ECOLE D'ÉTÉ FRANCO-ASIATIQUE

Motifs des quadriques

Philippe Gille et Nikita Karpenko, 6–01 –2007

Résumé. Cet exposé est une introduction aux motifs des quadriques en vue d'applications à la théorie des formes quadratiques. Nous présentons la décomposition de Rost, le théorème de nilpotence de Rost ainsi que le critère d'équivalence motivique de formes quadratiques de Vishik. Ensuite, nous mentionnons l'application de la formule de degré de Rost aux formes quadratiques (théorèmes de Izhboldin, Hoffmann), la construction d'Izhboldin d'un corps de u-invariant 9 et les valeurs possibles du premier indice de Witt.

Nous recommandons la lecture de l'exposé de Bruno Kahn sur ce sujet [K1].

1. — Introduction.

1.1. — Soient k un corps de caractéristique distincte de 2 et k_s/k une clôture séparable de k. A toute k–forme quadratique (non dégénérée) q sur k est associée la quadrique projective X_q définie par l'équation $q = 0$, on note alors $k(q)$ le corps de fonctions de X_q. Le motif de Chow de la quadrique X_q est un objet fondamental de la preuve de la conjecture de Milnor par Voevodsky [Vo2]. Précisons d'emblée que notre propos se restreint à

- l'équivalence motivique des formes quadratiques,
- la formule du degré de Rost,
- le u-invariant,
- le premier indice de Witt.

Le premier thème a déjà donné lieu à une abondante bibliographie (Rost [R1], Vishik [V], Karpenko [Ka1], Hoffman [Ho2], Izhboldin [I1,I2]). Pour le second, nous nous appuyons sur la correspondance Rost-Merkurjev [M2,R2] et nous n'aborderons pas la preuve de la formule par le cobordisme algébrique [LM].

Nous adoptons le parti pris de nous limiter aux aspects "motiviques" des quadriques, ce qui nous prive de beaucoup d'autres applications, mais facilitera la lecture au non spécialiste des formes quadratiques ; ainsi nous ne prétendons nullement à l'exhaustivité même sur ce sujet restreint. De façon plus précise, nous souhaitons rendre compte de certains progrès récents sur les questions suivantes : quelle information contient le motif de Chow $M(X_q)$? Quand une forme quadratique anisotrope ϕ/k devient-elle anisotrope sur le corps de fonctions $k(\psi)$ d'une autre forme quadratique ψ ? En particulier, comment décrire une forme anisotrope ϕ étendue à son propre corps de fonctions $k(\phi)$?

1.2. — Rappels sur les formes quadratiques [Sc]

a). — Pour $a_1, .., a_n \in k^\times$, on note $\langle a_1, a_2, .., a_n\rangle$ la forme quadratique diagonale $q = a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + ... + a_nX_n^2$. On note $\mathbb{H} = \langle 1, -1\rangle$ le plan hyperbolique et $W(k)$ le groupe de Witt de k, c'est–à–dire le groupe de Grothendieck du monoïde des classes d'isomorphie des espaces quadratiques quotienté par le sous–groupe engendré par $\mathbb{H}$. Le produit tensoriel des formes quadratiques induit une structure d'anneau commutatif sur $W(k)$, l'unité étant la classe de la forme $\langle 1\rangle$. Pour toute forme quadratique q et tout scalaire a, on note $aq = \langle a\rangle \otimes q$. Ainsi, le groupe $k^\times/k^{\times 2}$ agit sur $W(k)$ par $(a).[q] = [aq]$; on dit qu'une forme q' est semblable à q s'il existe $a \in k^\times$ satisfaisant $q \approx aq'$.

b). — Indices de Witt. La décomposition de Witt d'une forme q/k est $q = \nu(q)\mathbb{H} \perp q_{an}$; q_{an} est le noyau anisotrope de q ; l'entier $\nu(q_k)$ est l'indice de Witt de q. On associe à q une suite finie de couples (k_i, q_i) où q_i est une k_i–forme quadratique anisotrope définie inductivement par $k_0 = k$, $q_0 = q_{an}$, $k_i = k(q_{i-1})$, $q_i = (q_{i-1}/k_i)_{an}$. La hauteur $h(q)$ de q est l'entier mimimal tel que $\dim(q_{h(q)}) \leq 1$ et la suite de corps $k_1, ..., k_{h(q)}$ est la tour déployante de q. Le type de déploiement (splitting pattern en anglais) de q est la suite des entiers $\nu(q_0/k_{q_1})$, ..., $\nu(q_{h(q)-1}/k_{q_{h(q)}})$. Donnons des exemples pour les formes quadratiques générales de rang 6 :

$$\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle, \quad type = (1,1,1),$$
$$\langle a_1, a_2, -a_1a_2, -b_1, -b_2, b_1b_2 \rangle, \quad type = (1,2),$$
$$\langle 1, a_1 \rangle \otimes \langle b_1, b_2, b_3 \rangle, \quad type = (2,1).$$

En particulier, il n'y a pas de formes de hauteur 1 et de dimension 6. L'étude des types de déploiement est un aspect de la théorie classique des formes quadratiques, voir notamment [HR].

c). — Formes de Pfister (*loc. cit.*, § 4). Pour $a_1, .., a_n \in k^\times$, on note $\langle\langle a_1, a_2, .., a_n \rangle\rangle = \langle 1, a_1 \rangle \otimes \langle 1, a_2 \rangle \otimes ... \otimes \langle 1, a_n \rangle$ la n–forme de Pfister de coefficients $a_1, ..., a_n$. On note $P_n(k)$ l'ensemble des n–formes de Pfister, i.e. l'ensemble des forme isomorphes à une forme $\langle\langle a_1, a_2, .., a_n \rangle\rangle$. Les formes de Pfister ont deux propriétés remarquables et fondamentales qui chacune essentiellement les caractérise†. Soit (q, V) une forme de Pfister.

