K-Theory **21:** 57–100, 2000.

Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive

Rost's Cohomological Invariants in Positive Characteristic

PHILIPPE GILLE
Département de Mathématiques, UMR 8628 du CNRS, Bât. 425, Université de Paris–Sud, F–91405 Orsay Cedex, France

(Received: December 1999)

Abstract. Let G/F be a semisimple algebraic group defined over a field F with characteristic $p \geqslant 0$. Let us denote by $H^3(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$ the Galois cohomology group introduced by Kato. If $p > 0$, we show that the p-primary part of Rost's invariant $H^1(F, G) \to H^3(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$ lifts in characteristic 0. This result allows to deduce properties of the Rost invariant in positive characteristic from known properties in characteristic 0. The case of Merkurjev–Suslin's invariant is specially interesting, i.e. if $G/F = SL(D)$ for a central simple algebra D/F with degree p and class $[D] \in_p Br(F) \approx H^2(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(1))$, one has $H^1(F, SL(D)) = F^\times/Nrd(D^\times)$ and an element $a \in F^\times$ is a reduced norm if and only if the 'cup-product' $[D] \cup (a)$ is trivial in $H^3(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(2))$; one characterizes also in positive characteristic fields with p-dimension $\leqslant 2$ by the surjectivity of reduced norms.

In a second part, we study Rost invariants when the base field is complete for a discrete valuation. As planned by Serre, invariants are then linked with Bruhat–Tits' theory, this yields a new proof of their nontriviality.

Mathematics Subject Classifications (2000): 11E72, 20G10.

Key words: Galois cohomology, semisimple groups, central extensions, Bruhat–Tits theory.

Résumé. Soit G/F un groupe algébrique semi-simple simplement connexe absolument presque F-simple défini sur un corps F de caractéristique $p \geqslant 0$. On note $H^3(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$ le groupe de cohomologie galoisienne introduit par Kato. Si $p > 0$, nous montrons que la partie p-primaire de l'invariant de Rost $H^1(F, G) \to H^3(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$ se relève en caractéristique 0. Ceci permet de déduire des propriétés de l'invariant de Rost en caractéristique positive à partir de résultats connus en caractéristique nulle. En particulier pour l'invariant de Merkurjev-Suslin, i.e. si $G = SL(D)/F$ pour une algèbre simple centrale D/F de degré p et de classe $[D] \in_p Br(F) \approx H^2(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(1))$, on a $H^1(F, SL(D)) = F^\times/Nrd(D^\times)$ et un élément $a \in F^\times$ est une norme réduite si et seulement si le 'cup-produit' $[D] \cup (a)$ est nul dans $H^3(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(2))$; en particulier on peut caractériser aussi en caractéristique positive les corps F de p-dimension $\leqslant 2$ par la surjectivité des normes réduites.

Dans une seconde partie, nous étudions les invariants de Rost lorsque le corps de base est complet pour une valuation discrète. Comme l'avait prévu Serre, ces invariants sont alors intimement liés à la théorie de Bruhat–Tits, ce qui permet de donner une nouvelle démonstration de leur non-trivialité.

Mots clefs. Cohomologie galoisienne, groupes semi-simples, extensions centrales, théorie de Bruhat–Tits.

Soit F un corps, et soit G/F un groupe algébrique semi-simple simplement connexe absolument presque F-simple. On note $H^1(F,G)$ l'ensemble pointé de cohomologie galoisienne de G/F et on rappelle que cet ensemble classifie les espaces principaux homogènes sous G (ou torseurs) sur $\mathrm{Spec}(F)$ à isomorphisme (non unique) près. Pour tout nombre premier l inversible dans F, Rost a défini un invariant

$$r_{l,F} : H^1(F,G) \to H^3(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)),$$

où $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$ désigne le faisceau galoisien $\varinjlim \mu_{l^r}^{\otimes 2}$ [Ro1,Ro2,Se3]. Cet invariant était attendu par Serre [Se2]. On suppose $\mathrm{car}(F) = p > 0$; la théorie cohomologique dite de De Rham-Witt (et ses aspects galoisiens développés par Kato et Bloch-Kato) produit un analogue en caractéristique positive du faisceau galoisien $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$, noté $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)$, qui est un complexe de faisceaux galoisiens concentré en degré 2, dont on peut considérer l'hypercohomologie. Dans son exposé au séminaire Bourbaki [Se3], Serre suggère l'emploi de l'objet $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)$ pour définir la partie p-primaire de l'invariant, et réalise un tel invariant en caractéristique 2 pour le groupe déployé de type G_2; le cas de F_4 en caractéristique 3 a été ensuite traité par Petersson–Racine [PR]. La construction générale de l'invariant

$$r_{p,F} : H^1(F,G) \to H^3(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))$$

est due à Esnault, Kahn, Levine et Viehweg [EKLV]. Notant $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) = \oplus_{l \neq p} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2) \bigoplus \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)$, cette construction donne donc lieu à un invariant, l'invariant de Rost de G/F noté $r_F\colon\ H^1(F,G) \to H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Soit $(O, \mathfrak{G})$ un couple formé d'un anneau O complet pour une valuation discrète de rang 1, de corps des fractions K et de corps résiduel F, et d'un O-schéma en groupes $\mathfrak{G}$ semi-simple simplement connexe de fibre spéciale G_F. Le lemme de Hensel fournit un isomorphisme $H^1_{ét}(O,\mathfrak{G}) \xrightarrow{\sim} H^1(F,G)$ permettant ainsi de relever $H^1(F,G)$ dans $H^1(K,\mathfrak{G}_K)$, puisque d'après Bruhat–Tits [BrT3], l'application $\ell : H^1_{ét}(O,\mathfrak{G}) \to H^1(K,\mathfrak{G}_K)$ est une injection. Par ailleurs, suivant Kato [Ka1], le groupe $H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ se relève dans $H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par un morphisme injectif $i_F^K : H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Il est alors naturel de s'intéresser à la commutativité éventuelle du diagramme

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} H^1(K,\mathfrak{G}_K) & \xrightarrow{r_K} & H^3(K,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\ \ell \uparrow & & \\ H^1(O,\mathfrak{G}) & & \uparrow i_F^K \\ \wr \downarrow & & \\ H^1(F,G) & \xrightarrow{r_F} & H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)). \end{array}$$

Dans cet article, nous montrons que le diagramme ci-dessus commute, modulo un automorphisme de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (§ III.2, th. 2). L'intérêt d'un tel diagramme est de pouvoir déduire des résultats en caractéristique positive de résultats connus en caractéristique nulle, comme l'a fait par exemple Kato pour l'étude des formes quadratiques en caractéristique 2 [Ka2]. En effet, si l'invariant $r_K : H^1(K, \mathfrak{G}_K) \to H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ a un noyau trivial (resp. est injectif) pour le groupe $\mathfrak{G}_K$, alors l'invariant $r_F : H^1(F, G) \to H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ a un noyau trivial (resp. est injectif). Il est à noter que le cas du groupe déployé de type G_2, pour lequel on a une construction explicite de l'invariant [Se3], est le point de départ de ce travail.

Pour la démonstration, notons tout de suite que dans le cas d'égale caractéristique, le diagramme ci-dessus commute trivialement pour le couple $(F[[t]], G \times_F F[[t]])$ et qu'il est aisé de passer à la situation générale d'un couple $(F[[t]], \mathfrak{G})$. L'article porte donc principalement sur le cas d'inégale caractéristique, pour lequel nous travaillons avec la construction de r_F donnée dans [EKLV] utilisant le complexe $\Gamma(2)_X$ de Lichtenbaum défini sur le grand site étale de X pour tout schéma X.

Permettons–nous un rêve en supposant que la conjecture de Gersten en K-théorie [Q] vaut pour tout schéma lisse de type fini sur $\mathrm{Spec}(O)$. Usant de la suite spectrale de Hochschild-Serre pour le faisceau $\Gamma(2)$ (cf. § 1.2) pour l'extension non ramifiée maximale de O, il n'est pas difficile de voir par identification des termes que l'on a $\mathbb{H}^4_{ét}(O, \Gamma(2)) \approx \mathbb{H}^4_{ét}(F, \Gamma(2)) = H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Exactement de même que sur $\mathrm{Spec}(F)$, on peut selon [EKLV] définir un invariant

$$r_O\colon\ H^1_{ét}(O, \mathfrak{G}) \to \mathbb{H}^4_{ét}(O, \Gamma(2))$$

complétant le diagramme $(*)$ ci-dessus, et le problème est résolu. Malheureusement, la conjecture de Gersten n'est connue pour les schémas lisses de type fini sur $\mathrm{Spec}(O)$ qu'en poids 0, 1 et 2 [Bl] et l'objet de l'article est de démontrer malgré tout la commutativité du diagramme $(*)$.

Dans la section IV, guidé par l'intuition de Serre [Se2], on s'intéresse au résidu de l'invariant de Rost, i.e. au composé $H^1(\widetilde{K}/K, \mathfrak{G}_K) \to \mathrm{Ker}\big(H^3(K) \to H^3(\widetilde{K})\big) \overset{\partial_K}{\to} Br(F)$, où $\widetilde{K}$ désigne une clôture non ramifiée de K et ∂_K est la flèche de résidu figurant dans [Ka1]. Sous certaines hypothèses (par exemple si G/F est déployé), on montre que ce composé s'explicite avec la décomposition de Bruhat–Tits de $H^1(\widetilde{K}/K, \mathfrak{G}_K)$ en terme de cohomologie galoisienne des fibres spéciales des sous-groupes parahoriques de $\mathfrak{G}_K$ [BrT3].

La Section V applique cas par cas le théorème principal. On obtient notamment au § V.1 une généralisation en caractéristique positive du théorème de Merkurjev–Suslin [Su1] caractérisant les corps de dimension cohomologique $\leqslant 2$ par la surjectivité de la norme réduite des algèbres simples centrales.

0. Notations

(a) *Cohomologie* (cf. [M,SGA3]). Soit X un schéma quasi-compact. On considère sur X les sites X_{Zar}, $X_{ét}$, X_{fppf}. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes Abéliens sur X sur un site $\mathcal{S}$, on note $H^i_{\mathcal{S}}(X, \mathcal{F})$ le i-ième groupe de cohomologie de $\mathcal{F}$. Si $X = Spec(A)$, on note parfois $H^i_{\mathcal{S}}(A, \mathcal{F})$ au lieu de $H^i_{\mathcal{S}}(X, \mathcal{F})$. Enfin, la cohomologie étale étant la plus utilisée, on note $H^i(X,\mathcal{F}) = H^i_{ét}(X,\mathcal{F})$. Soit G un X-schéma en groupes, plat de type fini. On prend les mêmes notations pour la cohomologie non abélienne que pour la cohomologie abélienne (définie par le procédé de Čech). Rappelons que si G/X est lisse, l'application naturelle $H^1(X,G) \to H^1_{fppf}(X,G)$ est bijective (cf. [SGA3], Exp. XXIV). Enfin, on note $Br(X) = H^2_{ét}(X,\mathbb{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de X.

(b) On fixe un corps F, $\widetilde{F}$ une clôture séparable de groupe de Galois $\mathcal{G}$. On désigne par

- $\mathrm{car}(F) \geqslant 0$ la caractéristique du corps F,
- $\epsilon_{l,F} = (-1)^{(1+\delta_{l,\mathrm{car}(F)})}$ pour tout nombre premier l,
- $H^i(F,M)$, le i-ième groupe de cohomologie galoisienne pour un faisceau galoisien M sur $\mathrm{Spec}(F)$ [Se1],
- $\mu_{n,F}$ le faisceau galoisien des racines n-ièmes de l'unité $((n,\mathrm{car}(F)) = 1)$,
- $\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(i)_F = \mu_{l^n,F}^{\otimes i}$ (l premier, $l \neq \mathrm{car}(F)$, $i \geqslant 0$),
- $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(i)_F = \varinjlim \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(i)_F$ (l premier, $l \neq \mathrm{car}(F)$, $i \geqslant 0$),
- $K_i(X)$ le i-ième groupe de K-théorie de Quillen [Q] pour un schéma X et $\mathcal{K}_r$ le faisceau sur X_{Zar} associé au préfaisceau $U \to K_r(O_X(U))$,
- $K_i^M(R)$ le i-ième groupe de K-théorie de Milnor d'un anneau R [BT], et $\{a_1,a_2,\cdots a_i\}$ les symboles,
- $h^i_{l^n,F} : K_i^M(F)/l^n \to H^i(F,\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}(i))$ le symbole de Tate (symbole galoisien) [T] pour tout nombre premier l inversible dans F,
- ${}_nA$ et A/n le noyau et le conoyau de la multiplication $A \overset{\times n}{\to} A$ par un entier n pour un groupe Abélien A,
- $A\{l\}$ la composante l-primaire d'un groupe Abélien A.

(c) Nous utiliserons la théorie des 'modules de cycles' de Rost [Ro3] dans le cas où la base est le corps F ou un anneau de valuation discrète de rang 1 A, de corps des fractions K et de corps résiduel F. Un module de cycles $E \to M_*(E) = (M_j(E))_{j\geqslant 0}$ est la donnée pour tout corps E/F (resp. pour tous corps L/K et E/F) d'un groupe Abélien gradué $M_*(E)$ (resp. $M_*(K)$ et $M_*(E)$) satisfaisant certains axiomes. Si X/F est une variété ou $X/\mathrm{Spec}(A)$ un schéma de type fini, la donnée inclut un complexe de Gersten $C_*(X,M_j)$

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x\in X_{(i+1)}} M_{i+j+1}(\kappa(x)) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \bigoplus_{x\in X_{(i)}} M_{i+j}(\kappa(x)) \xrightarrow{\partial_i} \bigoplus_{x\in X_{(i-1)}} M_{i+j-1}(\kappa(x)) \longrightarrow \cdots,$$

où $X_{(i)}$ désigne les points de X de dimension i et $\kappa(x)$ le corps résiduel d'un point x de X. On note $A_i(X,\mathcal{M}_j) = \mathrm{Ker}(\partial_i)/\mathrm{Im}(\partial_{i-1})$ l'homologie au cran i de $C_*(X,M_j)$. Nous utiliserons principalement dans cet article les modules de cycles $E \to K_*(E)$ et pour $(n,\mathrm{car}(F)) = 1$ le module $E \to H^i(E,\mu_n^{\otimes r-i})$.

(d) *Groupes réductifs* (cf. [BoT]). Par convention, on impose à un groupe réductif G/F d'être connexe. On note G_{tor}/F le tore coradical de G, i.e; le plus grand quotient torique de G. Enfin, si H/F est un groupe algébrique linéaire connexe, on rappelle qu'il existe un plus grand quotient réductif de H, noté $H_{réd}$.

1. Cohomologie galoisienne en caractéristique positive

1.1. LES GROUPES $H^{q+1}_{p^n}(F)$ DE KATO [KA1,BK,CT2]

(a) Soient p un nombre premier, $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 0$. Pour tout schéma X de caractéristique p, on note $W_n\Omega^q_X$ le faisceau de de Rham-Witt sur $X_{ét}$ de degré n et de poids q [I,§ 1.1] et on note $W_n\Omega^q_{X,log}$ le sous–faisceau de $W_n\Omega^q_X$ engendré localement pour la topologie étale par les différentielles logarithmiques $\mathrm{d}log(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}log(x_q)$. On note $\nu_n(q)/X = W_n\Omega^q_{X,log}$ et $\nu(q)/X = W_1\Omega^q_{X,log}$. Nous considérons le cas $X = \mathrm{Spec}(F)$ où F un corps de caractéristique p. Alors $\nu_n(q)/F$ est un faisceau galoisien. On pose

$$H^{q+1}_{p^n}(F) := H^1(F, \nu_n(q)).$$

Les calculs avec ces groupes se font essentiellement dans le cas $n = 1$; le groupe de cohomologie $H^{q+1}_p(F) := H^1(F, \nu(q))$ a une description agréable en termes de générateurs et relations. Soit Ω_F le F-espace vectoriel des 1-formes de la $\mathbb{Z}$-algèbre F. On pose $\Omega^q_F = \bigwedge^q \Omega_F$ et la différentiation extérieure d applique Ω^q_F dans Ω^{q-1}_F. Il existe une application additive p-linéaire $\gamma : \Omega^q_F \to \Omega^q_F/\mathrm{d}\Omega^{q-1}_F$ et une seule, telle que $\gamma(x\omega) = x^p w$ pour toute forme différentielle logarithmique $\omega = \mathrm{d}y_1/y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_q/y_q$. Comme les faisceaux de formes différentielles sont cohérents et puisque $\nu(q)(F) = \mathrm{Ker}(\gamma)$ d'après la Proposition 1 de [Ka1], on a

$$Coker\big(\gamma - 1 : \Omega^q_F \to \Omega^q_F/\mathrm{d}\Omega^{q-1}_F\big) = H^1(F, \nu(q)) = H^{q+1}_p(F).$$

On note alors $[\ ] : \Omega^q_F \to \Omega^q_F/\mathrm{d}\Omega^{q-1}_F \to H^{q+1}_p(F)$ la surjection naturelle. En particulier, si $q = 0$, on a une application $F \to H^1_p(F) = H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, qui est donnée par la suite exacte d'Artin–Schreier. On note $H^{i+1}_{\mathrm{dec}}(F)$ l'*ensemble* des éléments décomposables de $H^{i+1}_p(F)$, i.e s'écrivant $[x\mathrm{d}y_1/y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_i/y_i]$ avec $x \in F$ et $y_1, \dots, y_i \in F^\times$. A tout symbole $\{x_1, \dots, x_q\}$, on associe la forme différentielle logarithmique $\psi(\{x_1, \dots x_q\}) = \mathrm{d}x_1/x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_q/x_q$ avec $x_1, \dots, x_q \in F^\times$; on sait que ψ produit le symbole différentiel

$$h_{1,q} : K^M_q(F)/pK^M_q(F) \longrightarrow \nu(q)(F).$$

Le théorème de Bloch-Gabber–Kato ([BK], Cor. 2.8) dit que $h_{1,q}$ est un isomorphisme.

(b) *Petits degrés.* Si $q = 0$, on a $H^1_p(F) = H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Si $q = 2$, on a un isomorphisme $H^2_p(F) \approx_p Br(F) =_p H^2(F, \mathbb{G}_m)$, qui est donné en associant à toute forme $a.db/b$ l'algèbre simple centrale $[a, b)/F$ définie par les relations suivantes $X^p - X = a, Y^p = b, YXY^{-1} = X + 1$. On peut maintenant définir $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(q) = W_n\Omega^q_{F,log}[-q]$, qui est un complexe de faisceaux galoisiens concentré en degré q. Soit $m = p^n r$ avec $(p, r) = 1$, on définit le complexe de faisceaux galoisiens $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(q) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}(q)$ et le symbole $h^q_{m,F}$: $K^M_q(F)/m \to W_n\Omega^q_{F,log} \times H^q\big(F, \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}(q)\big)$ comme le morphisme évident déduit du symbole logarithmique $h_{n,p}$ et du symbole galoisien $h_{q,r}$. On pose

- $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(q) = \varinjlim \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}(q)$,
- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(q) = \oplus_l \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(q)$,
- $H^3(F) = H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$,
- $H^3_m(F) = H^3(F, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(2)) \quad (m \geqslant 2)$.

D'après Merkurjev-Suslin [MS1], si $(m, p) = 1$, la flèche naturelle $H^3_m(F) \to H^3(F)$ est injective. Cela est vrai en général d'après Kato. En effet, soit K un corps de caractéristique nulle complet pour une valuation discrète de rang 1 de corps résiduel F. Comme le morphisme $i^K_F : H^q_m(F) \to H^q_m(K)$ est injectif ([Ka1], th. 3), le morphisme $H^3_m(F) \to H^3(F)$ est aussi injectif pour tout entier $m \geqslant 2$.

