

[Me1] A.S. MERKURJEV . — *R-equivalence and norm principle* (1993), à paraître.

[Me2] A.S. MERKURJEV . — *R-equivalence on adjoint classical groups* (1993), à paraître.

[Milne] J.S. MILNE. — *Étale Cohomology* (1980), Princeton.

[Milnor-Hu] J.MILNOR et D. HUSEMOLLER. — *Symetric Bilinear Forms* (1973), Springer.

[N1] Ye.A. NISNEVICH. — *Espaces homogènes localement triviaux sur les schémas en groupes d'anneau de Dedekind*, C.R.Acad Sci. Paris, tome 299 (1984), 5–8.

[N2] Ye.A. NISNEVICH. — *The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in Algebraic K-Theory*, Jardine and Snaith, Algebraic K-Theory : Connections with Geometry and Topology (1987), 241-342 .

[P] V. PLATONOV. — *Local-global Principles in Algebra and Number Theory*, Contemporary Mathematics 131, Part 3 (1992), 475–483.

[Rag1] M.S. RAGHUNATHAN. — *Principal bundles on affine space*, In : C.P Ramanujan - A tribute. (Stud. Math. Ann., vol. 8) Bombay : Tata Inst. Fundam. Res. 1978.

[Rag2] M.S. RAGHUNATHAN. — *Principal bundles on affine space and bundles on projective line*, Math. Annalen 285 (1989), 309-332.

[Rag3] M.S. RAGHUNATHAN. — *Principal bundles admitting a rational section*, Invent. math. 116 (1994),409–423.

[Rag-Ram] M.S. RAGHUNATHAN and A. RAMANATHAN. — *Principal bundles on the affine line*, Proc.Indian Acad. Sci. 93 (1984), 137–144.

[Ram] A. RAMANATHAN. — *Deformations of Principal Bundles on the Projective Line*, Invent. math. 71 (1983), 165–191.

[Ro] M. ROST. — *Durch Normengruppen definierte birationale Invarianten*, C.R. Acad. Sci. Paris 310 (1990), 189–192.

[Sa] J.–J. SANSUC. — *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques sur un corps de nombres*, J. Reine Angew. Math. 327 (1981), 13–81.

[Se1] J.–P. SERRE. — *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5 (1965), Springer–Verlag.

[Se2] J.–P. SERRE. — *Cohomologie galoisienne des groupes algèbriques linéaires* , Coll. Th. des groupes algébriques Bruxelles C.B.R.M. (1962), 53-68.

[Se3] J.–P. SERRE. — *Arbres et amalgames*, Astérisque 46 (1977), S.M.F.

[Se4] J.–P. SERRE. — *Résumé des cours au Collège de France*, 1990–91.

[Se5] J.–P. SERRE. — *Résumé des cours au Collège de France*, 1991–92.

[Se6] J.–P. SERRE. — *Cohomologie galoisienne : Progrès et problèmes*, Séminaire BOURBAKI, exposé 783 (1993-94) .

[SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 151-153. Springer (1970).

[SGA4] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1969-1970, cohomologie étale, dirigé par M. Artin et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 309. Springer (1977).

[Sp1] T.A. SPRINGER. — *Sur les formes quadratiques d'indice* 0, C.R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), 1517–1519.

[Sp2] T.A. SPRINGER. — *Reductive groups*, Proc. Symp. Pure. Math vol. 33, part I (1979), 3-27.

[St] R. STEINBERG. — *Regular éléments of semisimple algebraic groups*, Pub. Math. IHES 25 (1965) .

[V-Kl] V.E. VOSKRESENSKIĬ and A.A. KLYACHKO. — *Toroidal Fano varieties and roots systems*, Math. USSR Izvestija vol. 24 (1985), 221–244.

[T1] J. TITS. — *Classification of algebraic semisimple groups*, Proc. Symp. Pure. Math (1966), 33-62 .

[T2] J. TITS. — *Strongly Inner Anisotropic Forms of Simple Algebraic Groups*, J. of Algebra 131 (1990), 648–677 .

[T3] J. TITS. — *Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples*, C.R. Acad. Sci. Paris 315 (1992), 1131–1138 .

[W] E. WITT. — *Theorie der quadratischen Formen in beliegen Körpern*, J. Crelle (1937), 31–44 .

Philippe GILLE
Département de Mathématiques, Bât. 425
Université de Paris–Sud
F–91405 ORSAY CEDEX