1) Multiplicativité : pour tout corps E/k, l'ensemble des valeurs non nulles
$$D_q(E) = \{q(x) \mid x \in V \otimes_k E,\ q(x) \neq 0\}$$
est un sous– groupe de $E^\times$,
2) hauteur 1 : pour tout corps E/k, on a l'alternative suivante : q est anisotrope ou q est déployée (i.e isomorphe à une somme de plans hyperboliques).

2. — Motifs de Chow des quadriques
2.1. — Quadriques

Lemme 2.1.1. — *Deux formes quadratiques sont semblables si et seulement si elles définissent des quadriques projectives isomorphes.*

Démonstration : Soient q et q' des k–formes quadratiques de quadriques projectives respectives Q et Q' que l'on suppose isomorphes. Alors $\dim(q) = \dim(q')$. On note $O(q)/k$ (resp. $GO(q)$) le groupe orthogonal de q (le groupe des similitudes de q). Suivant [Se, § III.1], l'ensemble pointé de cohomologie galoisienne $H^1(k, O(q))$ classifie les k–formes quadratiques de même rang que q, on dispose donc de la classe $[q'] \in H^1(k, O(q))$. La variété Q est une variété drapeau généralisée et suivant [D], on sait que $\mathrm{Aut}(Q) = PGO(q) = GO(q)/\mathbb{G}_m$, i.e. le groupe des similitudes de q quotienté par les homothéties. On a par ailleurs une bijection (*ibid*) entre l'ensemble des classes d'isomorphie de k–formes de Q (i.e. les variétés X/k satisfaisant $X \times_k k_s \simeq Q \times_k k_s$) et l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(k, PGO(q))$. Il résulte que
$$[q'] \in \mathrm{Ker}\big[H^1(k, O(q)) \to H^1(k, GO(q)) \to H^1(k, PGO(q))\big].$$

† Pour la première propriété, la caractérisation vaut parmi les formes quadratiques anisotropes ; pour la seconde propriété, la caractérisation est à similitude près et parmi les formes anisotropes de dimension paire.

Calculons le noyau de cette application. Le morphisme $O(q) \to GO(q) \to PGO(q)$ est surjectif de noyau μ_2. Ainsi on a une suite exacte $1 \to \mu_2 \to O(q) \to PGO(q) \to 1$ de k–groupes algébriques induisant la suite exacte d'ensembles pointés

$$k^\times/k^{\times 2} = H^1(k, \mu_2) \to H^1(k, O(q)) \to H^1(k, PGO(q)).$$

Il est bien connu que la flèche $k^\times/k^{\times 2} \to H^1(k, O(q))$ est donnée par $(a) \mapsto [aq]$. Ainsi, q' est semblable à q.

On rappelle par ailleurs le

THÈORÈME 2.1.2 (Springer [Sc, § 2.5]). — *Soient q une forme quadratique et E/k une extension finie de corps de degré impair. Si la forme q_E est isotrope, alors la forme q/k est isotrope.*

2.2. — Motifs de Chow [A], [Su]

On note $\mathcal{P}_k$ la catégorie des variétés projectives et lisses sur k et $\mathcal{M}_k$ la catégorie (covariante) des motifs de Chow de Grothendieck définie avec l'anneau de coefficients $F = \mathbb{Z}$ pour l'équivalence rationnelle. Un objet de $\mathcal{M}_k$ est un triplet (X, p, m), où $X \in \mathcal{P}_k$, p est un projecteur ($p^2 = p$) et m est un entier. Pout tout élément $X \in \mathcal{P}_k$, on note $M(X) = (X, \Gamma_{\Delta_X}, 0)$, où Γ_{Δ_X} désigne le graphe de la diagonale $X \to X \times X$; on note $\mathbf{1} = M(\mathrm{Spec}(k)$ et $\mathbf{1}(1) := (\mathrm{Spec}(k), \Gamma_{\Delta_k}, 1)$ le motif de Tate. On a $M(\mathbf{P}^1_k) = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}(1)$. On utilisera le fait $\mathrm{Hom}(\mathbf{1}(i), \mathbf{1}(j)) = \delta_{i,j}\mathbb{Z}$.

2.3. — Quadriques isotropes

On peut ramener l'étude des motifs des quadriques à celle des motifs de quadriques anisotropes.

THÉORÈME 2.3.1 (Rost [R1], prop. 2). — *Soient $\phi = \mathbb{H} \perp \phi'$ une k–forme quadratique, $X = X_\phi$ et $X' = X_{\phi'}$. Alors on a une décomposition canonique*

$$M(X) = \mathbf{1} \oplus M(X')(1) \oplus \mathbf{1}(\dim(X)).$$

On va donner ici une preuve heuristique de la décomposition de Rost reposant sur l'existence d'une catégorie abélienne de motifs (voir [K2], §4.4.2) incluant les variétés quasi–projectives (non lisses), mais qui présente l'avantage de préserver l'intuition géométrique ; il est rassurant de savoir que cette décomposition est vraie dans $\mathcal{M}_k$.