(c) *l-dimension séparable d'un corps.* Kato a défini la l-dimension $\dim_l(F)$ d'un corps F relative à un nombre premier l de la façon suivante.

(1) Si $\mathrm{car}(F) \neq l$, on pose $\dim_l(F) = cd_l(F)$ (cf. [Se1]).
(2) On suppose $\mathrm{car}(F) = p$. Si $[F : F^p] = \infty$, on pose $\dim_p(F) = \infty$. Si $[F : F^p] = p^r$, on pose
   - $\dim_p(F) = r$ si $H^{r+1}_p(F') = 0$ pour toute extension finie F'/F,
   - $\dim_p(F) = r + 1$ sinon.

En utilisant des p-bases (cf. [Ka1], Lemme 1), il n'est pas difficile de voir que si $\mathrm{car}(F) = p$ et si $[F : F^p] = r$, alors $H^{r+2}_p(F') = 0$ pour toute extension finie F'/F. Ainsi, si $\mathrm{car}(F) = p$ et $\dim_p(F) \leqslant r$, on a $H^{r+1}_p(F')=0$ pour toute extension finie F'/F. Nous introduisons maintenant une nouvelle dimension, la l-dimension *séparable* $\dim^{\mathrm{sep}}_l(F)$ définie par

(1) Si $\mathrm{car}(F) \neq l$, $\dim^{\mathrm{sep}}_l(F) = cd_l(F)$.
(2) Si $p = \mathrm{car}(F)$, $\dim^{\mathrm{sep}}_p(F) = \mathrm{Inf}\{r \geqslant 0 \mid H^{r+1}_p(F') = 0 \ \forall F'/F$ séparable finie$\}$.

Alors on a $\dim^{\mathrm{sep}}_l(F) \leqslant \dim_l(F)$ pour tout entier l, avec égalité si $l \neq \mathrm{car}(F)$. Par dévissage, on obtient aisément le lemme suivant.

LEMME 1. *Supposons* $\mathrm{car}(F) = p > 0$ *et* $\dim^{\mathrm{sep}}_p(F) \leqslant r < \infty$. *Alors on a* $H^{r+1}_{p^n}(F') = 0$ *pour tout entier* $n > 0$ *et pour toute extension séparable finie* F'/F.

1.2. UNE SUITE EXACTE DE KAHN

Pour tout schéma X, Lichtenbaum a défini sur le grand site étale de X le complexe de faisceaux $\Gamma(2)_X$ [L1,L2]. Une propriété fondamentale de $\Gamma(2)_X$ est l'existence des triangles exacts suivants:

$$\begin{array}{l} \begin{tikzcd} \Gamma(2)_X \arrow[rr, "\times n"] & & \Gamma(2)_X \arrow[dl] \\ & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)_X \arrow[ul] & \end{tikzcd} \quad (n \text{ inversible dans } X), \\ \begin{tikzcd} \Gamma(2)_X \arrow[rr, "\times p"] & & \Gamma(2)_X \arrow[dl] \\ & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(2)_X \arrow[ul] & \end{tikzcd} \quad (\text{si } X \text{ est de caractéristique } p). \end{array} \tag{1.2.1}$$

On note $\mathbb{H}^*(X, \Gamma(2)) = \mathbb{H}^*_{ét}(X, \Gamma(2))$ l'hypercohomologie du complexe de faisceaux $\Gamma(2)$.

(a) Soit E/F une extension galoisienne de corps de groupe $\mathfrak{g}$. Kahn [K1] a mis en évidence un morphisme $\mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(E)\big) \xrightarrow{a_F^E} H^2(\mathfrak{g}, K_2(E))$, qui va jouer un rôle central dans cet article. Ce morphisme est issu de la suite spectrale de Hochshild-Serre $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}, \mathbb{H}^q_{ét}(E, \Gamma(2))) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}_{ét}(F, \Gamma(2))$ dont l'étude (plus des identifications) conduit à une suite exacte (ibid, th. 2.1)

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\mathfrak{g}, K_2(E)) \to H^3(\mathfrak{g}, K_{3,ind}(E)) \to \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(E)\big) \\ \xrightarrow{a_F^E} H^2(\mathfrak{g}, K_2(E)) \to H^4(\mathfrak{g}, K_{3,ind}(E)). \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Remarque 1. Si $\mathrm{car}(F) = p > 0$, on sait d'après Merkurjev–Suslin [MS2] que le groupe $K_{3,ind}(E)$ est uniquement p-divisible. Dans ce cas, la suite exacte ci-dessus induit un isomorphisme

$$a_F^E : \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(E)\big)\{p\} \xrightarrow{\sim} H^2(\mathfrak{g}, K_2(E))\{p\}. \tag{1.2.3}$$

Cette remarque aura une conséquence importante pour la suite. En effet, pour la partie p-primaire des invariants de Rost, on pourra considérer le composé $H^1(F, G) \to H^3(F, (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(2)) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}))\{p\}$.

La situation est tout à fait différente pour la partie l-primaire ($l \neq p$). Supposons que $E = \widetilde{F}$, une clôture séparable de F. On sait que le groupe $K_2(\widetilde{F})$ est uniquement l-divisible ([BT], cor. 1.3) et ainsi le morphisme $a_F^{\widetilde{F}}$ est trivial sur la partie l-primaire $H^3(F)\{l\}$; le morphisme $a_F^{\widetilde{F}}$ n'est donc intéressant que sur sa partie p-primaire.

(b) *Calculs de cup-produits.* Nous nous proposons de calculer explicitement la valeur de a_F^E sur les classes décomposables de $H^3(F)$, dans le cas d'une extension cyclique E/F.

LEMME 2. *On suppose que E/F est une extension cyclique de degré l premier correspondant à un caractère $\chi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$. On note $\delta\chi \in H^2(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ le Bockstein de ce caractère pour la suite exacte courte de faisceaux galoisiens $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \to 0$. Alors, pour tout symbole $\{x, y\} \in K_2(F)$, on a dans $H^2(\mathfrak{g}, K_2(E))$*

$$a_F^E\Big(\chi \cup h_{l,F}(\{x, y\})\Big) = \epsilon_{l,F}.\Big(\delta\chi \cup \mathrm{Res}_F^E(\{x, y\})\Big),$$

où $\epsilon_{l,F} = \pm 1$ est défini au § 0.b.

Démonstration. Comme indiqué ci-dessus, la flèche a_F^E provient de la suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{g}, \mathbb{H}^q_{ét}(E, \Gamma(2))) \Longrightarrow \mathbb{H}^{p+q}_{ét}(F, \Gamma(2))$. Vu que $E_2^{p,3} = 0$ pour tout $p \geqslant 0$, la flèche a_F^E est le morphisme $\mathrm{Ker}(E^4 \to E_2^{0,4}) \to E_0^{2,2}$. Un petit exercice d'algèbre homologique montre la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(E^4 \to E_2^{0,4}) \arrow[r] & E_2^{2,2}, \\
E^2 \arrow[u, "\delta\chi\cup ?"] \arrow[ur, "\delta\chi\cup ?"'] &
\end{tikzcd}$$

qui s'écrit

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(E)\big) \arrow[r, "a_F^E"] & H^2(\mathfrak{g}, K_2(E)). \\
K_2(F) \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\delta\chi\cup\mathrm{Res}_F^E"'] &
\end{tikzcd}$$

Il reste à identifier f. Le cup-produit induit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& & K_2(F)/l \arrow[d, "\theta_F"', "\wr"] & \\
{}_lH^2(F, \mathbb{Z}) & \times & \mathbb{H}^2_{ét}(F, \Gamma(2))/l \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\phi"] & {}_l\mathbb{H}^4_{ét}(F, \Gamma(2)) \\
H^1(F, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \arrow[u, "\delta", "\wr"'] & \times & \mathbb{H}^2_{ét}(F, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(2)) \arrow[r, "\cup"] & \mathbb{H}^3_{ét}\big(F, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}(2)\big), \arrow[u, "\delta", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

où $\phi \circ \theta_F = \epsilon_{l,F}.h_{l,F}$ [L1,L2] et ce diagramme commute au sens de la relation $\delta\big[x \cup \phi(\alpha)\big] = \delta(x) \cup \alpha$ pour tout $x \in H^1(F, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}), \alpha \in \mathbb{H}^2_{ét}(F, \Gamma(2))/l$. En utilisant la bijectivité du bord δ de droite, on voit que $f(\{x, y\}) = \epsilon_{l,F}.\ \chi \cup h_{l,F}(\{x, y\})$ d'où $a_F^E\big(\chi \cup h_{l,F}(\{x, y\})\big) = \epsilon_{l,F}.\ \delta\chi \cup \{x, y\}$. □

1.3. APPLICATIONS DE RÉSIDUS

Soit O un anneau complet pour une valuation discrète (de rang 1) de corps résiduel F, dont on note K le corps des fractions. On note $\widetilde{K}/K$ l'extension maximale non ramifiée d'anneau de valuation $\widetilde{O}$ et de corps résiduel $\widetilde{F}$. On note $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F) = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$. Pour tout entier m, on note $H^3_{m,nr}(K) = \mathrm{Ker}\big(H^3_m(K) \to H^3_m(\widetilde{K})\big)$. D'après Kato [Ka1, th. 3], on dispose d'une suite exacte (scindée par le choix d'une uniformisante)

$$0 \to H^3_m(F) \stackrel{i^K_F}{\to} H^3_{m,nr}(K) \stackrel{\partial^K_F}{\to} {}_mBr(F) \to 0, \tag{1.3.1}$$

puisque $H^2_m(F) = {}_mBr(F)$. Par ailleurs, le symbole modéré $K_2(\widetilde{K}) \stackrel{\partial_{BT}}{\to} K_1(\widetilde{F}) = \widetilde{F}^\times$ de Bass-Tate [BT] induit une application de résidu, notée encore ∂_{BT}: $H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{K})) \to Br(F) = H^2(\mathcal{G}, \widetilde{F}^\times)$. On rappelle qu'un élément décomposable de $H^3_n(F)$ est par définition un élément s'écrivant $\chi \cup h_{n,F}(\{x, y\})$ avec $\{x, y\} \in K_2(F)$ et $\chi \in H^1_n(F) = H^1(F, \mathbb{Z}/n)$. On note $H^3_{n,\mathrm{dec}}(F)$ l'ensemble des éléments décomposables de $H^3_n(F)$ et on pose $H^3_{\mathrm{dec}}(F) = \bigcup_n H^3_{n,\mathrm{dec}}(F) \subset H^3(F)$.

LEMME 3. *On note $sp_* : H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{O})) \to H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}))$ le morphisme déduit de la réduction modulo l'idéal maximal de $\widetilde{O}$. Soit l un nombre premier.*

(a) *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
H^3_{nr}(K)\{l\} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "a^{\widetilde{K}}_K"'] & Br(F)\{l\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{K}))\{l\} \arrow[r, "\partial_{BT}"] & H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}))\{l\} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

est $\epsilon_{l,K}$-commutatif.

(b) *Le diagramme précédent définit un homomorphisme $\gamma_F\colon H^3(F) \to H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{O})) = \mathrm{Ker}(\partial_{BT})$ et le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
H^3_{dec}(F) \arrow[r, "\gamma_F"] \arrow[d, "a^{\widetilde{F}}_F"'] & H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{O})) \arrow[d, "sp_*"'] \\
H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F})) \arrow[r, equal] & H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}))
\end{tikzcd}$$

est $\epsilon_{l,K}.\epsilon_{l,F}$ commutatif. De plus, si $\mathrm{car}(F) = p > 0$, l'homomorphisme γ_F : $H^3(F) \to H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{O}))$ est injectif sur la composante p-primaire de $H^3(F)$.

Démonstration. Pour les deux assertions, un argument de dévissage permet de se ramener au cas d'une classe de $H^3_l(K) \cap H^3_{nr}(K)\{l\}$. On note π une uniformisante de K et si $x \in O^\times$, on note $\overline{x} \in F$ sa réduction modulo π. On rappelle que l'on a une injection naturelle

$$H^1(F, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \approx H^1_{ét}(O, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(K, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}).$$

(a) On sait que $H^3_l(K) \cap H^3_{nr}(K)\{l\}$ mod $H^3_l(F)$ est engendré par les $\chi \cup h_{l,F}(\{x, \pi\})$ pour χ parcourant $H^1_{ét}(F, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ et $x \in O^\times$. Soit $c = \chi \cup h_{l,K}(\{x, \pi\}) \in H^3_{l,nr}(K)$ un tel élément. Alors $\partial(c) = \partial\big(\chi \cup h_{l,F}(\{x, \pi\})\big) = \chi \cup h_{l,F}(\overline{x})$. Comme $a_K\big(\chi \cup$

$h_{l,K}(\{x,\pi\})\big) = \epsilon_{l,F} \times \big(\chi \cup \{a\}\big)$ d'après le lemme 2, on a $\partial_{BT}(a_K(c)) = \epsilon_{l,F} \times \big(\chi \cup \{\overline{a}\}\big)$.

(b) Soit $c = \chi \cup h_{l,F}\{\overline{x},\overline{y}\} \in H^3_{l,\mathrm{dec}}(F)$. D'après le lemme précédent, on a

$$a_F(c) = \epsilon_{l,F} \times \big(\partial\chi \cup h_{l,F}\{\overline{x},\overline{y}\}\big) \in H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F})).$$

Par ailleurs, $i_F^K(c) = \chi \cup h_{l,F}(\{x,y\}) \in H^3_{l,nr}(K)$. Le lemme précédent donne

$$a_K\big(i_F^K(c)\big) = \epsilon_{l,K} \times \big(\chi \cup \{x,y\}\big) \in \mathrm{Im}\big(H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{O})) \to H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{K}))\big).$$

Réduisant modulo π, il vient $(sp_* \circ a_K \circ i_F^K)(c) = \epsilon_{l,K} \times \big(\chi \cup \{\overline{x},\overline{y}\}\big) = \epsilon_{l,K}\epsilon_{l,F} \times a_F(c)$. Si $l = p = \mathrm{car}(F)$, on a par définition $H^3(F)\{p\} = \big\langle H^3_{\mathrm{dec}}(F)\big\rangle$ et dans ce cas γ_F est injectif sur la composante p-primaire de $H^3(F)$. □

2. Invariants de Rost

2.1. $\mathcal{K}_2$-TORSEURS ET DESCENTE GALOISIENNE

(a) Soit X/F une variété lisse géométriquement connexe. Le complexe de Gersten

$$K_2(F(X)) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x \in \widetilde{X}^{(1)}} F(x)^\times \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{x \in \widetilde{X}^{(2)}} \mathbb{Z} \tag{2.1.1}$$

calcule les groupes $H^i_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2)$ [Q]. On considère le groupe $\mathcal{Z}(X) = \mathrm{Ker}(d_2)$, qui présente des analogies avec le groupe des diviseurs de Weil $\mathrm{Div}(X)$. On a la suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow K_2(F(X))/H^0_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{d_2} \mathcal{Z}(X) \xrightarrow{d_1} H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2) \longrightarrow 0. \tag{2.1.2}$$

De même que l'on peut associer à un diviseur $D \in \mathrm{Div}(X)$ un faisceau inversible $\mathcal{L}_D$ (un $\mathcal{K}_1$–torseur), on peut, selon le lemme 3.2.5 de [BD], associer à tout élément $c \in \mathcal{Z}(X)$ un torseur $\mathcal{F}_c$ sur X représentant la classe $d_2(c) \in H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2)$. Ce torseur est localement trivial pour la topologie de Zariski et si $U \subset X$ est un ouvert de Zariski, on a

$$\mathcal{F}_c(U) = \{v \in K_2(F(X)) \quad | \quad d_2(v) = c_{/U}\}. \tag{2.1.3}$$

La descente galoisienne pour les groupes de $\mathcal{K}_2$-cohomologie, inaugurée par Bloch, a fait l'objet d'une suite de travaux [CT1,CTR1,CTR2,K2], dont nous rappelons ici certains résultats fondamentaux. Notant $\widetilde{X} = X \times_F \widetilde{F}$, la suite exacte (5.1.2) pour la variété $\widetilde{X}$ est une suite exacte de $\mathcal{G}$-modules

$$0 \longrightarrow K_2(\widetilde{F}(X))/H^0_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{d_2} \mathcal{Z}(\widetilde{X}) \xrightarrow{d_1} H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2) \longrightarrow 0. \tag{2.1.4}$$

Le groupe $\mathcal{Z}(X)$ a la vertu galoisienne $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{Z}(\widetilde{X})^{\mathcal{G}}$ (cf. [CTR1], prop. 3.6), qui permet d'avoir la suite exacte suivante

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2) \longrightarrow H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\alpha} H^1\big(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}(X))/H^0(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)\big), \tag{2.1.5}$$

α étant le bord de la suite précédente. La suite ci-dessus se prolonge en la suite exacte

$$H^1(X,\mathcal{K}_2) \longrightarrow H^1(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\alpha} H^1\big(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}(X))/H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)\big) \xrightarrow{\beta} \\ \mathrm{Ker}\big(CH^2(X) \longrightarrow CH^2(\widetilde{X})\big) \longrightarrow H^1\big(F, H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)\big). \tag{2.1.6}$$

LEMME 4. *On note λ la surjection naturelle $K_2(\widetilde{F}(X)) \to K_2(\widetilde{F}(X))/H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)$. Soit $c \in \mathcal{Z}(\widetilde{X})$ tel que $[\mathcal{F}_c] \in H^1_{\mathrm{zar}}(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}}$. Pour tout $s \in \mathcal{G}$, soit $e_s \in K_2(\widetilde{F}(X))$ satisfaisant ${}^sc - c = d_2(e_s)$ de sorte que la fonction $s \mapsto e_s$ soit nulle sur un ouvert de $\mathcal{G}$.*

(a) *La fonction $s \mapsto \lambda(e_s)$ de $\mathcal{G}$ dans $K_2(\widetilde{F}(X))/H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)$ est un 1-cocycle représentant la classe $\alpha(c)$.*
(b) *La fonction $(s,t) \mapsto a_{s,t} = e_s +^s e_t - e_{st}$ de $\mathcal{G}^2$ dans $H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)$ est un 2-cocycle dont la classe est l'image de $[\mathcal{F}_c]$ par le composé*

$$H^1_{\mathrm{zar}}(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\alpha} H^1\big(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}(X))/H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)\big) \xrightarrow{\delta} H^2\big(\mathcal{G}, H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)\big),$$

où δ est le Bockstein associé à la suite exacte

$$0 \to H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2) \to K_2(\widetilde{F}(X)) \xrightarrow{\lambda} K_2(\widetilde{F}(X))/H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2) \to 0.$$

Démonstration. Le (a) résulte de la définition de l'application de bord α (cf. [Se1], § 5.4). Pour le b), par définition du Bockstein δ, on voit aussi que $a_{s,t}$ est un 2-cocycle représentant $\delta(\alpha(c))$. □

Remarque 2. Toutes les assertions sont énoncées par commodité pour une clôture séparable $\widetilde{F}/F$; elles possèdent néanmoins une forme convenable pour une extension galoisienne E/F.
(b) On fait maintenant l'hypothèse $K_2(\widetilde{F}) = H^0(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)$. Dans ce cas, on a même une injection $H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_2) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}}$ et un isomorphisme

$$H^1\big(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}(X))/K_2(\widetilde{F})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(F(X))\big). \tag{2.1.7}$$

On a donc avec cette identification la suite exacte

$$0 \to H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_2) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(F(X))\big) \xrightarrow{\beta} \\ \mathrm{Ker}\big(CH^2(X) \longrightarrow CH^2(\widetilde{X})\big) \longrightarrow H^1\big(F, H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X},\mathcal{K}_2)\big). \tag{2.1.8}$$

On va utiliser de façon répétée cette suite exacte que l'on appelle suite de descente galoisienne pour $\mathcal{K}_2$. On note

$$\eta\colon\ H^3(F) \longrightarrow H^0_{\mathrm{Zar}}\big(X, \mathcal{H}^3\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)\big)\big). \tag{2.1.9}$$

On sait d'après le théorème de Bloch–Ogus–Gabber [BO,CTHK] que la flèche

$$H^0_{\mathrm{Zar}}\big(X, \mathcal{H}^3\big(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)\big)\big) \longrightarrow H^3\big(F(X)\big)$$

est injective pour tout nombre premier l inversible dans F, donc

$$\mathrm{Ker}(\eta)\{l\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \longrightarrow H^3\big(F(X)\big)\big)\{l\}.$$

Si $\mathrm{car}(F) = p > 0$, le Théorème 1.a de [K2] nous assure que le même résultat vaut aussi pour la partie p-primaire, i.e. on a (sous l'hypothèse $K_2(\widetilde{F}) = H^0(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)$)

$$\mathrm{Ker}(\eta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(F(X))\big). \tag{2.1.10}$$

En particulier, ceci entraîne que si $X(F) \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(\eta) = 0$.