"Démonstration" : On choisit des coordonnées (u, v, y) de sorte que $\phi(u, v, y) = uv + \phi'(y)$. On a alors la stratification suivante de X :

$$\begin{gathered} Z = \{u = 0\} \subset X \\ Z' = Z \setminus P, \quad P = [0 : 1 : 0] \\ r : Z' \to X', \quad r([0 : v : y]) = [y]. \end{gathered}$$

Alors $X \setminus Z \approx \mathbb{A}^{\dim(X_\phi)}$, donc $M(X) = \mathbf{1} \oplus M(Z)(1)$. De même, $M(Z) = M(X') \oplus \mathbf{1}(\dim(Z))$, d'où $M(X) = \mathbf{1} \oplus M(X')(1) \oplus \mathbf{1}(\dim(Z) + 1) = \mathbf{1} \oplus M(X')(1) \oplus \mathbf{1}(\otimes \dim(X))$. Le seul problème dans cette "démonstration" est le fait que P est un point singulier de Z.

On peut alors calculer le motif des quadriques standards associées aux formes

$$q_n = n\mathbb{H}, \ \ q'_n = n\mathbb{H} \oplus \langle 1 \rangle.$$

On a

$$(2.3.2) \qquad M(X_{q_n}) = \bigoplus_{i=0}^{2n-2} \mathbf{1}(i) \ \oplus \mathbf{1}(n-1), \quad M(X_{q'_n}) = \bigoplus_{i=0}^{2n-1} \mathbf{1}(i).$$

Ainsi on a

$$(2.3.3) \qquad \operatorname{End}\bigl(M(X_{q_n})\bigr) = \prod_{i=0}^{2n-3} \mathbb{Z} \ \times \ M_2(\mathbb{Z}) \qquad \text{et}$$

$$(2.3.4) \qquad \operatorname{End}_{\mathcal{M}_k}\bigl(M(X_{q'_n})\bigr) = \prod_{i=0}^{2n-1} \mathbb{Z} \quad .$$

De plus, on voit que

$$(2.3.5) \qquad CH_0(X_{q_n}) = \operatorname{Hom}(\mathbf{1}, M(X_{q_n})) = \mathbb{Z}.$$

On va en déduire la propriété suivante de simplification “à la Witt”.

Proposition 2.3.6. — *Soient $\phi = \mathbb{H} \perp \phi'$ et $\psi = \mathbb{H} \perp \psi'$ des k–formes quadratiques. Alors*

$$M(X_\phi) \approx M(X_\psi) \iff M(X_{\phi'}) \approx M(X_{\psi'}).$$

Démonstration : Le sens $\Longleftarrow$ est évident. Réciproquement, on suppose que $M(X_\phi) \approx M(X_\psi)$. Suivant la décomposition 2.3.2, on a $\dim(\phi) = \dim(\psi) = d$ et

$$M(X_\phi) = \mathbf{1} \oplus M(X_{\phi'})(1) \oplus \mathbf{1}(d),$$

$$M(X_\psi) = \mathbf{1} \oplus M(X_{\psi'})(1) \oplus \mathbf{1}(d).$$

Il est commode de regarder $\operatorname{Hom}(M(X_\phi), M(X_\psi))$ sous forme matricielle $\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$ relativement aux décompositions ci-dessus. En effet, on $\operatorname{Hom}(\mathbf{1}, M(X_{\psi'})(1)) = 0$ et $\operatorname{Hom}(\mathbf{1}, \mathbf{1}(d)) = 0$. En outre,

$$\operatorname{Hom}(M(X_{\phi'})(1), \mathbf{1}(d)) = \operatorname{Hom}(M(X_{\phi'}), \mathbf{1}(d-1)) = 0$$

pour des raisons de dimension. Ainsi $\operatorname{Hom}(M(X_\phi), M(X_\psi))$ est formé de matrices triangulaires supérieures L'isomorphisme $M(X_\phi) \approx M(X_\psi)$ induit donc un isomorphisme donc $f_2 : M(X_{\phi'})(1) \approx M(X_{\psi'})(1)$. On conclut que $M(X_{\phi'}) \approx M(X_{\psi'})$.

2.4. — Equivalence motivique

Définition 2.4.1. — *Soient ϕ et ψ deux k–formes quadratiques. Les formes ϕ et ψ sont dites motiviquement équivalentes si les motifs $M(X_\phi)$ et $M(X_\psi)$ sont isomorphes.*

Tout d'abord, il convient d'identifier les classes d'équivalence pour l'équivalence motivique des formes quadratiques, c'est à dire identifier les formes quadratiques donnant lieu à un même motif.

Théorème 2.4.2 (Vishik [V], 4.18). — *Soient ϕ, ψ des k–formes quadratiques. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

i) $M(X_\phi) \approx M(X_\psi)$,
ii) $\dim(\phi) = \dim(\psi)$ *et pour tout corps E/k,* $\nu(\phi_E) = \nu(\psi_E)$.

Nous allons montrer le sens $i) \Longrightarrow ii)$ facile de ce critère ; la réciproque nous emmènerait trop loin. Elle passe notamment par le théorème de nilpotence de Rost cité dans la section 2.6.

Démonstration de $i) \Longrightarrow ii)$: On suppose donc que $M(X_\phi) \approx M(X_\psi)$. Suivant le calcul dans le cas déployé, l'isomorphisme $M(X_{\phi,k_s}) \approx M(X_{\psi,k_s})$ entraîne que $\dim(\phi) = \dim(\psi)$.

LEMME 2.4.3. — *La forme ϕ est isotrope si et seulement si ψ est isotrope.*

On considère l'homomorphisme

$$CH_0(X_\phi) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M(X_\phi)) \longrightarrow \mathbb{Z} = CH_0(X_{\phi,k_s}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M(X_{\phi,k_s}))$$

qui est donné en prenant le degré des 0–cycles. Suivant le théorème de Springer, on sait alors que $X_\phi(k) \neq \emptyset$ si et seulement si cet homomorphisme est surjectif. Le lemme en résulte. Ce lemme et la proposition 2.3.6 entraînent que $\nu(\phi_E) = \nu(\psi_E)$ pour tout corps E/k.

2.5. — Un exemple de quadriques motiviquement équivalentes mais non isomorphes

Suivant Izhbodin [I1], on sait que si la dimension de ϕ et ψ est impaire, alors ϕ est semblable à ψ si et seulement si $M(X_\phi) \approx M(X_\psi)$, ceci est aussi vrai en rang 2, 4 et 6, mais faux en rang 8, point que nous allons développer.

DÉFINITION 2.5.1. — *Deux formes quadratiques ϕ, ψ sont dites demi–voisines si* $\dim(\phi) = \dim(\psi)$ *et si il existe des scalaires $a, b \in k^\times$ tel que*

$$a\phi \perp b\psi \quad \in \quad P_*(k).$$

Des formes demi–voisines sont de dimension 2^n. On sait que le demi–voisinage est une relation d'équivalence sur l'ensemble des k–formes quadratiques de dimension 2^n [Ho], mais il importe surtout ici de connaître le lemme suivant.

LEMME 2.5.2. — *Soient ϕ/k, ψ/k des demi–voisines de Pfister. Alors ψ et ψ sont motiviquement équivalentes.*

Démonstration : Quitte à remplacer ϕ et ψ par des formes semblables, on peut supposer que $\phi \perp \psi = f$ est une forme de Pfister. Suivant le critère de Vishik, il suffit de vérifier que $\nu(\phi) = \nu(\psi)$. Si f est anisotrope, alors ϕ et ψ le sont aussi, donc $\nu(\phi) = \nu(\psi) = 0$. Si f est isotrope, on sait alors que f est hyperbolique, donc d'après le théorème de simplification de Witt, on a $\phi = -\psi$, d'où $\nu(\phi) = \nu(\psi)$.

En dimension 2 et 4, il est connu que deux formes demi–voisines sont semblables ; cela est faux en dimension 8 comme le montre le contre–exemple suivant dû à Hoffmann [Ho, § 3].

PROPOSITION 2.5.3. — *Soit $F = \mathbb{R}((x))((y))$. On considère les F–formes quadratiques*

$$\phi = \langle 1, 1, x, x, x, x, -y, -xy \rangle \quad \textit{et} \quad \psi = \langle -1, -1, y, y, y, xy, xy, xy \rangle.$$

Alors ϕ et ψ sont demi–voisines et ne sont pas semblables.

Compte-tenu du lemme, la proposition donne un exemple de formes quadratiques motiviquement équivalentes mais non semblables. Le corps F est particulièrement simple du point de vue de la théorie des formes quadratiques. En effet, on a $F^\times/F^{\times 2} = (\mathbb{Z}/2)^3$, les représentants étant $(-1)^\alpha x^\beta y^\gamma$. De plus, on connait le groupe de Witt $W(F)$. On rappelle que l'on a une décomposition [Sc, § 6.2]

$$W(k((t))) = W(k) \oplus W(k),$$

c'est à dire que toute $k((t))$–forme quadratique anisotrope est isomorphe à une forme $q_1 \oplus tq_2$, où q_1, q_2 sont des k–formes quadratiques anisotropes. Appliquant deux fois cette identité, il vient

$$W(F) = [W(\mathbb{R})]^4 \; = \; \mathbb{Z}^4,$$

i.e. toute F–forme quadratique anisotrope se décompose en une somme $q_1 + xq_2 + yq_3 + xyq_4$ où les q_i sont des formes quadratiques réelles anisotropes. Le groupe $F^\times/F^{\times 2} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ agit alors sur $W(F)$ comme sous-groupe de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes S_4 \subset GL_4(\mathbb{Z})$.

Démonstration de la proposition 2.5.3 : On vérifie $\phi \perp -\psi = \langle 1,1,1,1\rangle \otimes \langle 1, x, -y, -xy\rangle = \langle\langle 1,1,x,-y\rangle\rangle$, donc ϕ et ψ sont demi–voisines. Dans la base ci–dessus, on a $[\varphi] = (2,4,-1,-1)$ et $[\psi] = (-2,3,0,3)$ et ces deux vecteurs appartiennent à des orbites différentes sous l'action du groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes S_4$, donc a fortiori du groupe $F^\times/F^{\times 2}$. Il résulte que φ et ψ ne sont pas semblables.

2.6. — Le théorème de nilpotence de Rost.

Comme on l'a vu en (2.3.3), la structure de l'anneau des endomophismes du motif d'une quadrique standard est très simple. Une quadrique quelconque devenant standard après extension du corps de base, il est naturel d'étudier l'homomorphisme d'anneaux $\mathrm{End}\big(M(X)\big) \to \mathrm{End}\big(M(X_{k_s})\big)$.

Théorème 2.6.1(Rost [R1]). — *Soit X/k une quadrique projective. Alors le noyau du morphisme d'anneaux*

$$\mathrm{End}\big(M(X)\big) \to \mathrm{End}\big(M(X_{k_s})\big)$$

est constitué d'éléments nilpotents.

Ce résultat a à voir par nature aux groupes de Chow de la quadrique X, mais de façon plus précise, c'est l'image des restrictions $CH^i(X) \to CH^i(X \times_k k_s)$ qui est contrôlé dans cet énoncé. En pratique, ce résultat est utilisé pour sa conséquence directe suivante.