(c) *Lien avec* $NH^3\big(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)\big)$. On ne fait plus l'hypothèse $K_2(\widetilde{F}) = H^0_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)$. Soit n un entier positif. Le triangle exact $\Gamma(2)/X \overset{\times n}{\to} \Gamma(2)/X \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2) \to \Gamma(2)/X[1]$ induit la suite exacte

$$0 \to \mathbb{H}^3(X, \Gamma(2))/n \to H^3\big(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)\big) \to_n \mathbb{H}^4(X, \Gamma(2)) \to 0. \tag{2.1.11}$$

Or $\mathbb{H}^3(X, \Gamma(2)) = H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2)$ et on a une suite exacte (*loc. cit.*, Lemme 1)

$$0 \to CH^2(X) \to \mathbb{H}^4(X, \Gamma(2)) \to H^0_{\mathrm{Zar}}\big(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big) \to 0. \tag{2.1.12}$$

Combinant les deux suites exactes précédentes, on tire la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathcal{K}_2)/n \to NH^3\big(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)\big) \to_n CH^2(X) \to 0 \tag{2.1.13}$$

où $NH^3\big(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)\big) = \mathrm{Ker}\Big(H^3\big(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)\big) \to H^0_{\mathrm{Zar}}\big(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big)\Big)$. Par définition du morphisme $\beta : \mathrm{Ker}(\eta) \to CH^2(X)$ (*ibid*, diagramme de la page 404, flèche définie indépendamment de l'hypothèse $K_2(\widetilde{F}) = H^0_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)$), on déduit que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(\eta) & \xrightarrow{\beta} & CH^2(X) \\ \uparrow & & \\ \mathrm{Ker}\Big(H^3\big(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)\big) \to H^0_{\mathrm{Zar}}\big(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big)\Big) & & \uparrow \\ \downarrow & & \\ NH^3\big(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)\big) & \longrightarrow & {}_nCH^2(X) \end{array} \tag{2.1.14}$$

commute. Ceci vaut en particulier lorsque $n\,\mathrm{Ker}(\eta) = 0$ et dans ce cas, on a

$$\mathrm{Ker}\Big(H^3\big(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2)\big) \longrightarrow H^0_{\mathrm{Zar}}\big(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\big)\Big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\eta).$$

2.2. K-COHOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE ÉTALE D'UN GROUPE ALGÉBRIQUE DÉPLOYÉ

PROPOSITION 1 ([EKLV] Prop 3.20). *Soient G/F un groupe déployé simplement connexe, presque F-simple, T un F-tore déployé maximal de G, $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl et $X = G/T$ la variété des couples de Killing de G, qui est munie d'une action naturelle de W. Soit $(M_i)/F$ un module de cycles au sens de Rost [Ro3].*

(a) $A^0(F, M_j) = A^0(G, M_j)$ pour $j \geqslant 0$.
(b) $M_1(F) \xrightarrow{\sim} A^0(G, M_1)$.
(c) *On a une suite exacte*

$$0 \to A^1(G, M_2) \to S^2(\mathrm{Pic}(X)) \otimes M_0(F) \xrightarrow{c\otimes 1} CH^2(X) \otimes M_0(F) \to 0,$$

où $c\colon\ S^2(\mathrm{Pic}(X)) \to CH^2(X)$ est la forme intersection.
(d) $A^2(G, M_2) = 0$.

COROLLAIRE 1 ([EKLV] Cor 3.21). *Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente. on a* $\mathrm{Pic}(G) = 1$, $K_2(F) \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2)$ *et une suite exacte*

$$0 \to H^1_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2) \to S^2(\mathrm{Pic}(X)) \to CH^2(X) \to 0.$$

De plus, cette suite exacte induit un isomorphisme $H^1_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} (S^2\,\mathrm{Pic}(X))^W$.

Remarque 3. On a un isomorphisme naturel $\mathrm{Pic}(X) \approx \widehat{T}$ et il est bien connu que $(S^2\widehat{T})^W \approx \mathbb{Z}$. Nous précisons le signe de cet isomorphisme en demandant que $1 \in \mathbb{Z}$ corresponde à une forme quadratique définie positive sur $\widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Ainsi, nous avons défini un isomorphisme $\xi_T : H^1_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Comme deux tores déployés maximaux sont conjugués par un élément de $G(F)$, et puisque $G(\widetilde{F})$ agit trivialement sur la $\mathcal{K}$-cohomologie de $G \times_F \widetilde{F}$ ([EKLV] Prop. 4.4), l'invariant ξ_T ne dépend pas de T, et définit ainsi un isomorphisme canonique $\xi : H^1_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$. Une autre démonstration de ce fait est donnée dans [BD].

EXEMPLE. le groupe SL_2. Arrêtons-nous brièvement sur le groupe SL_2/F de coordonnées $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \mathbb{G}_m$ le tore standard de SL_2 et B le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de complémentaire $V_c = BwB = \{c \neq 0\}$ qui est la grosse cellule de SL_2. L'inclusion $wT \subset V_c$ admet une unique rétraction $\varphi : V_c \to wT$ qui est un fibré vectoriel. Ainsi, la $\mathcal{K}$-cohomologie de V_c est la même que celle de $\mathbb{G}_m$, qui se calcule immédiatement par la décomposition $\mathbb{A}^1_F = \mathbb{G}_m \cup \mathrm{Spec}(F)$. Ainsi $H^0_{\mathrm{Zar}}(V_c, \mathcal{K}_2) = K_2(F) \oplus F^\times$, $H^1_{\mathrm{Zar}}(V_c, \mathcal{K}_2) = 0$ et $CH^2(V_c) = 0$. La suite exacte de localisation (cf. [Sh])

$$\begin{array}{llll} 0 & \to H^0(SL_2, \mathcal{K}_2) & \to H^0(V_c, \mathcal{K}_2) & \to H^0(B, \mathcal{K}_1) \\ & \to H^1_{\mathrm{Zar}}(SL_2, \mathcal{K}_2) & \to H^1_{\mathrm{Zar}}(V_c, \mathcal{K}_2) & \to \mathrm{Pic}(B) \\ & \to CH^2(SL_2) & \to CH^2(V_c) & \to 0 \end{array} \tag{2.2.1}$$

montre que on a $H^0(SL_2,\mathcal{K}_2)=K_2(F)$, $CH^2(SL_2)=0$ et un isomorphisme

$$\mathbb{Z}\approx F[B]^\times/F^\times \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(SL_2,\mathcal{K}_2), \tag{2.2.2}$$

l'élément $1\in\mathbb{Z}$ étant la fonction $a : B\to\mathbb{G}_m$. Cet élément définit donc un $\mathcal{K}_2$–torseur concret $\mathcal{F}_0$ dont on va donner le cocycle pour le recouvrement $V_c=\{c\neq 0\}$, $V_a=\{a\neq 0\}$. Alors $\mathcal{F}_0(V_c)=H^0(V_c,\mathcal{K}_2)$, $\mathcal{F}_0(V_a)=\{a,c\}+H^0(V_a,\mathcal{K}_2)$, et le cocycle est $s_{V_c\cap V_a}=\{a,c\}\in H^0(V_c\cap V_a,\mathcal{K}_2)$.

Par descente galoisienne du corollaire 1 à l'aide de la suite exacte du §2.1, on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 1′ (cf. [BD], th. 2.2.1). *Soit G/F un groupe simplement connexe absolument presque F-simple. Alors $\mathcal{G}$ agit trivialement sur le groupe $\mathbb{Z}=H^1_{\mathrm{Zar}}(G\times_F\widetilde{F},\mathcal{K}_2)$ et*

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(G,\mathcal{K}_2)\xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(G\times_F\widetilde{F},\mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}}.$$

PROPOSITION 2. *Soient G/F un groupe déployé simplement connexe, presque simple, l un nombre premier inversible dans F et n un entier positif.*

(a) *Le groupe $H^i_{ét}(G,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ est isomorphe naturellement à*

 (i) *$H^0(F,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ pour $i=0$.*
 (ii) *$H^1(F,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ pour $i=1$.*
 (iii) *$H^2(F,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ pour $i=2$.*
 (iv) *$H^3(F,\mu_{l^n}^{\otimes 2})\oplus\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ pour $i=3$.*

 Pour la dernière égalité, la projection $H^3_{ét}(G,\mu_{l^n}^{\otimes 2})\to H^3(F,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ est donnée par la spécialisation en un point rationnel $g_0\in G(F)$ (n'importe quel point rationnel).

(b) *Si P est un torseur sous une F-forme de G, alors on a une suite exacte*

$$0\to H^3(F,\mu_{l^n}^{\otimes 2})\to H^3_{ét}(P,\mu_{l^n}^{\otimes 2})\to\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Notant $\mathcal{H}^i(\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ le faisceau sur G_{Zar} associé au préfaisceau $U\mapsto H^i_{ét}(U,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$, on a une suite spectrale $E_2^{p,q}=H^p_{\mathrm{Zar}}\big(G,\mathcal{H}^q(\mu_{l^n}^{\otimes 2})\big)\Longrightarrow H^{p+q}_{ét}\big(G,\mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)$. La proposition 1 appliquée au module de cycles $M_i(E)=H^i(E,\mu_{l^n}^{\otimes(i+2)})$ donne $H^0_{ét}(G,\mu_{l^n}^{\otimes 2})=H^0_{\mathrm{Zar}}\big(G,\mathcal{H}^0(\mu_{l^n}^{\otimes 2})\big)\xrightarrow{\sim}H^0(F,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$, ce qui est exactement (i). De même, la proposition 1 appliquée à $M_i(E)=H^i(E,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ permet d'identifier les termes dans la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^1_{\mathrm{Zar}}\big(G,\mathcal{H}^0(\mu_{l^n}^{\otimes 2})\big) & \to & H^1_{ét}\big(G,\mu_{l^n}^{\otimes 2}\big) & \to & H^0_{\mathrm{Zar}}\big(G,\mathcal{H}^1(\mu_{l^n}^{\otimes 2})\big), \\ & & \| & & & & \| \\ & & 0 & & & & H^1(k,\mu_{l^n}^{\otimes 2}) \end{array}$$

ce qui montre (ii), vu que le morphisme structural $G \to \mathrm{Spec}(k)$ induit une rétraction de l'homomorphisme $H^1(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^1(k, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$. Passons à (iii) et (iv). La variété G/F est une variété rationnelle. D'après Suslin ([Su2] Cor. 4.4), on a une suite exacte

$$0 \to H^0(G, \mathcal{K}_2)/l^n \to H^2_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\times n} H^1_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2) \to NH^3_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to_{l^n} CH^2(G) \to 0,$$

où $NH^3_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) = \mathrm{Ker}\big(H^3_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^0_{\mathrm{Zar}}\big(G, \mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2})\big)\big)$. Le théorème de Bloch–Ogus–Gabber [BO,CTHK] donne une injection $H^0_{\mathrm{Zar}}\big(G, \mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2})\big) \subset H^3(F(G), \mu_{l^n}^{\otimes 2}))$. La proposition 1 appliquée à $M_i(E) = H^i(E, \mu_{l^n}^{\otimes(i-1)})$ montre que l'on a un isomorphisme naturel $H^3(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2})\big)$. Le diagramme ci-dessus devient

$$0 \to K_2(F)/l^n \to H^2_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times l^n} \mathbb{Z} \to H^3_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^3(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}).$$

Par suite, l'assertion (iii) est vraie. De plus, le morphisme $H^3_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^3(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$ factorise le morphisme $H^3_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^3(F(G), \mu_{l^n}^{\otimes 2})$ et ainsi le morphisme structural $G \to \mathrm{Spec}(k)$ fournit une section canonique de la suite exacte $0 \to \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to H^3_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^3(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to 0$, donnant lieu à une décomposition canonique

$$H^3_{ét}(G, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \oplus H^3(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}).$$

Notons $\widetilde{P} = P \times_F \widetilde{F} \approx \widetilde{G} = G \times_F \widetilde{F}$. La suite spectrale de Hochshild–Serre $E_2^{p,q} = H^p\big(\mathcal{G}, H^q_{ét}(\widetilde{P}, \mu_{l^n}^{\otimes 2})\big) \Longrightarrow H^{p+q}_{ét}(P, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$ satisfait d'après l'assertion $a)$ les égalités $E_2^{p,q} = 0$ pour $q = 1, 2$ et pour tout p. On a donc une suite exacte $0 \to E_2^{3,0} \to E^3 \to E_2^{0,3}$, ce qui s'écrit

$$0 \to H^3(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^3_{ét}(P, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^3_{ét}(\widetilde{P}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}. \qquad \square$$

2.3. DÉFINITIONS DES INVARIANTS

On fixe un groupe semi-simple simplement connexe et absolument presque simple G/F. On rappelle brièvement deux constructions de l'invariant de Rost r_F: $H^1(F, G) \to H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3(F)$, la première reposant sur la $\mathcal{K}$-cohomologie de G et la seconde reposant sur la cohomologie étale de G. Il est probable que ces deux constructions coïncident au signe près; nous montrons ici seulement que les deux invariants engendrent le même sous-groupe de $H^3(F)$ (prop. 3), ce qui est suffisant pour les applications que l'on a en vue. Notons que Barge a donné une troisième construction de l'invariant de Rost [Bg]; cette construction repose sur la cohomologie des groupes et n'est pas discutée ici.

(a) *Première construction (cf. [EKLV], App. B).* Soit X/F un torseur sous G et notons $\widetilde{X} = X \times_F \widetilde{F}$. On fixe un isomorphisme $\phi : \widetilde{X} \approx \widetilde{G} = G \times_F \widetilde{F}$. On sait que $K_2(\widetilde{F}) = H^0_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)$ et ainsi on dispose de la suite exacte 2.1.8 de descente galoisienne pour $\mathcal{K}_2$

$$0 \to H^1_{\mathrm{Zar}}(X, \mathcal{K}_2) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(F(X))\big) \xrightarrow{\beta} \\ \mathrm{Ker}\big(CH^2(X) \to CH^2(\widetilde{X})\big) \to H^1\big(F, H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)\big). \tag{2.3.1}$$

On sait que l'isomorphisme $\phi_* : H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{G}, \mathcal{K}_2) \approx H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2)$ ne dépend pas de l'isomorphisme ϕ choisi et est un isomorphisme de modules galoisiens. De plus, on sait que $H^1(\widetilde{G}, \mathcal{K}_2)$ est isomorphe canoniquement à $\mathbb{Z}$ (muni de l'action triviale) et ainsi on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{G}$-modules $H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{X}, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$. Cela nous permet de poser

$$r_F([X]) = \alpha(1), \tag{2.3.2}$$

qui ne dépend que de la classe d'isomorphie $[X]$ du torseur X. Faisant l'identification $\mathbb{H}^4(F, \Gamma(2)) \approx H^3(F)$, cette construction s'étend de la façon suivante. Pour toute variété lisse Y/F, on dispose d'un invariant fonctoriel en Y

$$r_Y : \ H^1(Y, G) \longrightarrow \mathbb{H}^4(Y, \Gamma(2)), \tag{2.3.3}$$

tel que pour tout torseur E/Y sous G, l'invariant $r_{Y,G}([E])$ engendre $\ker\big(\mathbb{H}^4(Y, \Gamma(2)) \to \mathbb{H}^4(E, \Gamma(2))\big)$. Panin a démontré que $CH^2(X) = 0$ ([P], Cor. 5.2). Comme $H^1(F, \mathbb{Z}) = 0$, et que $CH^2(\widetilde{X}) = 0$, la suite exacte (2.3.1) ci-dessus implique le

THÉORÈME 1 (Rost). *Pour tout torseur X/F sous G, on a*

$$\big\langle r_F([X]) \big\rangle = \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \to H^3(F(X))\big). \tag{2.3.4}$$

(b) *Lien avec l'extension centrale de Brylinski–Deligne.* Si $g \in G(F)$, on note $L_g : G \to G$ la translation à gauche par g i.e. $L_g(x) = gx$. On fixe un élément $c_0 \in \mathcal{Z}(G)$ tel que le $\mathcal{K}_2$-torseur associé $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{c_0}$ représente l'élément $1 \in H^1_{\mathrm{Zar}}(G, \mathcal{K}_2)$. Selon le § 3 de [BD], cela donne lieu à une extension de groupes abstraits

$$0 \to K_2(F) \to E_F \to G(F) \to 1, \tag{2.3.5}$$

qu'il est commode d'appeler extension de Brylinski–Deligne. Le groupe abstrait E_F est constitué des couples (g, α) où $g \in G(F)$ et α est un isomorphisme de $\mathcal{K}_2$-torseurs

$$\alpha : \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\sim} L_g^* \mathcal{F}_0, \tag{2.3.6}$$

et on a une identification naturelle

$$\{\ u \in K_2(F(G)) \ \ | \ d_2 u = L_g^* c_0 - c_0\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\mathcal{F}_0, L_g^* \mathcal{F}_0). \tag{2.3.7}$$

Dans les coordonnées (g,u), la loi de groupe sur $\mathcal{E}_k$ est donnée par $(g,u)(g',u') = (gg', L^*_{g'}u + u')$. Soit F'/F une extension galoisienne de groupe $\mathfrak{g}$. La même construction sur le corps F' donne lieu à une extension de groupes abstraits

$$0 \to K_2(F') \to E_{F'} \to G(F') \to 1. \tag{2.3.8}$$

D'après la Proposition 1′, cette extension est $\mathfrak{g}$-équivariante. Prenant la suite exacte longue de cohomologie galoisienne associée à la suite exacte ci-dessus, on définit l'invariant

$$\rho_F^{F'} : H^1(\mathfrak{g}, G(F')) \to H^2(\mathfrak{g}, K_2(F')), \tag{2.3.9}$$

dont on va vérifier qu'il dérive de l'invariant de Rost.