Corollaire 2.6.2. — *Soient X_1, X_2 des quadriques projectives sur k. On suppose qu'il existe des correspondances*

$$c_{12} \in \mathrm{Hom}\big(M(X_1), M(X_2)\big), \quad c_{21} \in \mathrm{Hom}\big(M(X_2), M(X_1)\big)$$

telles que $c_{12,E}$ et $c_{21,E}$ soient inverses l'une de l'autre. Alors c_{12} et c_{21} sont des isomorphismes.

Démonstration : On considère la correspondance $\epsilon_1 = c_{21} \circ c_{12} - id_{M(X_1)} \in \mathrm{End}\big(M(X_1)\big)$. Alors $\epsilon_{1,E} = 0$, donc ϵ_1 est nilpotent et $c_{21} \circ c_{12}$ est inversible.

Ce corollaire donne une petite idée du principe de démonstration du théorème 2.4.2 de Vishik. Etant donnés deux quadriques de même dimension satisfaisant le critère sur les indices de Witt, il faut trouver des correspondances c_1, c_2 comme dans le corollaire qui deviennent inverses l'une de l'autre après extension au corps $k(X_1)$. Cela est possible, voir notamment [Ka1].

2.7. — Facteurs directs

Une seconde conséquence du théorème de nilpotence concerne les facteurs directs des motifs des quadriques. Pour la quadrique standard $X_{q'_n}$ de dimension $2n-1$, tout facteur direct N de $M(X_{q'_n}) = \bigoplus_{i=0}^{2n-1} \mathbf{1}(i)$ est déterminé par un ensemble $I(N) \subset [0, 2n-1]$ tel que $N = \bigoplus_{i \in I(N)} \mathbf{1}(i)$. Cet ensemble est intrinsèque, i.e. ne dépend pas de la décomposition de $M(X_{q'_n})$ en somme de motifs de Tate. Dans le cas de la quadrique X_{q_n} de dimension $2n-2$ et d'un facteur direct N de

$M(X_{q_n}) = \bigoplus_{i=0}^{2n-2} \mathbf{1}(i) \oplus \mathbf{1}(n-1)$ on définit $I(N) \subset [0, 2n-2]$ comme le sous-ensemble des entiers i tels que $\mathrm{Hom}\big(N, \mathbf{1}(i)\big) \neq 0$. Dans ce cas, le facteur direct N est presque déterminé par $I(N)$.

Maintenant, si N est un facteur direct du motif $M(X)$ d'une quadrique X, l'extension des scalaires de k à k_s définit un ensemble $I(N) \subset [0, \dim(X)]$ puisque X_{k_s} est une quadrique standard.

Proposition 2.7.1. — *Soit X une quadrique non hyperbolique. Soient N, N' des facteurs directs de $M(X)$. Si $I(N) = I(N')$, alors il existe $f \in \mathrm{Aut}(M(X))$ appliquant N sur N'.*

Démonstration : Supposons tout d'abord $\dim(X)$ impaire. On écrit des décompositions

$$M(X) = N \oplus N_1 = N' \oplus N_1'.$$

L'identité de $M(X)$ fournit une matrice $A = \begin{pmatrix} f & b \\ a & f' \end{pmatrix}$, que l'on regarde tensorisée à k_s. Comme les ensembles $I(N)$ et $I(N_1')$ sont disjoints, on a $\mathrm{Hom}(N \otimes_k k_s, N_1' \otimes_k k_s) = 0$ et de même $\mathrm{Hom}(N' \otimes_k k_s, N_1 \otimes_k k_s) = 0$, donc $A \otimes_k k_s = \begin{pmatrix} f \otimes_k k_s & 0 \\ 0 & f' \otimes_k k_s \end{pmatrix}$. L'endomorphisme Φ de $M(X)$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}$ satisfait $(\Phi - id_{M(X)}) \otimes_k k_s = 0$ et le théorème de nilpotence implique que $(\Phi - id_{M(X)})$ est nilpotent, donc que Φ est un automorphisme de $M(X)$ qui applique N sur N'. Pour le cas de dimension paire, voir le lemme 4.1 de [V]. C'est là (et uniquement là) que l'on utilise l'hypothèse de non-hyperbolicité de X.

Ainsi l'ensemble N détermine-t-il le facteur direct considéré, c'est le point de départ des travaux de Vishik [V].

3. — Conséquences de la formule du degré [M2,R2]. Pour simplifier, on suppose que $\mathrm{car}(k) = 0$ et ainsi on peut utiliser la résolution des singularités, bien que cela ne soit pas strictement nécessaire. Soit p un nombre premier ; on suppose que k contient une racine primitive p–ième de l'unité ζ. Pour toute variété projective lisse X de dimension d, on note $I(X)$ l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par les degrés des points fermés de X ; $I(X)$ est un invariant birationnel, i.e peut être défini à partir du corps de fonctions $k(X)$ et ne dépend pas du modèle projectif lisse X choisi. On définit alors l'invariant $\eta_p(X) \in \mathbb{Z}/I(X)$ de la façon suivante. On note $C^pX = (X)^p/G$, le groupe $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de générateur σ agissant sur X^p par $\sigma.(x_1, ..., x_p) = (x_2, ..., x_p, x_1)$. On note alors $\overline{X}$ l'adhérence de l'image de X dans $C^p(X)$ via la diagonale. La projection

$$X^p \setminus X \;\; \to \;\; C^p(X) \setminus \overline{X}$$

est non ramifiée. Le groupe G agit aussi sur $X^p \times_k \mathbb{A}^1$ par $\sigma.(x_1, x_2, ..., x_p, t) = (x_2, ..., x_p, x_1, \zeta t)$. La restriction de $(X^p \times_k \mathbb{A}^1)/G$ à $C^p(X) \setminus \overline{X}$ est un fibré vectoriel L_X sur $C^p(X) \setminus \overline{X}$. L'image de la section nulle $C^p \setminus \overline{X} \to L_X^{\oplus pd}$ définit un élément