LEMME 5. *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathfrak{g}, G(F')) \arrow[r, "r_F"] \arrow[dr, "\rho_F^{F'}"'] & \mathrm{Ker}\big(H^3(F) \longrightarrow H^3(F')\big) \arrow[d, "a_F^{F'}"] \\ & H^2(\mathfrak{g}, K_2(F')) \end{tikzcd}$$

est (-1)*-commutatif.*

Démonstration. Soit $z \in Z^1(\mathfrak{g}, G(F'))$ et X le torseur associé. On dispose alors d'un isomorphisme $\phi : G \times_F F' \xrightarrow{\sim} X \times_F F'$ de sorte que $\phi^{-1}\phi^s = L_{z_s} : G \times_F F' \to G \times_F F'$ pour tout $s \in \mathfrak{g}$. On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} K_2(F'(G)) \arrow[r, "d_2"] & \mathcal{Z}(G \times_F F') \arrow[r] & H^1_{\mathrm{Zar}}(G \times_F F', \mathcal{K}_2) \\ K_2(F'(X)) \arrow[r, "d_2"] \arrow[u, "\phi^*", "\wr"'] & \mathcal{Z}(X \times_F F') \arrow[r] \arrow[u, "\phi^*", "\wr"'] & H^1_{\mathrm{Zar}}(X \times_F F', \mathcal{K}_2). \arrow[u, "\phi^*", "\wr"'] \end{tikzcd}$$

On note $c = (\phi^*)^{-1}(c_{0,F'}) \in \mathcal{Z}(X \times_F F')$ et $\mathcal{F}_c = (\phi^*)^{-1}\mathcal{F}_{c_0,F'}$. Pour tout $s \in \mathfrak{g}$, on choisit $e_s \in K_2(F'(X))$ tel que $d_2(e_s) = {}^s c - c$ et le Lemme 4 du §2.1 montre que le 2-cocycle $a_{s,t} = e_s + {}^s e_t - e_{st}$ représente $(a_F^{F'} \circ r_F)([X]) \in H^2(\mathfrak{g}, K_2(F'))$. Passons maintenant à l'invariant $\rho_F^{F'}$. Pour calculer le bord $H^1(\mathfrak{g}, G(F')) \to H^2(\mathfrak{g}, K_2(F'))$, il faut relever le cocycle z_s dans le groupe $E_{F'}$ constitué des couples (g,u) où $g \in G(F')$, $u \in K_2(F'(G))$ satisfaisant la relation $d_2(u) = L_g^* c_0 - c_0$. On vérifie

$$d_2\big(\phi^*(e_s)\big) = \phi^*\big(d_2(e_s)\big) = \phi^*\big[{}^s[(\phi^*)^{-1}(c_0] - (\phi^*)^{-1}(c_0)\big] = L^*_{z_s^{-1}} c_0 - c_0,$$

et ainsi on peut relever $z_s^{-1} \in G(F')$ en l'élément $(z_s^{-1}, \phi^*(e_s)) \in E_{F'}$; l'élément $(z_s, -L^*_{z_s}\phi^*(e_s))$ relève donc z_s. On note $\rho_F^{F'}(z) = [b_{s,t}] \in H^2(\mathfrak{g}, K_2(F'))$ où

$$\begin{aligned}
\big(1, b_{s,t}\big) &= \big(z_s, -L^*_{z_s}\phi^*(e_s)\big) \times^s \big(z_t, -L^*_{z_t}\phi^*(e_t)\big) \times \big(z_{st}, -L^*_{z_{st}}\phi^*(e_{st})\big)^{-1} \\
&= \big(z_s, -L^*_{z_s}\phi^*(e_s)\big) \times \big({}^s z_t, -L^*_{{}^s z_t}{}^s\phi^*({}^s e_t)\big) \times \big(z_{st}^{-1}, \phi^*(e_{st})\big) \\
&= \big(z_s {}^s z_t, -L^*_{z_s {}^s z_t}\phi^*(e_s) - L^*_{z_s {}^s z_t}\phi^*({}^s e_t)\big) \times \big(z_{st}^{-1}, \phi^*(e_{st})\big) \\
&= \big(1, \phi^*(-e_s -^s e_t + e_{st})\big) \\
&= \big(1, -a_{s,t}\big),
\end{aligned}$$

puisque ϕ^* vaut l'identité sur $K_2(F')$. □

Remarque 4. Si $\mathrm{car}(F) = p > 0$, le morphisme $a_F^{\widetilde{F}}$ induit une bijection $H^3(F)\{p\} \approx H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}))\{p\}$ et l'étude de la partie p-primaire de l'invariant de Rost revient donc à l'étude de la partie p-primaire de l'invariant $\rho_F^{\widetilde{F}}$.
(c) *Seconde construction [Se3].* Cette construction ne vaut à priori qu'avec des coefficients $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)$, avec $l \neq \mathrm{car}(F)$. Soit X un F-torseur sous G. On choisit une extension séparable finie E/F déployant le groupe G et trivialisant le torseur X/F. On note $[E : F] = l^n q$ avec $(q, l) = 1$. On a une décomposition canonique

$$H^3_{ét}\big(X_E, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big) = H^3\big(E, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big) \oplus \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}, \tag{2.3.10}$$

et une suite exacte

$$0 \to H^3\big(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big) \to H^3_{ét}\big(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big) \to \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}. \tag{2.3.11}$$

Notons $y = (0, 1) \in H^3_{ét}\big(X_E, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)$. On voit facilement que $N_{E/F}(y) \in \mathrm{Im}\big(H^3\big(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big) \to H^3_{ét}\big(X, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)\big)$ et donc $N_{E/F}(y) = x \in H^3\big(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)$ avec un abus de notation. On pose

$$r'_{l,F}([X]) = x = N_{E/F}\Big((0, 1)\Big) \in H^3\big(F, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big) \hookrightarrow H^3\big(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)\big), \tag{2.3.12}$$

et cet élément ne dépend que de la classe d'isomorphie du torseur X et ne dépend pas du choix de l'extension E/F. Nous allons maintenant comparer les deux constructions.

LEMME 6. $\langle r'_{l,F}([X])\rangle = \langle r_{l,F}([X])\rangle \subset H^3(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$.

Démonstration. Par un argument de transfert, on peut supposer que le groupe de Galois de F est un l-groupe et ainsi $[E : F] = l^n$. On note $\Phi \subset \mathrm{Ker}(\eta_X^3) = \mathrm{Ker}\big[H^3(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \to H^3(F(X), \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))\big]$ le sous–groupe engendré par

$r_{l,F}([X])$ et l^m son ordre. Notant toujours $NH^3(X,\mu_l^{\otimes n}) = \mathrm{Ker}\big(H^3(X,\mu_l^{\otimes n}) \to H^3(k(X),\mu_l^{\otimes n})\big)$, on considère le le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & H^1_{\mathrm{Zar}}(X_E,\mathcal{K}_2)/l^n & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/l^n & & & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Res}^E_F} & & \uparrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_2)/l^n & \longrightarrow & NH^3(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2}) & \longrightarrow & {}_{l^n}CH^2(X) & \longrightarrow & 0. \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \Phi & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\eta^3_X) & \longrightarrow & {}_{l^n}CH^2(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

La ligne horizontale supérieure (resp. médiane) est la suite (2.1.13) pour $X_E \approx G_E$ (resp X/F); la ligne horizontale inférieure est la suite (2.3.4). La verticale centrale provient de la proposition 2.b du §2.2. La seule commutativité non triviale est celle du carré supérieur droit que l'on a vérifiée au diagramme (2.1.14). Les groupes $H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_2)/l^n$ et $H^1_{\mathrm{Zar}}(X_E,\mathcal{K}_2)/l^n$ sont tous deux isomorphes à $\mathbb{Z}/l^n$; la restriction $H^1(X,\mathcal{K}_2)/l^n \to H^1(X_E,\mathcal{K}_2)/l^n$ est donc la multiplication par l^{n-m} et la corestriction $H^1_{\mathrm{Zar}}(X_E,\mathcal{K}_2)/l^n \xrightarrow{N_{E/F}} H^1_{\mathrm{Zar}}(X,\mathcal{K}_2)/l^n$ n'est donc pas autre chose que la multiplication par l^m. Il résulte que dans $NH^3(X,\mu_{l^n}^{\otimes 2})$, on a $\Phi \approx \mathrm{Im}\big(H^1(X_E,\mathcal{K}_2)/l^n \xrightarrow{N_{E/F}} H^1(X,\mathcal{K}_2)/l^n\big)$, ce qui est précisément $\big\langle r'_{l,F}([X])\big\rangle$. $\square$

PROPOSITION 3. *Soit l un nombre premier distinct de* $\mathrm{car}(F)$. *Alors il existe un entier m premier à l tel que pour toute extension de corps E/F et pour toute classe $\gamma \in H^1(E,G)$, on a*

$$r'_{l,E}(\gamma) = m.\ r_{l,E}(\gamma) \in H^3(E,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)).$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord l'existence d'une classe 'verselle' de $H^1(F,G)$ (cf. [Ti2], Prop. 7). Il existe une variété intègre lisse V/F (prendre $V = GL_n/G$ pour une représentation fidèle $G \to GL_n$) et une classe $\alpha \in H^1(V,G)$ telle que pour tout corps L/F, pour tout ouvert $U \subset V$ et pour toute classe $\beta \in H^1(L,G)$, il existe un point $v \in U(L)$ tel que $\alpha(v) = \beta$. On note $\alpha_{\mathrm{gen}} \in H^1(F(V),G)$ la fibre générique de α. D'après le lemme précédent, il existe un entier m premier à l tel que $r'_{l,F(V)}(\alpha_{\mathrm{gen}}) = m.\ r_{l,F(V)}(\alpha_{\mathrm{gen}}) \in H^3\big(F(V),\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)\big)$. Soient E/F une extension de corps et $\beta \in H^1(E,G)$. On choisit $v \in V(E)$ tel que $\beta = \alpha(v)$. On note A l'anneau local de V en v, et $\mathfrak{M}$ son idéal maximal. D'après le théorème 19.6.4 p. 102 de [GD, vol. 20], on sait que le complété $\widehat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{M}$-adique est F-isomorphe à un anneau de séries formelles $F[[T_1,\ldots,T_n]] = F[[T_1,\ldots,T_{n-1}]][[T_n]]$. Puisque le diagramme $(*)$ de l'introduction commute de façon évidente pour le couple $(F[[t]], G\times_F F[[t]])$ et pour les invariants r et r', on peut ainsi spécialiser l'égalité $\beta = \alpha(v)$ en v pour obtenir $r_{l,E}(\gamma) = m.\ r'_{l,E}(\gamma) \in H^3(E,\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$. $\square$

Un argument analogue de spécialisation de la classe ‘verselle’ permet de vérifier que l’invariant de Rost se comporte comme on l’attend par les opérations de torsion.

LEMME 7. *Soit* $z \in Z^1(F, G)$ *d’invariant de Rost* $r = r_{F,G}([z])$. *Alors le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,G) & \xrightarrow{r_{F,G}} & H^3(F) \\ \tau_z \big\downarrow \wr & & ?-r \big\downarrow \wr \\ H^1(F, {}_zG) & \xrightarrow{r_{F,{}_zG}} & H^3(F) \end{array}$$

commute, où $?-r$ *désigne la translation* $c \to c - r$.

Démonstration. L’argument de spécialisation développé précédemment permet de supposer que $r = r_F([z])$ est d’ordre maximal d dans $\mathbb{H}^4(F, \Gamma(2)) \approx H^3(F)$. On note $P = G$ le k-torseur trivial sous G. On considère alors un torseur ‘versel’ E/V sous G, et on note ${}_zE/V$ le torseur tordu par z, qui est un torseur sous ${}_zG$. On note $r_{V,G} : H^1(V, G) \to \mathbb{H}^4(V, \Gamma(2))$ (resp. $r_{V,{}_zG} : H^1(V, {}_zG) \to \mathbb{H}^4(V, \Gamma(2))$) l’invariant de (2.3.3) pour le groupe G (resp. ${}_zG$). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(V,G) & \longrightarrow & H^1(E,G) \\ \tau_z \big\downarrow \wr & & \tau_z \big\downarrow \wr \\ H^1(V, {}_zG) & \longrightarrow & H^1(E, {}_zG) \end{array}$$

montre que le E-torseur ${}_zE \times_V E$ sous ${}_zG$ est isomorphe à ${}_zP \times_F E$. On a donc $r_{V,{}_zG}(\tau_z(E)) + \mathrm{Res}_F^V(r) \in \mathrm{Ker}\big(\mathbb{H}^4(V, \Gamma(2)) \to \mathbb{H}^4(E, \Gamma(2))\big)$; ce dernier groupe étant engendré par $r_{V,G}(E)$, il existe donc un entier n satisfaisant

$$r_{V,{}_zG}({}_zE) + \mathrm{Res}_F^V(r) = n.r_{V,G}(E) \quad \in \mathbb{H}^4(V, \Gamma(2)).$$

Par spécialisation en un point $v_0 \in V(F)$ tel que E_{v_0} soit isomorphe à ${}_zP$, il vient $r = n \times r \in H^3(F)$, donc $n \equiv 1 \ [d]$. Soit maintenant $\xi \in H^1(k, G)$. Il existe un point $v \in V(k)$ tel que le k-torseur E_v sous G soit classifié par ξ. En spécialisant la relation ci-dessus en v, on conclut que $r_{{}_zG}(\tau_z(\xi)) + r = n.r_{F,G}(\xi) \in H^3(F)$, d’où $r_{{}_zG}(\tau_z(\xi)) + r = r_{F,G}(\xi) \in H^3(F)$, puisque $d.r_{F,G}(\xi) = 0$. □

3. Preuve du Théorème principal

3.1. $\mathcal{K}$-COHOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE ÉTALE D’UN GROUPE DE CHEVALLEY SUR UN ANNEAU DE VALUATION DISCRÈTE DE RANG 1

Pour démontrer le théorème principal, il est naturel d’étendre le Corollaire 1 et la Proposition 2 du § 2.2 au cas où la base est le spectre d’un anneau de valuation discrète A de rang 1, de corps des fractions K et de corps résiduel F. On peut tout d'abord généraliser la proposition 1 du § 2.2 en prenant un module de cycles (M_i) sur Spec(A). On peut procéder de la même façon que si la base est un corps ([EKLV], rem. 3.23). En effet, soit $G/\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ un groupe de Chevalley épinglé, simple et simplement connexe [C]. La donnée d'un épinglage contient un $\mathbb{Z}$-tore T déployé maximal de G, et un $\mathbb{Z}$-sous-groupe de Borel B contenant T. On note $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl, $X/\mathbb{Z} = G/T$ (resp. $Y = G/B$), le $\mathbb{Z}$-schéma des couples de Killing de G (resp. des sous-groupes de Borel de G), qui est muni d'une action naturelle de W (cf. [SGA3], vol. 3, p. 230). Si $\chi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}-\mathrm{gr}}(T, \mathbb{G}_m)$, en poussant le X-torseur $G \to X$ sous T, on obtient un fibré en droites $L_\chi \to X$. Le choix d'un isomorphisme $T \approx \mathbb{G}^r_{m,\mathbb{Z}}$ définit donc r fibrés en droites L_1,..,L_r sur X de sorte que $G = L_1^\times \times_X \cdots \times_X L_r^\times$ où $L_i^\times$ est l'espace total du X-torseur sous $\mathbb{G}_m$ correspondant. On peut plonger $G/\mathbb{Z}$ dans $\overline{G}/\mathbb{Z} = L_1 \times_X \cdots \times_X L_r$. Alors $\overline{G} \setminus G = \bigcup_{i=1,\dots,r} D_i$ où $D_i/\mathbb{Z}$ est le diviseur $D_i = L_1^\times \times_X \cdots \times_X \{0\} \times_X \cdots L_r^\times$. Comme dans le cas où la base est Spec(F), on a une suite spectrale $E^1_{p,q} \Longrightarrow A_{p+q}(\overline{G}_A, M_j)$ où

$$\begin{cases} E^1_{p,q} = A_q(\overline{G}_A, M_j) \quad \text{si } p = 0, \\ E^1_{p,q} = \bigoplus\limits_{i_1 < \dots < i_p} A_q(D_{i_1,A} \cap \dots \cap D_{i_p,A}, M_j) \quad \text{si } p > 0. \end{cases}$$

Exactement comme sur Spec(F), l'étude de cette suite spectrale conduit à la proposition suivante.

PROPOSITION 4.

(a) $A^0(A, M_j) = A^0(G_A, M_j)$ *pour* $j \geqslant 0$.

(b) *On a une suite exacte*

$$0 \to A^1(G_A, M_2) \to S^2(\operatorname{Pic}(X_A)) \otimes M_0(A) \xrightarrow{c \otimes 1} CH^2(X_A) \otimes M_0(A) \to 0,$$

où $c\colon\ S^2(\operatorname{Pic}(X_A)) \to CH^2(X_A)$ *est la forme intersection.*

(c) $A^2(G_A, M_2) = 0$. □

PROPOSITION 5.

(a) *On a* $\operatorname{Pic}(G_A) = 1$ *et* $K_2(A) \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathrm{Zar}}(G_A, \mathcal{K}_2)$.

(b) *Il existe un unique isomorphisme* $\xi_A : H^1_{\mathrm{Zar}}(G_A, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ *tel que l'on ait un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} H^1_{\mathrm{Zar}}(G_F, \mathcal{K}_2) & \leftarrow & H^1_{\mathrm{Zar}}(G_A, \mathcal{K}_2) & \rightarrow & H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) \\ {\scriptstyle \xi_F}\downarrow \wr & & {\scriptstyle \xi_A}\downarrow \wr & & {\scriptstyle \xi_K}\downarrow \wr \\ \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Démonstration. (a) On applique la Proposition 4 à $M_i = \mathcal{K}_i$ compte tenu de la conjecture de Gersten pour la K-théorie en poids 0, 1 et 2, qui résulte résultat de Bloch [Bl]. Le (a) en résulte immédiatement.

(b) D'après Fossum–Iversen [FI] Prop. 1.1, on a un isomorphisme $\mathrm{Pic}(X_A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X_K) = \widehat{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-gr}(T, \mathbb{G}_m)$. De plus, il est clair que $\mathrm{Pic}(X_A) \approx \mathrm{Pic}(X_F)$. On poursuit ces calculs avec la suite exacte de localisation [Sh]

$$\begin{aligned} 0 \;\to\; & H^0_{\mathrm{Zar}}(G_A, \mathcal{K}_2) \;\to\; H^0_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) \;\xrightarrow{\partial}\; H^0_{\mathrm{Zar}}(G_F, \mathcal{K}_1) \\ \to\; & H^1_{\mathrm{Zar}}(G_A, \mathcal{K}_2) \;\to\; H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) \;\xrightarrow{\partial}\; H^1_{\mathrm{Zar}}(G_F, \mathcal{K}_1) \to \cdots \end{aligned}$$

Comme $H^1_{\mathrm{Zar}}(G_F, \mathcal{K}_1) = \mathrm{Pic}(G_F) = 1$, on obtient un isomorphisme $H^1_{\mathrm{Zar}}(G_A, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$. La Proposition 4 produit le diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(G_F, \mathcal{K}_2) \arrow[r] & S^2(\mathrm{Pic}(X_F)) \arrow[r] & CH^2(X_F) \\
0 \arrow[r] & H^1(G_A, \mathcal{K}_2) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, "\wr"'] & S^2(\mathrm{Pic}(X_A)) \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & CH^2(X_A) \arrow[u] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(G_K, \mathcal{K}_2) \arrow[r] & S^2(\mathrm{Pic}(X_K)) \arrow[r] & CH^2(X_K).
\end{tikzcd}$$

On conclut que les trois groupes de gauche s'identifient à $(S^2\widehat{T})^W$, ce qui implique (b). □

PROPOSITION 5′. *On suppose que A est complet. On note $\widetilde{A}/A$ l'extension non ramifiéee maximale de A. Soit G/F un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque F-simple. Soit $\mathfrak{G}/\operatorname{Spec}(A)$ un schéma en groupe semi-simple simplement connexe de fibre spéciale G/F. Alors $\mathcal{G}$ agit trivialement sur le groupe $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G} \times_A \widetilde{A}, \mathcal{K}_2)$ et*

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G} \times_A \widetilde{A}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}}.$$

Démonstration. Le schéma en groupes $\mathfrak{G} \times_A \widetilde{A}$ est déployé, donc la Proposition 5 montre que $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G} \times_A \widetilde{A}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G} \times_A \widetilde{K}, \mathcal{K}_2)$ Par localisation, on a un isomorphisme $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G}_K, \mathcal{K}_2)$ et d'après la Proposition 1′ du §2.2, on sait que $\mathcal{G}$ agit trivialement sur le groupe $H^1(\mathfrak{G}_{\widetilde{K}}, \mathcal{K}_2)$ donc aussi sur $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G} \times_A \widetilde{A}, \mathcal{K}_2)$. Comme $H^1(\mathfrak{G}_K, \mathcal{K}_2) = H^1(\mathfrak{G}_{\widetilde{K}}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}}$, on conclut que $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G} \times_A \widetilde{A}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}}$. □

PROPOSITION 6. *Soient l un nombre premier distinct de* $\mathrm{car}(F)$ *et n un entier.*

(a) Les groupes $H^i_{ét}(G_A, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$ sont naturellement isomorphes à

(i) $H^0(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$ *pour* $i = 0$.
(ii) $H^1(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$ *pour* $i = 1$.
(iii) $H^2(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$ *pour* $i = 2$.
(iv) $H^3(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \oplus \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ *pour* $i = 3$.

Pour la dernière égalité, la projection $H^3_{ét}(G_A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^3(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2})$ *est la spécialisation en un* A*-point* $g_0 \in G(A)$ *(n'importe quel* A*-point).*

(b) On suppose que A *est complet. Si* $\mathbf{P}/\operatorname{Spec}(A)$ *est un torseur sous une* A*-forme de* G_A*, alors on a une suite exacte*

$$0 \to H^3_{ét}(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^3_{ét}(\mathbf{P}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}.$$

Remarque 5. Les assertions $(a.i)$ et (b) satisfont des diagrammes commutatifs analogues à celui de la Proposition 5(b).

Avant de démontrer la Proposition 6, nous avons besoin de la suite exacte de Suslin sur $\operatorname{Spec}(A)$ utilisée dans la Proposition 2 du §2.2. Elle se déduit aisément de la preuve ce cette suite exacte pour un corps et du quasi-isomorphisme de faisceaux $\mathcal{K}_2/l^n \to \mathcal{H}^2(\mu_{l^n}^{\otimes 2})$ sur $\mathfrak{X}_{\mathrm{Zar}}$ pour tout schéma lisse de type fini $\mathfrak{X}/Spec(A)$ [CTR2].

LEMME 8. *Soit* $\mathfrak{X}/Spec(A)$ *un schéma lisse de type fini. Alors, on a une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\mathfrak{X}, \mathcal{K}_2)/l^n \to H^2_{ét}(\mathfrak{X}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{X}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\times l^n} \\ H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{X}, \mathcal{K}_2) \to NH^3_{ét}(\mathfrak{X}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to_{l^n} CH^2(\mathfrak{X}) \to 0, \end{aligned}$$

où $NH^3_{ét}(\mathfrak{X}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) = \operatorname{Ker}\big(H^3_{ét}(\mathfrak{X}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) \to H^0_{\mathrm{Zar}}\mathfrak{X}, \mathcal{H}^3(\mu_{l^n}^{\otimes 2})\big)$.

Démonstration de la Proposition 6. Démontrons d'abord les assertions (i), (ii). Notons ζ une racine primitive l^n-ième de l'unité et $A' = A[\zeta]$. L'extension d'anneau A'/A est étale galoisienne de groupe de Galois Γ. Pour A', comme $H^1_{ét}(G_{A'}, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic}(G_{A'}) = 0$, la suite de cohomologie tirée de la suite exacte de Kummer $1 \to \mu_{l^n} \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{\times l^n} \mathbb{G}_m \to 1$ donne $H^0_{ét}\big(G_{A'}, \mu_{l^n}\big) = H^0_{ét}\big(A', \mu_{l^n}\big)$ et $H^1_{ét}\big(G_{A'}, \mu_{l^n}\big) = H^1_{ét}\big(A', \mu_{l^n}\big)$. Or $\mu_{l^n,A'}^{\otimes 2} \approx \mu_{l^n,A'}$, donc les assertions (i) et (ii) sont satisfaites pour A'. On a une suite spectrale $E_2^{p,q} = H^p\big(\Gamma, H^q_{ét}\big(G_{A'}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)\big) \Longrightarrow H^{p+q}_{ét}\big(G_A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)$. On a alors $H^0\big(\Gamma, H^0_{ét}\big(G_{A'}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)\big) = H^0_{ét}\big(G_A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)$, ce qui montre précisément $H^0_{ét}\big(G_A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big) = H^0\big(\Gamma, H^0_{ét}\big(A', \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)\big) = H^0_{ét}\big(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)$. De plus, la suite exacte des premiers termes induit un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & H^1\big(\Gamma, H^0_{ét}\big(G_{A'}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)\big) & \to & H^1_{ét}(G_A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) & \to & H^0\big(\Gamma, H^1_{ét}\big(G_{A'}, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)\big) \\ & & \| & & \downarrow & & \| \\ 0 & \to & H^1\big(\Gamma, H^0_{ét}\big(A', \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)\big) & \to & H^1_{ét}(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}) & \to & H^0\big(\Gamma, H^1_{ét}\big(A, \mu_{l^n}^{\otimes 2}\big)\big), \end{array}$$

ce qui montre (ii). Utilisant le Lemme 8 et la Proposition 4, la démonstration des assertions (iii), (iv) et (b) est identique à celle des assertions correspondantes de la Proposition 2 du §2.1. $\square$

3.2. RÉCOLTE

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients nécessaires à la démonstration du théorème principal.

THÉORÈME 2. *Soient F un corps et G/F un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque F-simple. Alors, pour tout couple $(O, \mathfrak{G})$ formé d'un anneau O complet pour une valuation discrète de rang 1, de corps des fractions K de corps résiduel F, et d'un O-schéma en groupes $\mathfrak{G}$ semi-simple simplement connexe de fibre spéciale isomorphe à G_F, il existe un automorphisme $h : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc}
H^1(K, \mathfrak{G}_K) & \xrightarrow{r_K} & H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \\
\ell \uparrow & & \uparrow i_F^K \circ h_* \\
H^1_{\acute{e}t}(O, \mathfrak{G}) & & \\
\wr \downarrow & & \\
H^1(F, G) & \xrightarrow{r_F} & H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))
\end{array}$$

commute. Si $\mathrm{car}(F) = \mathrm{car}(K)$, $h = \mathrm{id}$ convient. Si $\mathrm{car}(F) = p > 0$ et $\mathrm{car}(K) = 0$, $h = -\mathrm{id}$ convient sur $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

Démonstration. La démonstration se divise en deux parties, l'une traitant la partie modérée, l'autre plus longue portant sur la partie sauvage. Soit $(O, \mathfrak{G})$ un couple comme dans l'énoncé du théorème. Soit l un nombre premier distinct de $\mathrm{car}(F)$. On va montrer la commutativité du diagramme du théorème pour l'invariant de Rost l-primaire $r_{l,F} : H^1(F, G) \to H^3(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2))$.

Premier cas $l \neq \mathrm{car}(F)$**.** On utilise la seconde définition. Soit $\mathfrak{X}/\operatorname{Spec}(O)$ un torseur sous $\mathfrak{G}$ de fibre spéciale Y/F, et dont on note X/K la fibre générique. On choisit une extension étale finie O_1/O déployant le groupe $\mathfrak{G}$ et trivialisant le torseur $\mathfrak{X}$. On note K_1 (resp. F_1) le corps des fractions (resp. le corps résiduel) de O_1, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec}(O)} \operatorname{Spec}(O_1)$, $Y_1 = Y_{F_1}$ et $X_1 = X_{K_1}$. D'après la Proposition 4 du §3.1, on a deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc}
H^3_{\acute{e}t}(X_1, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & = & H^3(K_1, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \oplus & \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \\
\uparrow & & \uparrow & & \| \\
H^3_{\acute{e}t}(\mathfrak{X}_1, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & = & H^3_{\acute{e}t}(O_1, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \oplus & \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \\
\downarrow \wr & & \wr \downarrow & & \| \\
H^3_{\acute{e}t}(Y_1, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & = & H^3(F_1, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) & \oplus & \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l,
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^3(K, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] & H^3_{ét}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] & \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \\
0 \arrow[r] & H^3_{ét}(O, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d, "\wr"] & H^3_{ét}(\mathfrak{X}, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & H^3(F, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] & H^3_{ét}(Y, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)) \arrow[r] & \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l,
\end{tikzcd}$$

les lignes du second diagramme étant exactes. Il résulte de ces deux diagrammes que $r'_{l,K}([X]) = i_F^K\big(r'_{l,F}([Y])\big)$. La proposition 3 du §2.3 montre qu'il existe un entier m (resp. e) premier à l (resp. de F) tel que $r'_{l,K} = m.r_{l,K}$ (resp. $r'_{l,K} = e.r_{l,K}$), donc $r_{l,K} = (\frac{m}{e}).i_F^K \circ r_{l,F}$. L'entier $\frac{m}{e}$ définit un automorphisme de $\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$.

Second cas: $l = p = \mathrm{car}(F)$**.** Suite à la Remarque 4 du §2.3.b, il suffit de regarder les invariants $\rho_F^{\widetilde{F}}$ et $\rho_K^{\widetilde{K}}$. De même que lorsque la base est un corps, le choix d'un torseur représentant la classe $1 \in \mathbb{Z} = H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G}, \mathcal{K}_2) = H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{G} \times_O \widetilde{O}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}}$ (cf. prop. 5′) donne lieu à une extension $\mathcal{G}$-équivariante de groupes abstraits

$$1 \to K_2(\widetilde{O}) \to E_{\widetilde{O}} \to \mathfrak{G}(\widetilde{O}) \to 1$$

de sorte que suivant la Proposition 5.b du §3.1, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K_2(\widetilde{K}) \arrow[r] & E_{\widetilde{K}} \arrow[r] & \mathfrak{G}_K(\widetilde{K}) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_2(\widetilde{O}) \arrow[r] \arrow[u, "j_*"] \arrow[d, "i_*"'] & E_{\widetilde{O}} \arrow[r] \arrow[u, "j_*"] \arrow[d, "i_*"'] & \mathfrak{G}(\widetilde{O}) \arrow[r] \arrow[u, "j_*"] \arrow[d, "i_*"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_2(\widetilde{F}) \arrow[r] & E_{\widetilde{F}} \arrow[r] & G(\widetilde{F}) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Nous affirmons que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & & 0 \\
 & Br(F)\{p\} \arrow[u] \arrow[rr, phantom, "="] & & Br(F)\{p\} \arrow[u] \\
H^1(\widetilde{K}/K, \mathfrak{G}_K) \arrow[r, "\rho_K^{\widetilde{K}}"] & H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{K}))\{p\} \arrow[u, "\pm\partial_{BT}"] & & H^3_{nr}(K)\{p\} \arrow[u, "\partial"] \arrow[ll, "a_K"'] \\
H^1(O, \mathfrak{G}) \arrow[r, "\rho_O^{\widetilde{O}}"] \arrow[u, "j^*"] \arrow[d, "i^*"'] & H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{O}))\{p\} \arrow[u, "\mathrm{Res}_O^K"] \arrow[d, "sp_*"'] & & \\
H^1(F, G) \arrow[r, "\rho_F^{\widetilde{F}}"] & H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{F}))\{p\} & & H^3(F)\{p\}, \arrow[ll, "a_F", "\sim"'] \arrow[llu, "\gamma_F"'] \arrow[uu, "i_F^K"']
\end{tikzcd}$$

commute au signe près, où le morphisme injectif $\gamma_F : H^3(F)\{p\} \to H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{O}))\{p\}$ est défini au Lemme 3 (§1.3). En effet, le carré de gauche fait suite au diagramme précédent et les deux carrés de droite sont (-1)–commutatifs d'après le Lemme 5 (§2.3.b). Vu que le morphisme a_F est un isomorphisme (Remarque 1, §1.2), on conclut que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} H^1(\widetilde{K}/K, \mathfrak{G}_K) \arrow[r, "r_K"] & H^3(K)\{p\} \\ H^1(O, \mathfrak{G}) \arrow[u, "j^*"] \arrow[d, "i^*"] & \\ H^1(F, G) \arrow[r, "r_F"] & H^3(F)\{p\} \arrow[uu, "i_F^K"'] \end{tikzcd}$$

est $(-\epsilon_{p,K})$-commutatif. □

4. Invariants de Rost et sous-groupes parahoriques

On garde les notations O, $\widetilde{O}, \dots$ de la section précédente 3 et on choisit une uniformisante $\pi \in K$. Si G/K est un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque K-simple et déployé par l'extension $\widetilde{K}$, cette section établit le lien entre d'une part la décomposition de Bruhat–Tits de l'ensemble $H^1(\widetilde{K}/K, G)$ et d'autre part le composé $H^1(\widetilde{K}/K, G) \to \mathrm{Ker}\big(H^3(K) \to H^3(\widetilde{K})\big) \xrightarrow{\partial_K} Br(F)$. Il est naturel de commencer par calculer la $\mathcal{K}_2$-cohomologie des sous-groupes parahoriques.

4.1. SOUS-GROUPES PARAHORIQUES STANDARD

(a) *Le tore $\mathcal{T}$.* Soit $G/\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ un schémas en groupe de Chevalley épinglés simplement connexe et presque simple. Rappelons qu'un épinglage est la donnée suivante [C].

- un $\mathbb{Z}$–tore maximal déployé $T/\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ de G,
- un système de racines réduit irréductible $\Phi = \Phi(T, G) \subset \widehat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (où $\widehat{T} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-gr}(T, \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}})$) muni d'une base Δ définissant Φ^+,
- une famille de morphismes $(U_\alpha : \mathbb{G}_{a,\mathbb{Z}} \to G)_{\alpha\in\Phi}$ et un sous–groupe de Borel $B/\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ de G, tels que si l'on ordonne arbitrairement $\Phi^+ = (\alpha_i)_{i=1,\dots,q}$, le produit sur G induit un isomorphisme

$$T \times \prod_{i=1,\dots,q} \mathbb{G}_a \xrightarrow{id\times \prod_{i=1,\dots,q} U_{\alpha_i}} B.$$

On note α_0 l'opposée de la racine maximale de Φ, $\widehat{T}^0 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}-gr}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}, T)$, $\Phi^\vee = (\alpha^\vee)_{\alpha\in\Phi} \subset \widehat{T}^0$ le système de racines dual et $(\overline{\omega}_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ l'ensembles des poids fondamentaux, i.e. les éléments de $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ satisfaisant $\langle \omega_\alpha, \beta^\vee\rangle = \beta^\vee(\overline{\omega}_\alpha) = \delta_{\alpha,\beta}$. Notons que pour tout $\alpha \in \Phi$, on dispose d'un morphisme

$$\alpha^\vee : SL_2 \to G, \tag{4.1.1}$$

défini en envoyant le tore standard $\mathbb{G}_m$ de SL_2 sur T via $\alpha^\vee$ et le groupe unipotent triangulaire supérieur (resp. inférieur) de SL_2 sur U_α (resp. $U_{-\alpha}$). On note $V = \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $V' = \widehat{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ son dual. On rappelle qu'une racine affine $a = (\alpha, n)$ avec $\alpha \in \Phi$, $n \in \mathbb{Z}$ est la fonction affine $V \to \mathbb{R}$

$$a(v) = (\alpha, v) + n, \tag{4.1.2}$$

On considère l'ensemble de racines affines

$$\mathbf{\Delta} = \{(\alpha, 0)\}_{\alpha\in\Delta} \cup \{(\alpha_0, 1)\}, \tag{4.1.3}$$

qui est l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin complété de Δ. Les éléments de $\mathbf{\Delta}$ définissent l'alcôve

$$C = \{v \in V \quad | \quad a(v) > 0 \ \ \forall a \in \mathbf{\Delta}\}. \tag{4.1.4}$$

La théorie de Bruhat–Tits [BrT2] associe à toute partie non vide Ω de V un schéma en groupes lisse $\mathfrak{P}_\Omega/\operatorname{Spec}(O)$ de fibre générique G_K. En particulier, si Θ est une partie non vide de Δ, on peut considérer le sous–groupe parahorique $\mathfrak{P}_\Theta/\operatorname{Spec}(O)$ associé à

$$C(\Theta) = \{v \in V \quad | \quad a(v) > 0 \ \ \forall a \in \Theta\}. \tag{4.1.5}$$

Le tore $T \times_{\mathbb{Z}} O$ est un O-tore maximal de $\mathfrak{P}_\Theta$ et les sous-schémas $(U_\alpha/K)_{\alpha\in\Phi}$ de G_K se prolongent en des O-schémas en groupes $\mathfrak{U}_{\Theta,\alpha} \subset \mathfrak{P}_\Theta$ (*loc. cit.*, § 4.1). En particulier, si $\Theta = \mathbf{\Delta} \setminus \Delta$, on a $\mathfrak{P}_\Theta/\operatorname{Spec}(O) = G \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} \operatorname{Spec}(O)$. Le groupe $\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}$ est un sous-groupe d'Iwahori; les sous-groupes parahoriques $(\mathfrak{P}_\Theta/\operatorname{Spec}(O))_{\Theta\subset\mathbf{\Delta}}$ sont appelés les sous-groupes parahoriques standard de G_K; les groupes abstraits $(\mathfrak{P}_\Theta(O))_{\Theta\subset\mathbf{\Delta}}$ sont les sous-groupes parahoriques de $G(K)$ contenant le sous-groupe d'Iwahori $\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}(O)$.

On note $\overline{\mathfrak{P}}_\Theta/F$ la fibre spéciale de $\mathfrak{P}_\Theta$ qui est le groupe linéaire connexe engendré par le F-tore $T \times_{\mathbb{Z}} F$ et les $\overline{\mathfrak{U}}_{\Theta,\alpha}$ pour $\alpha \in \Phi$. On note $M_\Theta/F = (\overline{\mathfrak{P}}_\Theta)_{réd}/F$, i.e le quotient de $\overline{\mathfrak{P}}_\Theta$ par son radical unipotent, qui est isomorphe au sous-groupe de Levi de $\overline{\mathfrak{P}}_\Theta/F$ engendré par T/F et les $\overline{\mathfrak{U}}_{\Theta,\alpha}$ pour $\alpha \in \Theta$.