$$l_X \in CH_{pd}(L_X^{\oplus pd}).$$

Par invariance homotopique, on a $CH_0(C^pX \setminus \overline{X}) = CH_{pd}(L_X^{\oplus pd})$ et on peut voir ainsi $l_X \in CH_0(C^pX \setminus \overline{X})$. Bien que l'application degré $CH_0(C^pX \setminus \overline{X}) \to \mathbb{Z}$ ne soit pas définie (la variété $C^pX \setminus \overline{X}$ n'est pas complète), on dispose toutefois via la suite exacte

$$CH_0(\overline{X}) \to CH_0(C^pX) \to CH_0(C^pX \setminus \overline{X}) \to 0$$

d'une application

$$deg : CH_0(C^pX \setminus \overline{X}) \to \mathbb{Z}/I(X).$$

On pose alors

$$\eta_p(X) = deg(l_X) \in \mathbb{Z}/I(X).$$

La formule du degré est la suivante.

Théorème 3.1. — *Soient $f : Y \to X$ un morphisme de variétés projectives lisses de dimension d. Alors $I(Y) \subset I(X)$ et*

$$\eta_p(Y) = deg(f).\eta_p(X) \quad \in \quad \mathbb{Z}/I(X).$$

La démonstration donnée dans [M1] s'appuie uniquement sur les groupes de Chow classiques. Il existe deux autres démonstrations de cette formule, l'une de Borghesi passant par la $K-$théorie de Morava [B] et l'autre de Levine-Morel comme application du cobordisme algébrique [LM, II.2.7].

En particulier, ce théorème met en évidence le caractère birationnel de l'invariant $\eta_p(X)$ et on en déduit aussitôt une autre formule du degré, dite rationnelle.

Théorème 3.2. — *Soient $f : Y \to X$ un morphisme rationnel de variétés projectives lisses de dimension d. Alors $I(Y) \subset I(X)$ et*

$$\eta_p(Y) = deg(f).\eta_p(X) \quad \in \quad \mathbb{Z}/I(X).$$

Il n'est alors pas difficile d'établir la variante birationnelle suivante.

Théorème 3.3. — *Soit X une variété projective irréductible et soit Y une variété projective lisse connexe. On suppose que $X(k(Y)) \neq \emptyset$. Alors $I(Y) \subset I(X)$ et si $\eta_p(Y) \neq 0 \in \mathbb{Z}/I(X)$, on a*

1) $\dim(X) \geq \dim(Y)$,

2) Si $\dim(X) = \dim(Y)$, *alors Y a un point fermé sur $k(X)$ de degré premier à p.*

Pour appliquer ce résultat aux quadriques, il convient de connaître la valeur de l'invariant $\eta_2(X)$ pour les quadriques.

Proposition 3.4. — *Soit X une quadrique anisotrope de dimension d. Alors*

$$\eta_2(X) = \begin{cases} 1 + 2\mathbb{Z} & \textit{s'il existe un entier } i \textit{ satisfaisant } d = 2^i - 1, \\ 2\mathbb{Z} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Cette proposition est frappante, car elle montre le caractère exceptionnel de toutes les formes quadratiques de dimension $2^n + 1$ et pas seulement des formes $\phi \perp \langle a \rangle$ où ϕ est une forme de Pfister. On en déduit le

Théorème 3.5. — *Soit Q une quadrique projective de dimension $d \geq 2^n - 1$ et soit X/k une variété projective lisse telle que $I(X) \subset 2\mathbb{Z}$ et $X(k(Q)) \neq \emptyset$. Alors*

(1) $\dim(X) \geq 2^n - 1$,

(2) Si $\dim(X) = 2^n - 1$, *alors $Q(k(X)) \neq \emptyset$.*

Démonstration : On dispose d'un morphisme rationnel $Q \to X$. On peut supposer le corps k infini, et il existe alors une quadrique projective $Q' \subset Q$ telle que le morphisme rationnel $Q \to X$ définisse un morphisme rationnel $Q' \to X$. On est donc ramené au cas $\dim(Q) = 2^n - 1$. Alors $\eta_2(Q) = 1$ et le théorème précédent montre que $\dim(X) \geq 2^n - 1$ et que si $\dim(X) = 2^n - 1$, alors $Q(k(X)) \neq \emptyset$ suivant le théorème 2.1.2 de Springer.

Cela permet de retrouver les résultats suivants de la théorie des formes quadratiques.

Corollaire 3.6 (Hoffmann [Ho1], th. 1). — *Soient ϕ et ψ des formes quadratiques telles que* $\dim(X_\phi) \geq 2^n - 1$ *pour un entier n. Si $\psi_{k(\phi)}$ est isotrope, alors* $\dim(X_\psi) \geq 2^n - 1$.

Corollaire 3.7 (Izhboldin [I2], Cor. 2.13). — *Soit n un entier positif. Soient ϕ une forme quadratique de dimension $\geq 2^n+1$ et ψ une forme quadratique de dimension 2^n+1 telle que la forme $\psi_{k(\phi)}$ est isotrope. Alors $\phi_{k(\psi)}$ est isotrope.*

Remarque : En particulier, si $\dim(\phi) = \dim(\psi) = 2^n + 1$, alors $\psi_{k(\phi)}$ est isotrope si et seulement si $\phi_{k(\psi)}$ est isotrope.

4. — Catégorie des motifs de quadriques.