Le calcul du groupe $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2)$ requiert un objet auxiliaire considéré par Prasad et Raghunathan dans leur étude des extensions centrales topologiques de groupes algébriques sur un corps local non archimédien [PrR]. Il s'agit d'un tore déployé $\mathcal{T}/_{\mathbb{Z}}$, extension de T par $\mathbb{G}_m$. On définit $\widehat{\mathcal{T}}^0 = \mathbb{Z}^{\mathbf{\Delta}}$, et le morphisme $p_* : \widehat{\mathcal{T}}^0 \to \widehat{T}^0$ en envoyant l'élément $(\alpha, 0)$ de Δ sur $\alpha^\vee$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et en envoyant $(\alpha_0, 1)$ sur $\alpha_0^\vee$ (*loc. cit.*, § 4.6). Le morphisme p_* est surjectif et définit une suite exacte de $\mathbb{Z}$-tores déployés

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{T} \xrightarrow{p} T \to 1, \tag{4.1.6}$$

où $\mathcal{R} \approx \mathbb{G}_m$ est un tore de rang 1. On précise cet isomorphisme en choisissant comme générateur de $\widehat{\mathcal{R}}^0$ l'élément

$$\chi = (\alpha_0, 1) + \sum_{\alpha\in\Delta} c'_\alpha(\alpha, 0) \in \widehat{\mathcal{T}}^0, \tag{4.1.7}$$

où $c'_\alpha = -\alpha_0^\vee(\overline{\omega}_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$. Pour toute partie non vide Θ de $\boldsymbol{\Delta}$, on définit le sous-tore ${}_\Theta\mathcal{T}$ de $\mathcal{T}$ par ${}_\Theta\widehat{\mathcal{T}}^0 = \mathbb{Z}^{\boldsymbol{\Delta}\setminus\Theta}$. Les tores $\mathcal{T}$ et ${}_\Theta\mathcal{T}$ sont liés au groupe de Picard de M_Θ. En effet, suivant un théorème de Weil (cf. [SGA3], exp. XVIII), on peut construire un groupe M^u/F engendré par $\mathcal{T} \times_{\mathbb{Z}} F$ et les sous–groupes $\overline{\mathfrak{U}}_{\Theta,\alpha}$ $(\alpha \in \Theta)$ en faisant agir $\mathcal{T}$ sur ces groupes via p. Ceci nous donne une extension de groupes réductifs

$$1 \to \mathbb{G}_m \to M^u_\Theta \xrightarrow{p} M_\Theta \to 1, \tag{4.1.8}$$

dont la restriction à $T/F \subset M_\Theta/F$ est l'extension (A) précédente. Le tore ${}_\Theta\mathcal{T}/F$ est un tore central de dimension maximale du groupe réductif M^u_Θ et donc $(M^u_\Theta)_{\mathrm{tor}} = \mathcal{T}_F/{}_\Theta\mathcal{T}_F$. On note $S_\Theta/F = (M_\Theta)_{\mathrm{tor}}/F$ et ${}_\Theta T = \mathrm{Ker}(T \to S_\Theta)$ de dimension $\dim({}_\Theta T) = \dim({}_\Theta\mathcal{T}) = \sharp\Theta - 1$. Il vient un diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & \mathbb{G}_m & \to & \mathcal{T}/{}_\Theta\mathcal{T} & \to & S_\Theta & \to & 1 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \times n_\Theta} & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & \mathbb{G}_m & \to & M^u_\Theta & \xrightarrow{p} & M_\Theta & \to & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & \mu_{n_\Theta} & \to & DM^u_\Theta & \to & DM_\Theta & \to & 1, \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array} \tag{4.1.9}$$

qui définit l'entier n_Θ et dont la restriction aux tores induit le diagramme commutatif exact

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & \mathbb{G}_m & \to & \mathcal{T}/{}_\Theta\mathcal{T} & \to & S_\Theta & \to & 1 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \times n_\Theta} & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & \mathbb{G}_m & \to & \mathcal{T} & \xrightarrow{p} & T & \to & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \to & \mu_{n_\Theta} & \to & {}_\Theta\mathcal{T} & \to & {}_\Theta T & \to & 1. \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array} \tag{4.1.10}$$

LEMME 9 ([PrR], §4.7). *Le groupe DM^u_Θ/F est un revêtement universel du groupe semi-simple DM_Θ/F.*

(b) *Le groupe $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2)$.* Commençons par étudier la $\mathcal{K}_2$-cohomologie du sous-groupe d'Iwahori $\mathfrak{P}_\Delta/\operatorname{Spec}(O)$. Puisque ce schéma en groupes est lisse, de même que dans la preuve de la proposition 4 du §3.1, on a une suite exacte de localisation

$$\begin{array}{llll} 0 \to H^0_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Delta, \mathcal{K}_2) & \to & H^0_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{i_*} H^0_{\mathrm{Zar}}(\overline{\mathfrak{P}}_\Delta, \mathcal{K}_1) \\ \xrightarrow{i_*} H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Delta, \mathcal{K}_2) & \to & H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{i_*} H^1_{\mathrm{Zar}}(\overline{\mathfrak{P}}_\Delta, \mathcal{K}_1) \\ \to \quad CH^2(\mathfrak{P}_\Delta) & \to & CH^2(G_K) = 0. & \end{array} \tag{4.1.11}$$

On a donc $H^0_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Delta}}, \mathcal{K}_2) = K_2(O)$. Le morphisme $\overline{\mathfrak{P}}_{\boldsymbol{\Delta}}/F \to M_\Delta \approx B_F$ est un fibré vectoriel, on a donc $H^1_{\mathrm{Zar}}(\overline{\mathfrak{P}}_{\boldsymbol{\Delta}}, \mathcal{K}_1) = \mathrm{Pic}(B_F) = 1$. De plus, selon un lemme de Rosenlicht (cf. [Sa] Lemme 6.5), on sait que $H^0_{\mathrm{Zar}}(\overline{\mathfrak{P}}_\Delta, \mathcal{K}_1)/F^\times \approx H^0_{\mathrm{Zar}}(B_F, \mathbb{G}_m) = \widehat{T}$. On a donc extrait du diagramme précédent la suite exacte

$$0 \to \widehat{T} \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Delta}}, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{q} \mathbb{Z} \to 0, \tag{4.1.12}$$

dont on va voir qu'elle est duale de la suite (4.1.6) ci-dessus. Le morphisme $\mathbb{Z} = H^1_{\mathrm{Zar}}(G_O, \mathcal{K}_2) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Delta}}, \mathcal{K}_2)$ nous donne un scindage de q

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Delta}}, \mathcal{K}_2) = \widehat{T} \oplus \mathbb{Z}. \tag{4.1.13}$$

On définit alors le morphisme $\Upsilon : H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Delta, \mathcal{K}_2) \to \widehat{T}$ par son dual $\Upsilon^* \colon \widehat{T}^0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Delta}}, \mathcal{K}_2), \mathbb{Z}\big)$ en posant pour tout $a = \{\alpha, r_a\} \in \boldsymbol{\Delta}$ et tout $(u, n) \in \widehat{T} \oplus \mathbb{Z}$

$$\Upsilon^*(a).(u, n) = \alpha^\vee(u) + r_a \times n. \tag{4.1.14}$$

THÉORÈME 3. (a) *Le morphisme* $\Upsilon : H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\boldsymbol{\Delta}}, \mathcal{K}_2) \to \widehat{T}$ *est un isomorphisme.*

(b) Pour toute partie non vide $\Theta \subset \boldsymbol{\Delta}$, la restriction $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Delta, \mathcal{K}_2) \approx \widehat{T}$ induit un isomorphisme

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} \Big[\widehat{\mathcal{T}/_\Theta\mathcal{T}}\Big].$$

De plus, $CH^2(\mathfrak{P}_\Theta) = 0$.

(c) *L'image de* $1 \in \mathbb{Z} \approx H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2)$ *par* $\partial : H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(\overline{\mathfrak{P}}_\Theta) = \mathrm{Pic}(M_\Theta)$ *correspond au générateur donné par l'extension* $1 \to \mathbb{G}_m \to M^u_\Theta \to M_\Theta \to 1$.

Démonstration. (a) Il suffit de voir que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \widehat{T} & \to & H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Delta, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{q} & \mathbb{Z} & \to & 0 \\ & & \times & & \times & & \times & & \\ 0 & \leftarrow & \widehat{T}^0 & \xleftarrow{p_*} & \widehat{T}^0 & \leftarrow & \mathbb{Z} & \leftarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} & = & \mathbb{Z} & & \end{array} \tag{4.1.15}$$

commute. Le carré de gauche commute de façon évidente. Pour celui de droite, on vérifie que pour tout $(u, n) \in \widehat{T} \oplus \mathbb{Z}$

$$\Upsilon^*(\chi).(u, n) = (\alpha_0^\vee + \sum_{\alpha \in \Delta} c'_\alpha \alpha^\vee)(u) + n = n. \tag{4.1.16}$$

(b) La démonstration procède essentiellement par réduction au cas du groupe SL_2/K.

Première étape $G/K = SL_2/K$: On prend les notations de l'exemple du §2.2 et on note $\alpha : T \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m$. Alors $\mathbf{\Delta} = \{(\alpha, 0), (-\alpha, 1)\}$. On note $\mathfrak{P}_0 = SL_2/O$, $\mathfrak{P}_1$ les deux sous-groupes parahoriques maximaux standard de SL_2/K. Alors

$$\mathfrak{P}_1(O) = \begin{pmatrix} O & \pi^{-1}O \\ \pi O & O \end{pmatrix}$$

et on doit démontrer que l'injection

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_1, \mathcal{K}_2) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}, \mathcal{K}_2) = \widehat{T} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{4.1.17}$$

a pour image $\mathbb{Z}.(-1, 1)$. Puisque $\mathfrak{P}_1$ est isomorphe à SL_2/O, on a $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_1, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{Zar}}(SL_2, \mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$. Une solution consiste à décrire les $\mathcal{K}_2$-torseurs sur $\mathfrak{P}_\Delta$ par des cocycles explicites. On considère l'anneau de fonctions de $\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}$

$$R = \frac{O[a, b, c, d, c']}{ad - cd = 1, \quad c = \pi c'} \tag{4.1.18}$$

et le recouvrement ouvert $\mathfrak{V}_c = \mathrm{Spec}(R_c)$, $\mathfrak{V}_a = \mathrm{Spec}(R_a)$ de $\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}$. Soit $\mathcal{F}$ le $\mathcal{K}_2$-torseur sur $\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}$ provenant dans la suite exacte (4.1.12) du générateur $\mathbb{Z} = \widehat{T} = F[\overline{\mathfrak{P}}_{\mathbf{\Delta}}]^\times/F^\times \approx F[B]^\times/F^\times$, i.e. correspondant à la fonction $a \in F[\overline{\mathfrak{P}}_{\mathbf{\Delta}}]^\times/F^\times$. Alors

$$\mathcal{F}(\mathfrak{V}_c) = H^0_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{V}_c, \mathcal{K}_2), \qquad \mathcal{F}(\mathfrak{V}_a) = \{a, \pi\} + H^0_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{V}_a, \mathcal{K}_2), \tag{4.1.19}$$

et le cocycle de $\mathcal{F}$ est $s_{\mathfrak{V}_c \cap \mathfrak{V}_a} = -\{a, \pi\}$. On peut associer aussi des $\mathcal{K}_2$-torseurs sur $\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}$ aux cocycles

$$s^0_{\mathfrak{V}_c \cap \mathfrak{V}_a} = \{a, c\}, \qquad s^1_{\mathfrak{V}_c \cap \mathfrak{V}_a} = \{a, c'\} \tag{4.1.20}$$

à valeurs dans $H^0_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{V}_c \cap \mathfrak{V}_a, \mathcal{K}_2)$. En utilisant la description du générateur de $H^1_{\mathrm{Zar}}(SL_2, \mathcal{K}_2)$ faite au §2.2, on voit aisèment que le $\mathcal{K}_2$-torseur sur $\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}$ associé à s^0 (resp. s^1) est bien l'image par restriction du générateur de $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_0, \mathcal{K}_2)$ (resp. $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_1, \mathcal{K}_2)$). L'égalité $s^1_{\mathfrak{V}_c \cap \mathfrak{V}_a} - s^0_{\mathfrak{V}_c \cap \mathfrak{V}_a} = -s_{\mathfrak{V}_c \cap \mathfrak{V}_a}$ montre bien que le générateur de $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_1, \mathcal{K}_2)$ s'envoie dans $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}, \mathcal{K}_2)$ sur $(-1, 1)$.

Seconde étape: Le même raisonnement que pour $\mathfrak{P}_\Delta$ en (4.1.12) permet de tirer la suite exacte

$$0 \to \widehat{S}_\Theta \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathrm{Pic}(M_\Theta) \to CH^2(\mathfrak{P}_\Theta) \to 0, \tag{4.1.21}$$

puisque $\widehat{S}_\Theta = F[\overline{\mathfrak{P}}_\Theta]^\times/F^\times$. Cette suite met en évidence l'injectivité de la restriction $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}, \mathcal{K}_2)$. De plus, on sait d'après le Corollaire 6.11 de [Sa] que l'on a un isomorphisme de groupes finis $\mathrm{Pic}(M_\Theta) \approx \mathrm{Pic}(DM_\Theta) \approx \mathbb{Z}/n_\Theta\mathbb{Z}$.

LEMME 10. *Le groupe* $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2)$ *est orthogonal à* $\widehat{{}_\Theta\mathcal{T}}^0 \subset \widehat{\mathcal{T}}^0$ *pour l'accouplement* $\widehat{\mathcal{T}}^0 \times H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Delta, \mathcal{K}_2) \to \mathbb{Z}$.

Montrons le lemme. Soit $a = (\alpha, r_a) \in \mathbf{\Delta} \setminus \Theta$. Supposons dans un premier temps que $a = (\alpha, 0)$ pour $\alpha \in \Delta$. Alors le morphisme $\alpha^\vee \colon SL_2/K \to G_K$ se prolonge en $f_a \colon SL_2/O \to \mathfrak{P}_\Theta$ et $\mathfrak{I}_a = SL_2/O \times_{\mathfrak{P}_\Theta} \mathfrak{P}_\Delta$ est le sous–groupe d'Iwahori standard de SL_2/K. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2) & \to & H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}}, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\Upsilon^*(a)} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle f_a^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_a^*}\big\downarrow & & \big\| \\ H^1_{\mathrm{Zar}}(SL_2/O, \mathcal{K}_2) & \to & H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{I}_a, \mathcal{K}_2) & \xrightarrow{\Upsilon^*_{SL_2}(a)} & \mathbb{Z}. \end{array} \tag{4.1.22}$$

Le cas de SL_2/O montre que $\Upsilon^*(a)$ s'annule sur $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2)$. Passons au cas $a = (\alpha_0, 1)$. Notant $\mathfrak{P}_1$ le sous–groupe parahorique standard de SL_2/K introduit précédemment, on voit que le morphisme $\alpha_0^\vee \colon SL_2/K \to G_K$ se prolonge en $\alpha_0^\vee \colon \mathfrak{P}_1 \to \mathfrak{P}_\Theta$. Comme α_0 est une racine longue, on sait que la restriction $(\alpha_0)^* \colon H^1_{\mathrm{Zar}}(G/K, \mathcal{K}_2) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(SL_2/K, \mathcal{K}_2)$ est un isomorphisme ([BD], Lemme 1.2.10). Par suite, le même diagramme que ci-dessus commute et achève la démonstration du lemme.

On a donc une inclusion $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2) \subset [\widehat{\mathcal{T}/_\Theta\mathcal{T}}]$ et on veut voir qu'il y a égalité. On dualise le diagramme (4.1.10) en

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \widehat{S}_\Theta & \to & \left[\widehat{\mathcal{T}/_\Theta\mathcal{T}}\right] & \to & \mathbb{Z} & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle \times n_\Theta}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ 0 & \to & \widehat{T} & \to & \widehat{\mathcal{T}} & \xrightarrow{\widehat{p}} & \mathbb{Z} & \to & 0 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ 0 & \to & \widehat{{}_\Theta T} & \to & \widehat{{}_\Theta\mathcal{T}} & \to & \mathbb{Z}/n_\Theta\mathbb{Z} & \to & 0. \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{4.1.23}$$

La comparaison de ce diagramme et de la suite exacte de localisation (4.1.21) donne immédiatement

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} [\widehat{\mathcal{T}/_\Theta\mathcal{T}}]$$

puisque $\mathrm{Pic}(M_\Theta) \approx \mathrm{Pic}(DM_\Theta) \approx \mathbb{Z}/n_\Theta\mathbb{Z}$ et on a de plus $CH^2(\mathfrak{P}_\Theta) = 0$.

(c) On dispose de deux flèches surjectives $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(M_\Theta) \approx \mathrm{Pic}(DM_\Theta)$. La première provient de la suite exacte (4.1.8) puisque l'on a une suite exacte $\mathbb{Z} = \widehat{\mathbb{G}}_m \to \mathrm{Pic}(M_\Theta) \to \mathrm{Pic}(M^u_\Theta) = 0$. La seconde est le bord $\partial \colon \mathbb{Z} = H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(M_\Theta)$. Le diagramme (4.1.23) ci-dessus montre que ces deux flèches sont égales, i.e. l'image de $1 \in \mathbb{Z} = H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2)$ par $\partial\colon H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(\overline{\mathfrak{P}}_\Theta) = \mathrm{Pic}(M_\Theta)$ correspond au générateur donné par l'extension $1 \to \mathbb{G}_m \to M^u_\Theta \to M_\Theta \to 1$.

4.2. DESCENTE GALOISIENNE

Par descente galoisienne, on va déduire du théorème précédent la généralisation suivante.

THÉORÈME 3′. *Soit G/K un groupe simplement connexe absolument presque K-simple, déployé par $\widetilde{K}$. Soit $\mathfrak{P}/\operatorname{Spec}(O)$ un sous-groupe parahorique de G. On note $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} \times_O F$ la fibre fermée, et $M/F = \overline{\mathfrak{P}}_{réd}$.*

(a) *On une suite exacte*

$$0 \to \widehat{M} \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}, \mathcal{K}_2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathrm{Pic}(M) \to 0,$$

et $CH^2(\mathfrak{P}) = 0$.

(b) *Supposons de plus que G_K soit quasi-déployé. Soit $1 \to \mathbb{G}_m \to M^u \to M \to 1$ une extension de groupes réductifs engendrant $\mathrm{Pic}(M)$. Alors M^u est le produit direct d'un groupe semi-simple simplement connexe et d'un tore inversible (i.e. facteur direct d'un tore quasi-trivial).*

Les calculs galoisiens sur le groupe $H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{X}, \mathcal{K}_2)$ se font avec la variante suivante d'une proposition de Colliot–Thélène et Raskind en utilisant la validité de la conjecture de Gersten en poids $\leqslant 2$ pour les schémas lisses sur un anneau de valuation discrète de rang 1 [Bl].

PROPOSITION 7 ([CTR1], prop. 3.6). *Soit $\mathfrak{X}/\operatorname{Spec}(O)$ un schéma lisse, de fibre générique X/K. On note $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \times_O \widetilde{O}$ et on suppose $K_2(\widetilde{O}) = H^0_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\mathfrak{X}}, \mathcal{K}_2)$.*

(a) *On a une suite exacte*

$$\begin{aligned}
&H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{X}, \mathcal{K}_2) \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\mathfrak{X}}, \mathcal{K}_2)^{\mathcal{G}} \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathcal{G}, K_2\big(\widetilde{K}(X)\big)/K_2(\widetilde{O})\big) \\
&\quad \to \mathrm{Ker}\big(CH^2(\mathfrak{X}) \to CH^2(\widetilde{\mathfrak{X}})^{\mathcal{G}}\big) \to H^1\big(\mathcal{G}, H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\mathfrak{X}}, \mathcal{K}_2)\big) \\
&\quad \to H^1(\mathcal{G}, K_2\big(\widetilde{K}(X)\big)/K_2(\widetilde{O})\big).
\end{aligned}$$

(b) *Si $X(K) \neq \emptyset$, on a $H^1(\mathcal{G}, K_2\big(\widetilde{K}(X)\big)/K_2(\widetilde{O})\big) = 0$.*

Démonstration du théorème 3′. Par localisation, on a une suite exacte

$$0 \to \widehat{M} \to H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathfrak{P}, \mathcal{K}_2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathrm{Pic}(M) \to CH^2(\mathfrak{P}) \to CH^2(G_K) = 0.$$

Il suffit donc de montrer la trivialité du groupe $CH^2(\mathfrak{P})$. Appliquant la proposition ci-dessus, il vient une injection

$$CH^2(\mathfrak{P}) \hookrightarrow H^1\big(\mathcal{G}, H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\mathfrak{P}}, \mathcal{K}_2)\big),$$

et il suffit donc de montrer que $H^1\big(\mathcal{G}, H^1_{\mathrm{Zar}}(\widetilde{\mathfrak{P}}, \mathcal{K}_2)\big) = 0$.

Premier cas: G/K est quasi-déployé:

(a) Reprenant momentanèment les notations $G, B, T, \ldots$ du §4.1, on doit considérer le cas du groupe tordu ${}^\varphi G/K$ par un homomorphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathrm{Aut}(\Delta))$, où $\mathrm{Aut}(\Delta) = \mathrm{Aut}(G, B, T)$ désigne le groupe fini des automorphismes extérieurs de G. Les sous-groupes parahoriques de ${}^\varphi G/K$ sont les ${}^\varphi\mathfrak{P}_\Theta$ pour $\Theta \subset \mathbf{\Delta}$ satisfaisant $\varphi(\Theta) = \Theta$. Le tore $\mathcal{T}$ se tord également par φ; les modules galoisiens $\widehat{{}^\varphi\mathcal{T}}^0$ et $\widehat{{}^\varphi\mathcal{T}} = H^1_{\mathrm{Zar}}({}^\varphi\widetilde{\mathfrak{P}}_\Delta, \mathcal{K}_2)$ sont des modules de permutation. Si $\Theta = \mathbf{\Delta}$, on a donc $H^1\big(\mathcal{G}, H^1_{\mathrm{Zar}}({}^\varphi\widetilde{\mathfrak{P}}_\Delta, \mathcal{K}_2)\big) = 0$. Si $\Theta \neq \Delta$, le théorème 3 précédent montre que l'on a une décomposition de modules galoisiens

$$\widehat{{}^\varphi\mathcal{T}} = H^1_{\mathrm{Zar}}({}^\varphi\mathfrak{P}_\Theta, \mathcal{K}_2) \oplus H^1_{\mathrm{Zar}}({}^\varphi\mathfrak{P}_{\mathbf{\Delta}\setminus\Delta}, \mathcal{K}_2),$$

d'où $H^1\big(\mathcal{G}, H^1_{\mathrm{Zar}}({}^\varphi\widetilde{\mathfrak{P}}_\Theta, \mathcal{K}_2)\big) = 0$.

(b) On va montrer que l'extension $1 \to \mathbb{G}_m \to {}^\varphi M^u_\Theta \to {}^\varphi M_\Theta \to 1$ engendre le groupe $\mathrm{Pic}({}^\varphi M_\Theta)$. En effet, d'après le corollaire 6.11 de [Sa], il suffit de montrer que $\mathrm{Pic}({}^\varphi M^u_\Theta) = 0$. On a une suite exacte

$$1 \to {}^\varphi DM^u_\Theta \to {}^\varphi M^u_\Theta \to {}^\varphi\mathcal{T}/{}^\varphi_\Theta\mathcal{T} \to 1.$$

Le groupe ${}^\varphi DM^u_\Theta$ est semi-simple simplement connexe, donc on a un isomorphisme $\mathrm{Pic}\big({}^\varphi\mathcal{T}/{}^\varphi_\Theta\mathcal{T}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}({}^\varphi M^u_\Theta)$. Or ${}^\varphi\mathcal{T}/{}^\varphi_\Theta\mathcal{T}$ est un tore inversible (i.e. facteur direct d'un tore quasi-trivial), donc $\mathrm{Pic}\big({}^\varphi\mathcal{T}/{}^\varphi_\Theta\mathcal{T}\big) = H^1\big(F, \widehat{{}^\varphi\mathcal{T}/{}^\varphi_\Theta\mathcal{T}}\big) = 0$.

Second cas: le cas général: La théorie de Bruhat–Tits indique que G/K admet un sous-groupe parahorique $\mathfrak{G}/O$ qui est un schéma en groupes semi-simples simplement connexe. On note $H/F = \overline{\mathfrak{G}}/F$, de forme quasi-déployée H^{qd}. Il existe un cocycle $z \in Z^1(F, H^{qd}_{ad})$ tel que $H \approx_z H^{qd}$. On note F'/F le corps de fonctions du torseur associé à z, qui est une extension séparable de F puisque $\widetilde{F}' = \widetilde{F} \otimes_F F' \approx \widetilde{F}(H^{qd})$. D'après la théorie des anneaux de Cohen, il existe une extension non-ramifiée d'anneaux complets $O \hookrightarrow O'$ de corps des fonctions K' induisant $F \to F'$ sur les corps résiduels. Le groupe $\mathfrak{G}_{O'}$ est quasi-déployé et ainsi $CH^2(\mathfrak{P} \times_O O') = 0$. On considère alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{Pic}(M) & \xrightarrow{i_*} & CH^2(\mathfrak{P}) & \to & 0 \\
\Vert & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & \mathrm{Pic}(M_{F'}) & \xrightarrow{i_*} & CH^2(\mathfrak{P} \times_O O') = 0. & &
\end{array}$$

Il reste à voir que le morphisme $\mathrm{Pic}(M) \to \mathrm{Pic}(M_{F'})$ est injectif. Comme $\widetilde{F}'/\widetilde{F} \approx \widetilde{F}(H^{qd})/\widetilde{F}$, on a une injection $\mathrm{Pic}(M_{\widetilde{F}}) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(M_{\widetilde{F}'})$ et on conclut par une chasse au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & H^1(\mathcal{G}, \widehat{M}) & \to & \mathrm{Pic}(M) & \to & \mathrm{Pic}(M_{\widetilde{F}}) \\
 & & \Vert & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & H^1(\mathcal{G}, \widehat{M}) & \to & \mathrm{Pic}(M_{F'}) & \to & \mathrm{Pic}(M_{\widetilde{F}'}).
\end{array}$$

□

On peut énoncer maintenant le résultat principal de cette section figurant sous une forme conjecturale dans [Se2], à savoir la relation entre le résidu de l'invariant de Rost pour G_K et la cohomologie galoisienne des fibres spéciales des sous-groupes de Bruhat–Tits.

THÉORÈME 4. *Soit G/K un groupe simplement connexe absolument presque K-simple, déployé par $\widetilde{K}$. Soit $\mathfrak{P}/\operatorname{Spec}(O)$ un sous-groupe parahorique de G. On note $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} \times_O F$ la fibre fermée, et $M/F = \overline{\mathfrak{P}}_{réd}$. Soit*

$$1 \to \mathbb{G}_m \to M' \to M \to 1$$

la suite exacte de groupes algébriques associée par le théorème 3' à l'image de $1 \in \mathbb{Z}$ dans $\operatorname{Pic}(M)$. Cette suite exacte donne lieu à une application de bord $\delta\colon\ H^1(F, M) \to Br(F)$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\mathcal{G}, G(\widetilde{K})) & \xrightarrow{r_K} & H^3_{nr}(K) \\
\uparrow & & \\
H^1(O, \mathfrak{P}) & & \\
\downarrow\wr & & \Big\downarrow \partial_K \\
H^1(\mathcal{G}, \overline{\mathfrak{P}}(\widetilde{F})) & & \\
\wr\downarrow & & \\
H^1(F, M) & \xrightarrow{\delta} & Br(F)
\end{array}$$

est commutatif, à une diagonale de signes près.

Remarque 6. La flèche de résidu $\partial_K : H^3_{nr}(K) \to Br(F)$ est définie au §1.2; les signes peuvent être précisés avec le Lemme 3 (§1.3).

Démonstration. Il est évidemment loisible de supposer F infini. Suivant les Lemmes 3.a et 5, il suffit de calculer le composé

$$H^1\big(\mathcal{G}, G(\widetilde{K})\big) \overset{\rho_K^{\widetilde{K}}}{\to} H^2\big(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{K})\big) \overset{\partial_{BT}}{\to} Br(F).$$

Le radical unipotent de $\overline{\mathfrak{P}}$ est déployé. Ainsi, $\operatorname{Pic}(M) = \operatorname{Pic}(\overline{\mathfrak{P}})$ et $H^1(F, \overline{\mathfrak{P}}) \overset{\sim}{\longrightarrow} H^1(F, M)$ (cf. [Sa], Lemme 1.13). On peut donc travailler avec $\overline{\mathfrak{P}}$ au lieu de M. Ainsi, on considère la suite exacte associée au générateur canonique de $\operatorname{Pic}(\overline{\mathfrak{P}})$

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \overline{\mathfrak{P}}^u \to \overline{\mathfrak{P}} \to 1,$$

où l'on prend les $\widetilde{F}$-points

$$1 \to \widetilde{F}^\times \to \overline{\mathfrak{P}}^u(\widetilde{F}) \to \overline{\mathfrak{P}}(\widetilde{F}) \to 1.$$

Par ailleurs, si on pousse l'extension de Brylinski–Deligne à $\widetilde{F}^\times$ par le symbole de Bass–Tate, et si l'on restreint à $\mathfrak{P}(\widetilde{O})$, on obtient une extension

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K_2(\widetilde{K}) & \to & E_{\widetilde{K}} & \to & G(\widetilde{K}) & \to & 1 \\
 & & \partial_{BT}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & \widetilde{F}^\times & \to & \partial_{BT,*}\big(E_{\widetilde{K}}\big) & \to & G(\widetilde{K}) & \to & 1 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \widetilde{F}^\times & \to & \mathcal{E} & \to & \mathfrak{P}(\widetilde{O}) & \to & 1.
\end{array}$$

Utilisant ici la densité de $\overline{\mathfrak{P}}(F)$ dans $\overline{\mathfrak{P}}$ et le fait que l'extension $1 \to \mathbb{G}_m \to \overline{\mathfrak{P}}^u \to \overline{\mathfrak{P}} \to 1$ représente l'image du générateur de $H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2)$ par le résidu $\partial : H^1_{\mathrm{Zar}}(G_K, \mathcal{K}_2) \to \mathrm{Pic}(\mathfrak{P})$, on a selon la Proposition 5.2.4 de [BD] un diagramme commutatif d'extensions

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \widetilde{F}^\times & \to & \mathcal{E} & \to & \mathfrak{P}(\widetilde{O}) & \to & 1 \\
 & & \| & & \phi\downarrow & & sp\downarrow & & \\
0 & \to & \widetilde{F}^\times & \to & \mathfrak{P}^u(\widetilde{F}) & \to & \mathfrak{P}(\widetilde{F}) & \to & 1,
\end{array}$$

où le morphisme ϕ est choisi $\mathcal{G}$-équivariant. Ainsi, le morphisme ϕ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\mathcal{G}, G(\widetilde{K})) & \xrightarrow{\rho_K^{\widetilde{K}}} & H^2(\mathcal{G}, K_2(\widetilde{K})) \\
\uparrow & & \\
H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{P}(\widetilde{O})) & & \partial_K\uparrow \\
\downarrow\wr & & \\
H^1(\mathcal{G}, \overline{\mathfrak{P}}(\widetilde{F})) & \xrightarrow{\delta} & Br(F)
\end{array}$$

4.3. NON TRIVIALITÉ DES INVARIANTS DE ROST

Une application du théorème précédent est de donner une autre démonstration de la non-trivialité des invariants de Rost. De façon précise, on a la

PROPOSITION 8 (Rost, cf. [EKLV], Cor. C2). *Soit $G/\mathbb{Z}$ un groupe de Chevalley semi-simple déployé simplement connexe et presque simple. Notons d_G l'indice de Dynkin de G (cf. [LS] § 2) et soit $F_0 = \mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{Q}$. Alors, il existe une extension de corps E/F_0 et une classe $\gamma \in H^1(E, G)$ dont l'invariant $r_E(\gamma) \in H^3(E)$ soit d'ordre d_G.*

Démonstration. Par un argument dû à Serre de spécialisation de la classe 'verselle' (cf. [Ti2], Prop. 8), il suffit de prouver la proposition pour les facteurs premiers de d_G, c'est à dire d'exhiber pour tout facteur l^r de d_G (l nombre premier) une extension E/F_0 et une classe de $H^1(E, G)$ dont l'invariant de Rost est d'ordre l^r.

Nous allons appliquer le théorème 4 au cas où F est un corps local non archimédien et $K = F((t))$. Dans ce cas, l'application de résidu $\partial_K : H^3_{nr}(K) \to Br(F)$ est un isomorphisme d'après le Théorème 3 de [Ka1]. Le groupe G étant déployé, nous reprenons les notations en vigueur au §4.1, en particulier on considère une partie $\Theta = \{\alpha\}$ réduite à une racine simple α du diagramme de Dynkin Δ de G. Le Théorème 4 produit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{G}, G(\widetilde{K})) & \xrightarrow{r_K} & H^3_{nr}(K) \\ \uparrow & & \partial_K \big\downarrow \wr \\ H^1(F, M_\alpha) & \xrightarrow{\delta} & Br(F) \quad \approx \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \end{array}$$

l'isomorphisme $Br(F) \approx \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ étant donné par la théorie du corps de classes local. Le groupe M_α est semi-simple et on considère la suite exacte $1 \to \mu_{c'_\alpha} \to DM^u_\alpha \to M_\alpha \to 1$ figurant en (2.1.9) où $c'_\alpha = n_\alpha = \alpha_0^\vee(\alpha)$ d'après (4.1.7). Puisque le groupe DM^u_α est simplement connexe d'après le Lemme 9, on sait d'après Kneser [Kn] que l'application de bord $\delta' : H^1(F, M_\alpha) \to H^2_{fppf}(F, \mu_{c'_\alpha})$ est bijective. Comme le groupe $H^2_{fppf}(F, \mu_{c'_\alpha})$ s'identifie à ${}_{c'_\alpha}Br(F) = \mathbb{Z}/c'_\alpha\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Im}(\delta') \subset \mathrm{Im}(\delta)$ et donc le diagramme ci-dessus produit un invariant de Rost d'ordre c'_α.

Vu la remarque introductive à la démonstration, en prenant $F = \mathbb{Q}_l$ (resp. $F = \mathbb{F}_p((u))$) et $E = K = F((t))$ si $F_0 = \mathbb{Q}$ (resp. $F_0 = \mathbb{F}_p$), il suffit de vérifier que

$$p.p.c.m.\big(c'_\alpha, \alpha \in \Delta\big) = d_G,$$

ce qui résulte de la table ci-dessous. □

Table des entiers c'_α et d_Δ: Soit Φ un système de racines simple de diagramme de Dynkin Δ. Les sommets de Δ étant numérotés selon les tables de [Bou], les valeurs des entiers $c'_i = c'_{\alpha_i}$ sont les suivantes.

A_l: C_l: $c'_i = 1$ pour $i = 1, \ldots, l$, $d_{A_l} = d_{C_l} = 1$;
B_l: $c'_1 = 1$, $c'_i = 2$ pour $i = 2, \ldots, l$, $d_{B_l} = 1$;
D_l: $c'_1 = c'_{l-1} = c'_l = 1$, $c'_i = 2$ pour $i = 1, \ldots, l$, $d_{D_l} = 1$;
E_6: $c'_1 = c'_6 = 1$, $c'_3 = c'_5 = 2$, $c'_4 = 3$; $d_{E_6} = 6$;
E_7: $c'_7 = 1$, $c'_1 = c'_2 = c'_6 = 2$, $c'_4 = 4$, $c'_3 = c'_5 = 3$; $d_{E_7} = 12$;
E_8: $c'_1 = c'_8 = 2$, $c'_3 = c'_6 = 4$, $c'_2 = c'_7 = 3$, $c'_4 = 6$, $c'_5 = 5$, $d_{E_8} = 60$;
F_4: $c'_4 = 1$, $c'_1 = c'_3 = 2$, $c'_2 = 3$, $d_{F_4} = 6$;
G_2: $c'_1 = 1$, $c'_2 = 2$, $d_{G_2} = 2$.

5. Applications

Nous nous proposons d'étudier sur quelques cas les conséquences du théorème précédent en omettant le cas de $Spin(q)$, i.e. l'invariant d'Arason qui a été étudié en caractéristique 2 par Kato [Ka1, Ka2] et Baeza [B]. En particulier, nous sommes intéressés par les cas de la conjecture II de Serre démontrés sur un corps parfait via les invariants de Rost; il s'agit des groupes de type ${}^1A_n$, G_2 et F_4.

CONJECTURE II ([Se1] §3.3 et [Se3] § 5). *Soit G/k un groupe semi-simple simplement connexe absolument presque k-simple défini sur un corps k. On note $S(G)$ l'ensemble de ses entiers de torsion. Pour tout nombre premier $p \in S(G)$, on suppose que* $\dim_p^{\mathrm{sep}}(k) \leqslant 2$. *Alors $H^1(k, G) = 1$.*

Si k est parfait, suivant Merkurjev–Suslin [Su1] et Bayer–Parimala [BP], cette conjecture est connue pour les groupes classiques, les groupes de type G_2 et de type F_4.

Le Théorème 2 ne permet pas de déduire la Conjecture II en caractéristique positive de celle en caractéristique nulle par un argument de relèvement puisque si l'on choisit un corps complet K pour une valuation discrète de corps résiduel k, on a $\dim_p(K) = \dim_p(F) + 1 \geqslant 3$. Toutefois, nous allons généraliser à la caractéristique positive les cas des groupes de type A_n^1, G_2 et F_4.

5.1. LE CAS DE SL_D, L'INVARIANT DE MERKURJEV–SUSLIN

Soit D/F une algèbre simple centrale de rang n^2. D'après le théorème de Wedderburn, on sait qu'il existe un corps gauche T/F de centre F, défini à isomorphisme près, tel que $D \approx M_r(T)$. On note $\mathrm{Ind}_F(D) = \sqrt{\dim_F(T)}$ l'indice de D et $\mathrm{Nrd} : D^\times \to F^\times$ l'application de norme réduite. Si $n \in F^\times$, il est connu que le cup-produit $H^1(F, \mu_n) \approx F^\times/F^{\times n} \to H^3(F, \mu_n^{\otimes 2})$ par $[D] \in H^2(F, \mu_n)$ induit un homomorphisme

$$F^\times/\mathrm{Nrd}(D^\times) \longrightarrow H^3(F, \mu_n^{\otimes 2})$$

Interprétant $H^1(F, SL_D) = F^\times/\mathrm{Nrd}(D^\times)$, on sait que cet invariant est un invariant de Rost et qu'il a donc un analogue sauvage.

THÉORÈME 5 [Su1]. (a) *Soit l un nombre premier distinct de la caractéristique de F. On suppose que F contient une racine primitive l-ième de l'unité ζ. Soient $a, b \in F^\times$. On note $A_\zeta(a, b)_F$ l'algèbre simple centrale définie par les relations suivantes $X^l = a$, $Y^l = b$, $XY = \zeta YX$. Pour tout $c \in F^\times$, il y a équivalence entre les assertions*

(1) $(a) \cup (b) \cup (c) = 0 \in H^3(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(2))$,
(2) $c \in \mathrm{Nrd}\big(A^\times\big)$.

(b) *Si D/F est une algèbre simple centrale d'indice n sans facteurs carrés avec $n \in F^\times$, le morphisme*

$$r_F\colon\ F^\times/\mathrm{Nrd}(D^\times) \longrightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$$

est injectif. □

Nous allons donner un analogue en caractéristique positive à ce résultat.

THÉORÈME 6. *Supposons* $\mathrm{car}(F) = p > 0$.

(a) *Soient* $a \in F$, $b \in F^\times$. *On note* $D = [a, b)_F$ *l'algèbre simple centrale définie par les relations suivantes* $X^p - X = a$, $Y^p = b$, $YXY^{-1} = X + 1$. *Pour tout* $c \in F^\times$, *il y a équivalence entre les assertions*

(1) $[a.db/b \wedge dc/c] = 0 \in H^3(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(2))$,
(2) $c \in \mathrm{Nrd}\big(D^\times\big)$.

(b) *Si* D/F *est une algèbre simple centrale d'indice* n *sans facteurs carrés, le morphisme*

$$r_F\colon\ F^\times/\mathrm{Nrd}(D^\times) \longrightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(2))$$

est injectif.