Nous revenons maintenant sur la nilpotence, mais cette fois-ci modulo 2.

On note $\mathcal{M}Q$ la sous–catégorie de $\mathcal{M}_{\sim,k}$ dont les objets sont des $(X, \Delta_X, 0)$ avec X quadrique projective lisse. On fixe une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Pour toute variété projective lisse X/k, on note $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. On définit alors la catégorie $\mathcal{M}\overline{Q} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{M}Q \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais dont les morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}\overline{Q}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\big(M(X), M(Y)\big) =$$

$$\mathrm{Im}\Big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\sim,k}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\big(M(X), M(Y)\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\sim,\overline{k}}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\big(M(\overline{X}), M(\overline{Y})\big)\Big).$$

Le théorème de nilpotence de Rost (qui vaut aussi à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) indique que le foncteur $\mathcal{M}Q \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathcal{M}\overline{Q} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ induit une bijection sur les classes d'isomorphismes d'objets.

En d'autres mots, toute l'information sur les motifs des quadriques se trouve dans les groupes

$$\overline{Ch}^*(X \times_k Y) = \mathrm{Im}\Big(CH^*(X \times_k Y) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to CH^*(\overline{X} \times_{\overline{k}} \overline{Y}) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\Big).$$

5. — Le u–invariant.

Le u–invariant $u(k)$ d'un corps k est la dimension maximale des k–formes quadratiques anisotropes. Par exemple, $u(\mathbf{R}) = \infty$, mais $u(\mathbf{Q}_p) = 4$. Cela signifie qu'il existe une forme quadratique anisotrope de rang 4 sur $\mathbf{Q}_p$ et que toutes les formes quadratiques de rang 5 (et plus) sont isotropes. Les corps de séries formelles itérées donnent des exemples de corps d'u-invariant 2^n pour tout n. Kaplansky avait conjecturé que $u(k)$ est toujours une puissance de 2. Il n'en est rien, Merkurjev a construit pour tout entier $n \geq 1$ un corps d'invariant $2n$ [M]. Pour construire un corps d'u–invariant n, la stratégie consiste à établir une propriété $\mathcal{P}$ des formes quadratiques de dimension n satisfaisant les conditions suivantes :

(1) Il existe une k–forme quadratique φ satisfaisant $\mathcal{P}$;

(2) pour tout corps F/k, les F–formes quadratiques satisfaisant $\mathcal{P}$ sont anisotropes ;

(3) pour tout corps F/k, si une F-forme ϕ satisfait $\mathcal{P}$ alors $\phi_{F(\psi)}$ satisfait $\mathcal{P}$ pour toute F–forme anisotrope ψ de dimension $n+1$.

(4) $\mathcal{P}$ est stable par limite inductive de corps.

On définit alors la tour de corps

$$k = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset F_i \subset F_{i+1} \cdots$$

de la façon suivante. Le corps F_{i+1} est le compositum des corps $F_i(\psi)$ pour ψ parcourant les F_i–formes quadratiques anisotropes de rang $n+1$. On définit alors le corps $F = \bigcup_i F_i$. Par construction, la forme φ_F satisfait $\mathcal{P}$, elle est donc anisotrope de rang n tandis que toutes les F–formes quadratiques de rang $n+1$ sont isotropes. Une fois inuité une propriété $\mathcal{P}$ covenable, la difficulté est de montrer la troisième condition. Dans le cas d'un nombre pair $2n$, la propriété utilisée par Merkurjev est la suivante : une k–forme quadratique q de rang $2n$ satisfait $\mathcal{P}$ si son discriminant signé est trivial et son algèbre de Clifford $C(q)$ est d'indice maximal.

Pour les valeurs impaires, il est connu que $3, 5$ et 7 ne peuvent être des valeurs d'u–invariants. Le résultat suivant est un tour de force obtenu grace à l'intuition motivique.

Théorème 5.1 (Izhboldin, [I3]). — *Il existe un corps d'u–invariant* 9.

La propriété $\mathcal{P}$ des formes quadratiques de rang 9 qui est utilisée est l'indécomposabilité du motif de Chow. De façon plus précise, une forme quadratique de rang 9 satisfait $\mathcal{P}$ si le motif de Chow $M(X_q)$ de la quadrique projective associée est indécomposable. Il revient au même de dire que le groupe $\overline{Ch}^{\dim(X_q)}(X_q \times_k X_q)$ est engendré par la classe de la diagonale.

Le motif d'une quadrique générale étant indécomposable, la première condition est aisée à réaliser. La décomposition de Rost indique que le motif d'une quadrique isotrope est décomposable, la condition (2) est vérifiée. Enfin la condition (4) étant claire, c'est la condition (3) qui contient la subtilité de l'argument propre à la dimension 9.

6. — Premier indice de Witt d'une forme quadratique.

Etant donné une forme quadratique anisotrope ϕ, Hoffmann a conjecturé que le premier indice de Witt $i_1(\phi) = \nu(\phi_{k(\phi)})$ ne peut prendre que des valeurs remarquables.

Théorème 6.1 (Karpenko [Ka2]). — *On écrit*

$$\dim(\phi) - 1 = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_s}$$

en base 2 *avec* $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_s$. *Alors* $i_1(\phi) - 1$ *est une somme partielle de la somme ci-dessus, c'est-à-dire*

$$\dim(\phi) - 1 = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$$

avec $0 \leq r < s$ *(la somme est nulle pour* $r = 0$*).*

De plus, toutes les valeurs ci-dessus peuvent être atteintes pour des formes quadratiques sur des corps convenables. Par exemple, $6 - 1 = 2^0 + 2^2$, donc les valeurs possibles de i_1 pour les formes quadratiques de dimension 6 sont 1 et 2, ce que nous avons vu au paragraphe 2.b. Ce résultat montre une fois de plus le caractère exceptionnel des formes de dimension $1 + 2^n$. En effet, une telle forme (anisotrope) ϕ satisfait $i_1(\phi) = 1$. Ce fait est aussi une conséquence du théorème d'Hoffmann 3.6. En effet, si $\dim(\phi) = 1 + 2^n$, on peut supposer que $\phi = \langle 1 \rangle \perp \phi'$. Vu que $\dim(\phi') = 2^n$, on sait alors que $\phi'_{k(\phi)}$ est anisotrope, d'où $i_1(\phi) \leq 1$ suivant le théorème de simplification de Witt.

La démonstration du théorème 6.1 est fondée sur les opérations de Steenrod sur les groupes de Chow modulo 2 $Ch^*(X)$ et $\overline{Ch}^*(X)$. Celles-ci ont été définies par Voevodsky comme cas particulier des opérations de Steenrod pour la cohomologie motivique [Vo1]. En pratique, on utilise la construction élémentaire de Brosnan fondée sur les groupes de Chow modulo 2 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-équivariants [Bn]. On dispose alors des opérations

$$Sq^i : Ch^n(X) \to Ch^{n+i}(X), \quad Sq^i : \overline{Ch}^n(X) \to \overline{Ch}^{n+i}(X)$$

pour tout $i \geq 0$. Les opérations de Steenrod donnent alors de nouvelles relations sur l'anneau de Chow $\overline{Ch}^*(X)$. Grosso modo, les opérations de Steenrod produisent de nouveaux cycles sur X sur $X \times X$ qui contiennent l'information sur $i_1(q)$.

Bibliographie

[A] Y. André. — *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses **17** (2004), Société Mathématique de France.

[B] S. Borghesi. — *Algebraic Morava K-theories*, Invent. Math. **151** (2003), no. 2, 381–413.

[Bn] P. Brosnan. — *Steenrod operations in Chow theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003),1869–1903 .

[D] M. Demazure. — *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39** (1977), no. 2, 179–186.

[Ho1] D. W. Hoffmann. — *Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric*, Math. Z. **220** (1995), 461–476.

[Ho2] D. W. Hoffmann. — *Similarity of Quadratic Forms and Half-Neighbours*, J. of Algebra **204** (1998), 255-280.

[HR] J. Hurrelbrink and U. Rehmann. — *Spliiting patterns and linear combinations of two Pfister forms*, J. reine angew. Math. **495** (1998), 163–174.

[I1] O. T. Izhboldin. — *Motivic equivalence of quadratic forms*, Doc. Math. **3** (1998), 341–351.

[I2] O. T. Izhboldin. — *Motivic equivalence of quadratic forms II*, Man. Math. **102** (2000), 41–52.

[I3] O. T. Izhboldin. — *Fields of u-invariant* 9, Ann. of Math. **154** (2001), 529–587.

[K1] B. Kahn. — *Formes quadratiques et cycles algébriques [d'après Rost, Voevodsky, Vishik, Karpenko...]*, Exposé Bourbaki, novembre 2004, http ://www.math.jussieu.fr/ kahn/preprints/prep.html .

[K2] B. Kahn. — *Algebraic K-theory, Algebraic cycles and Arithmetic Geometry*, Handbook of K-theory, Vol. 1 (2005), edited by Eric M. Friedlander and Daniel R. Grayson, Springer-Verlag. .

[Ka1] N. Karpenko. — *Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras*, Math. Ann. **317**, (2000), 585–611.

[Ka2] N. Karpenko. — *On the first Witt index of quadratic forms*, Invent. Math. **153** (2003), 455–462.

[LM] M. Levine et F. Morel. — *Cobordisme algébrique I et II*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **332** (2001), 723–728 et 815–820.

[M1] A.S. Merkurjev. — *Algèbres simples et formes quadratiques*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55** (1991), traduction anglaise Math. USSR-Izv. **38** (1992), 215–221.

[M2] A.S. Merkurjev. — *Rost degree formula*, preprint, http ://www.math.ucla.edu/ merkurev/publicat .

[R1] M. Rost. — *The motive of a Pfister form*, http ://www.mathematik.uni-bielefeld.de/ rost/.

[R2] M. Rost. — *Notes on the Degree Formula*, http ://www.mathematik.uni-bielefeld.de/ rost/.

[Sc] W. Scharlau. — *Quadratic and Hermitian Forms*, Grundlehren der mathematischen in Wissenschaften **270** (1985), Springer–Verlag.

[Se] J.–P. Serre. — *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Math. 5, 5$^{\text{ième}}$ édition (1994), Springer–Verlag.

[Su] R. Sujatha. — *Motives II*,
http ://www.ihes.fr/IHES/Scientifique/asie/textes/sujatha.ihes1.pdf.

[V] A. Vishik. — *Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms*, Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms, 25–101, Lecture Notes in Math. **1835** (2004).

[Vo1] V. Voevodsky. — *Reduced power operations in motivic cohomology*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **98** (2003), 1–57.

[Vo2] V. Voevodsky. — *Motivic cohomology with $Z/2$-coefficients*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **98** (2003), 59–104.

Philippe GILLE
UMR 8523 du CNRS
DMA, Ecole Normale Supérieure
F–75005 Paris
Courrier électronique : gille@ens.fr

Nikita KARPENKO
Université Paris 6
Institut de Mathématiques de Jussieu
175 rue du Chevalleret
F–75013 PARIS
Courrier électronique : karpenko@math.jussieu.fr