Démonstration. La seconde assertion résulte immédiatement du théorème principal et du théorème de Merkurjev–Suslin ci-dessus (b). Montrons (a). Soit O un anneau complet pour une valuation discrète (de rang 1) de corps résiduel F et de corps des fractions K de caractéristique nulle. On note $\overline{a}$ et $\overline{b}$ les éléments a et b, et on note b un relevé dans O. On sait que l'ensemble $H^1(F, PGL_p)$ classifie les F-algèbres simples centrales de degré p. Le lemme de Hensel montre que l'on a un isomorphisme $H^1(O, PGL_p) \xrightarrow{\sim} H^1(F, PGL_p)$ et ainsi on peut relever D/F en une O-algèbre d'Azumaya $\mathfrak{D}$ dont la fibre générique a pour classe dans ${}_pBr(K)$ l'élément $\chi \cup (b)$ où $\chi = [a] \in H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \approx H^1(O, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Soit $\overline{c} \in F^\times/\mathrm{Nrd}(D^\times)$ et c un relevé de $\overline{c}$ dans O. Le théorème principal appliqué au O-schéma en groupes $\mathfrak{G}/F = SL(\mathfrak{D})$ donne

$$i_F^K(r_F(\overline{c})) = r_K(c) = \chi \cup (b) \cup (c) \in H^3_p(K),$$
$$\text{donc}\quad r_F(c) = [a.db/b \wedge dc/c] \in H^3_p(F). \qquad \square$$

THÉORÈME 7. *Soit* F *un corps et* l *un nombre premier. Il y a équivalence entre les assertions*

(a) $\dim_l^{\mathrm{sep}}(F) \leqslant 2$.
(b) *Pour toute extension séparable finie* E/F *et pour toute algèbre simple centrale* l*-primaire* D/E, *la norme réduite* $\mathrm{Nrd} : D^\times \to E^\times$ *est surjective.*

Ceci montre que la conjecture II vaut pour les groupes de type ${}^1A_n$. Si X/F est une variété, on définit le groupe de normes *séparable* de X, noté $N_X^{\mathrm{sep}}(F)$ comme le sous-groupe de $F^\times$ engendré par les $N_{F'/F}(F'^\times)$ pour les extensions séparables F'/F satisfaisant $X(F') \neq \emptyset$. On a une inclusion évidente $N_X^{\mathrm{sep}}(F) \subset N_X(F)$, où $N_X(F)$ est le groupe de normes usuel. Si L/F est une extension séparable finie, on a $N_{L/k}\big(N_X^{\mathrm{sep}}(L)\big) \subset N_X^{\mathrm{sep}}(F)$.

LEMME 11. *Soit D/F une algèbre simple centrale à divisions et X/F la variété de Severi–Brauer associée à D. Alors le groupe* $\mathrm{Nrd}(D^\times)$ *est engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ où L est un sous–corps maximal de D tel que l'extension L/F soit séparable. En particulier, on a*

$$\mathrm{Nrd}(D^\times) = N_X^{\mathrm{sep}}(F) = N_X(F).$$

Démonstration. Tout d'abord, observons que l'on peut supposer k infini et qu'il est bien connu que $\mathrm{Nrd}(D^\times) = N_X(F)$. On considère le F-groupe réductif $G = GL(D)$, et on note $U \subset G$ l'ouvert de Zariski des éléments semi-simples réguliers de G. Comme G est réductif, on sait que $U(F)$ est Zariski-dense dans G ([SGA3], exp. XIV, cor. 6.5). Si $a \in U(F) \subset D^\times$, l'extension $F(a)/F$ est séparable et est un sous-corps maximal de D, donc $\mathrm{Nrd}(a) = N_{F(a)/F}(a) \in N_X^{\mathrm{sep}}(F)$. Or $G(F) = U(F).U(F)$, donc $\mathrm{Nrd}(D^\times)$ est engendré par les $N_{L/k}(L^\times)$ où L est un sous-corps maximal de D tel que l'extension L/F soit séparable. □

Démonstration du théorème 7. On traite uniquement le cas $l = p = \mathrm{car}(F)$, en suivant pas à pas la preuve du cas $l \neq p$ [Su1].

(b) $\Longrightarrow$ (a): Il suffit de montrer que $H_p^3(F) = 0$. Ce groupe est engendré par les $a.\mathrm{d}b/b \wedge \mathrm{d}c/c$ avec $a, b, c \in F^\times$ et le théorème ci-dessus (a) montre immédiatement que $H_p^3(F) = 0$.

(a) $\Longrightarrow$ (b): Comme (a) vaut par définition pour toute extension E/F, on peut supposer $E = F$. Soit D/F une algèbre simple centrale p-primaire et X/F la variété de Severi–Brauer associée à D. On veut montrer $\mathrm{Nrd}(D^\times) = F^\times$, ce qui revient à voir que $N_X^{\mathrm{sep}}(F) = F^\times$.

Cas $exp(D) = p$. Comme $H_p^2(F) =_p Br(F)$, D est stablement isomorphe à un produit tensoriel $[a_1, b_1) \otimes_F [a_2, b_2) \cdots \otimes_F [a_m, b_m)$. On note X_i/F la variété de Severi–Brauer de l'algèbre $D_i = [a_i, b_i)$. On raisonne par récurrence sur m. Si $m = 1$, comme $H_p^3(F) = 0$, le théorème précédent montre que $F^\times = \mathrm{Nrd}(D^\times)$. Supposons $m \geqslant 2$ et soit $x \in F^\times$. Vu l'égalité $\mathrm{Nrd}(D_m^\times) = F^\times$, le Lemme 11 permet, sans perte de généralité, de supposer qu'il existe un sous–corps maximal $L \subset D_m$ tel que l'extension L/F soit séparable et tel que $x = N_{L/F}(t) \in N_{L/F}(L^\times)$. Appliquant l'hypothèse de récurrence à la L-algèbre $D_1 \otimes_F D_2 \cdots \otimes_F D_{m-1} \otimes_F L$, on trouve

$$\begin{aligned} z &\in [a_1, b_1) \otimes_F [a_2, b_2) \cdots \otimes_F [a_{m-1}, b_{m-1}) \otimes L \\ &\subset [a_1, b_1) \otimes_F [a_2, b_2) \cdots \otimes_F [a_m, b_m), \end{aligned}$$

avec $\mathrm{Nrd}_{D_L}(z) = t$ et $\mathrm{Nrd}_D(z) = x$.

Cas général. On procède par induction sur $exp(D) = p^r$. Soit $x \in F^\times$. On applique l'hypothèse de récurrence à l'algèbre $D^{\otimes p}$ qui est d'exposant p^{r-1}. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe une extension séparable L/F déployant $D^{\otimes p}$ telle que $x \in N_{L/F}(L^\times)$. Comme D_L est d'exposant 1 ou p, on a $L^\times = \mathrm{Nrd}(D_L^\times)$, d'où $x \in N_{L/F}(L^\times) \subset N_{L/F}\big(\mathrm{Nrd}(D_L^\times)\big) \subset \mathrm{Nrd}(D^\times)$. □

5.2. LE CAS DE G_2

Notons $G_2/\mathbb{Z}$ le groupe de Chevalley de type G_2.

THÉORÈME 8 (Serre [Se3], th. 11). *L'invariant de Rost* $r_F : H^1(F, G_2) \xrightarrow{\sim} H^3_{2,\mathrm{dec}}(F)$ *induit un isomorphisme (loc. cit., th. 11)*

$$r_F : H^1(F, G_2) \xrightarrow{\sim} H^3_{2,\mathrm{dec}}(F),$$

où $H^3_{2,\mathrm{dec}}(F)$ *désigne l'ensemble des éléments décomposables de* $H^3_2(F)$*, i.e. s'écrivant* $[x\mathrm{d}y/y]$ *avec* $y \in F^\times$.

Cet ensemble $H^3_{2,\mathrm{dec}}(F)$ classifie également les 3-formes de Pfister sur F. Nous nous proposons de donner une preuve de ce théorème pour la caractéristique 2 différente de la preuve originale.

Démonstration du théorème 8 en caractéristique 2 *à partir de la caractéristique nulle.* Soit F un corps de caractéristique 2. On va appliquer bien sûr le théorème principal. Soit O un anneau complet pour une valuation discrète (de rang 1), de caractéristique nulle, de corps résiduel F, dont on note K le corps des fractions. On note $\widetilde{K}$ une clôture non ramifiée maximale de K, de groupe de Galois $\mathcal{G}$. Appliquant le Théorème 4, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\widetilde{K}/K, G_2) & \xrightarrow{r_K} & H^3_{2,nr}(K) \\ \ell \uparrow & & \\ H^1(O, G_2) & & \uparrow i^K_F \\ \wr \downarrow & & \\ H^1(F, G_2) & \xrightarrow{r_F} & H^3_2(F). \end{array}$$

Or l'invariant r_K induit un isomorphisme $H^1(\widetilde{K}/K, G_2) \xrightarrow{\sim} H^3_{2,\mathrm{dec}}(K) \cap H^3_{2,nr}(K)$. Un petit exercice sur les symboles montre que $H^3_{2,\mathrm{dec}}(K) \cap i^K_F\big(H^3_2(F)\big) = H^3_{2,\mathrm{dec}}(F)$ et ainsi l'invariant r_F produit une injection $r_F : H^1(F, G_2) \hookrightarrow H^3_{2,\mathrm{dec}}(F)$. Il reste à voir que $r_F : H^1(F, G_2) \to H^3_{2,\mathrm{dec}}(F)$ est surjectif. Pour cela, on va déterminer l'ensemble $H^1(\mathcal{G}, G_2(\widetilde{K}))$ avec la décomposition de Bruhat–Tits ([BrT3], Cor. 3.15 p. 694). On note B_0/F un sous-groupe de Borel de G_2/F et $\mathbf{B}/\operatorname{Spec}(O)$ le sous-groupe d'Iwahori $\mathbf{B}(O) = sp^{-1}(B_0(F))$ où $sp : G_2(O) \to G_2(F)$ désigne la spécialisation. Le groupe $G_{2,K}$ admet deux sous-groupes parahoriques $\mathbf{P}/\operatorname{Spec}(O)$ et G_2/O contenant $\mathbf{B}/\operatorname{Spec}(O)$. La fibre spéciale $\overline{\mathbf{P}}/F$ de $\mathbf{P}$ est isomorphe à PGL_2. Ainsi, la décomposition de Bruhat–Tits s'écrit

$$H^1(F, G_2)_{an} \bigsqcup H^1(F, PGL_2)_{an} \bigsqcup H^1(F, B_0) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{G}, G_2(\widetilde{K})).$$

(Si H/F est un groupe réductif, on note $H^1(F, H)_{an}$ l'ensemble des classes $[z]$ anisotropes, i.e. telles que le groupe ${}_zH$ soit anisotrope). Un groupe de type G_2 est soit déployé, soit anisotrope, donc on a $H^1(F,G_2) = H^1(F,G_2)_{an} \sqcup H^1(F,B_0)$. Or d'après le Théorème 4, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathcal{G}, G_2(\widetilde{K})) \arrow[d, "r_K"'] & H^1(\mathcal{G}, \mathbf{P}(\widetilde{O})) \arrow[l] \arrow[r, "\sim"] & H^1(F, PGL_2) \arrow[d, "\delta"'] \\ H^3_{nr}(K) \arrow[rr, "\partial_K"] & & Br(F). \end{tikzcd}$$

Puisque l'application $\delta\colon\ H^1(F,PGL_2) \to Br(F)$ est injective, les deux diagrammes ci-dessus montrent que $H^1(F,G_2)$ s'identifie au noyau de l'application composée $H^1(\mathcal{G}, G_2(\widetilde{K})) \to H^3_{nr}(K) \to Br(F)$. Ainsi, l'application r_K produit une bijection

$$H^1(F,G_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(H^3_{nr}(K) \cap H^3_{\mathrm{dec}}(K) \xrightarrow{\partial} Br(F)),$$

d'où une bijection

$$H^1(F,G_2) \xrightarrow{\sim} i_F^K\big(H^3_2(F)\big) \cap H^3_{\mathrm{dec}}(K) = H^3_{2,\mathrm{dec}}(F). \qquad \square$$

5.3. LE CAS DE F_4

On note $F_4/\mathbb{Z}$ le groupe de Chevalley de type F_4 sur F. L'invariant de Rost se décompose en deux invariants

$$f_3\colon\ H^1(F,F_4) \longrightarrow H^3(F,(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})(2)) \quad \text{et}$$
$$g_3\colon\ H^1(F,F_4) \longrightarrow H^3(F,(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})(2)).$$

On sait, en caractéristique nulle, que le noyau de $r_F\,:\, H^1(F,F_4) \to H^3(F,\mu_6^{\otimes 2})$ est trivial ([Se3], § 9.4,). Le théorème suivant résulte donc du théorème principal.

THÉORÈME 9. *Soit F un corps. Soit $\alpha \in H^1(F,F_4)$. Si $f_3(\alpha) = 0$ et si $g_3(\alpha) = 0$, alors $\alpha = 1$.* $\square$

En caractéristique 3, ce résultat peut être déduit aussi du Théorème 7 de [PR] par le même raisonnement qu'en caractéristique nulle. La conjecture II pour les groupes de type F_4 vaut donc aussi en caractéristiques 2 et 3.

5.4. LE CAS DE E_8

Nous allons donner une application du théorème principal aux groupes de type E_8, généralisant un résultat de Chernousov [Ch] à la caractéristique positive. Rappelons ce résultat. On note $E_8/\mathbb{Z}$ le groupe de Chevalley de type E_8. Si $\mathrm{car}(F) \neq 2,3,5$, le noyau de $r_{5,F}\colon\ H^1(F,E_8) \to H^3(F,\mu_5^{\otimes 2})$ est constitué des classes $\gamma \in H^1(F,E_8)$ tuées par une extension de degré premier à 5.

THÉORÈME 10. *Soit $\gamma \in H^1(F,E_8)$. Alors il y a équivalence entre les assertions*

(1) $r_{5,F}(\gamma) = 0 \in H^3(F,\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}(2))$,

(2) *Il existe une extension E/F de degré premier à* 5 *satisfaisant $\gamma_E = 1$.*

Démonstration. Si F est de caractéristique distincte de $2, 3$ et 5, c'est le résultat de Chernousov. Sinon, on choisit un anneau complet O pour une valuation discrète (de rang 1), de corps résiduel F, et de corps des fractions K de caractéristique nulle. Un argument de transfert montre $(2) \Longrightarrow (1)$. Réciproquement, soit $\gamma \in H^1(F, E_8)$ satisfaisant $r_{5,F}(\gamma) = 0$. On relève γ en une classe $\alpha \in H^1(O, E_8)$ et on note β son image dans $H^1(K, E_8)$. Le théorème principal montre que $r_{5,K}(\beta) = 0$. Ainsi, il existe une extension finie K'/K de degré premier à 5 tuant γ. Notons O' l'anneau de valuation de O et F' son corps résiduel. Alors comme $H^1(O', E_8) \hookrightarrow H^1(K', E_8)$, on a $\alpha_{O'} = 1 \in H^1(O', E_8)$ et $\gamma_{F'} = 1 \in H^1(F', E_8)$. Or $[F' : F]$ divise $[K' : K]$ donc γ est tuée par une extension de degré premier à 5. $\square$

Remerciements

Ce travail, aussi bien pour son origine que pour sa réalisation, a bénéficié d'utiles discussions avec Jean–Louis Colliot–Thélène et Bruno Kahn. Je les remercie vivement tous les deux.

References

[B] Baeza, R: *Quadratic Forms and Semilocal Rings*, Lecture Notes in Math. **65**, Springer, New York, 1978.

[Bg] Barge, J.: Une définition cohomologique de l'invariant d'Arason, Prépublication de l'Ecole Polytechnique, 1996.

[BT] Bass H. and Tate, J.: The Milnor ring of a global field, in: *Algebraic K-theory II*, Lecture Notes in Math. 342, Springer, New York, 1973.

[BP] Bayer, E. and Parimala, R.: Galois cohomology of the classical groups over fields of cohomological dimension ≤ 2, *Invent. Math.* **122** (1995), 195–229.

[Bl] Bloch, S.: A note on Gersten's conjecture in the mixed characteristic case, *Contemp. Math.* **55**(I), 75–78.

[BO] Bloch, S. and Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **7** (1974), 181–202.

[BK] Bloch, S. and Kato, K.: p-adic étale cohomology, *Pub. Math. IHES* **66** (1986), 107–152.

[BoT] Borel, A. et Tits, J.: Groupes réductifs, *Pub. Math. IHES* **27** (1965), 55–150.

[Bou] Bourbaki, N.: *Groupes et Algèbres de Lie*, Ch. 4, 5 et 6, Masson, Paris, 1981.

[BrT1] Bruhat, F. et Tits, J.: Groups algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. on Local Fields* (Driebergen, 1966), Springer, New York, 1967, pp. 23–36.

[BrT2] Bruhat, F. et Tits, J.: Groupes réductifs sur un corps local II, *Publ. Math. IHES* **60** (1984).

[BD] Brylinski, J.-L. and Deligne, P.: Central extensions by K_2, preliminary version, 1987.

[Ch] Chernousov, V.: Remark on the Serre mod-5 invariant for groups of type E_8, *Math. Zametki* **56**(1) (1994), 116–121, traduction anglaise: *Math. Notes* **56**(1) (1994), 730–733.

[C] Chevalley, C.: Sur certains groupes simples, *Tohoku Math. J.* **7** (1955), 14–66.

[CT1] Colliot-Thélène, J.-L.: Hilbert 90 for K_2, with application to the Chow group of rational surfaces, *Invent. Math.* **35** (1983), 1–20.

[CTR1] Colliot-Thélène, J.-L. and Raskind, W.: $\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985), 165–199.

[CTS] Colliot-Thélène, J.-L. et Sansuc, J.-J.: Descente sur les variétés rationelles II, *Duke Math. J.* **54** (1987), 375–492.

[CTR2] Colliot-Thélène, J.-L. and Raskind, W.: Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres: un théorème de finitude pour la torsion, *Invent. Math.* **105** (1991), 221–245.

[CT2] Colliot-Thélène, J.-L.: Cohomologie galoisienne des corps valués discrets henséliens, d'après K. Kato et S. Bloch, à paraître dans algebraic K-Theory and its applications, Dans: *Proc. Workshop and Symposium*, ICTP, Trieste, Italia, 1–19 Septembre 1997, H. Bass, A. O. Kuku and C. Pedrini (eds), World Scientific, Singapore, 1997.

[CTHK] Colliot-Thélène, J.-L., Hoobler, R. and Kahn, B.: The Bloch–Ogus–Gabber Theorem, In: Snaith (ed.) *Algebraic K-theory* (*Toronto, 1996*), Field Inst. Commun. **16**, *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1997.

[EKLV] Esnault, H., Kahn, B., Levine, M. and Viehweg, E.: The Arason invariant and mod 2 algebraic cycles, *J. Amer. Math. Soc.* **11**(1) (1998), 73–118.

[FI] Fossum, R. and Inversen, B.: On Picard groups of algebraic fibre spaces, *J. Pure Appl. Algebra* **3** (1973), 269–280.

[GD] Grothendieck, A. et Dieudonne, J.: Eléménts de géométrie algébrique IV, *Pub. Math. IHES.* **20** (1964); **24** (1965); **28** (1966); **32** (1967).

[I] Illusie, L.: Complexe de de Rham–Witt et cohomologie cristalline, *Ann. Sci. ENS* **12** (1979), 501–661.

[Iz] Izhboldin, O.: On p-torsion in K_*^M of fields, *Adv. Soviet Math.* **4** (1991), 129–144.

[K1] Kahn, B.: Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres, *K-theory* **7** (1993), 55–100.

[K2] Kahn, B.: Applications of weight-two motivic cohomology, *Documenta Math.* **1** (1996), 395–416.

[Ka1] Kato, K.: *Galois Cohomology of Complete Discrete Valuation Fields*, Lecture Notes in Math. 967, Springer, New York, 1982, pp. 215–238.

[Ka2] Kato, K.: Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor K-theory in characteristic two, *Invent Math*. **66** (1982), 493–510.

[Kn] Knesser, M.: Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern, I, *Math. Z.* **88** (1965), 40–47; (II) *Math. Z.* **89** (1965), 250–272.

[LS] Laszlo, Y. and Sorger, C.: The line bundles on the moduli of parabolic G-bundles over curves and their sections, *Ann. Ecole. Norm. Sup.* **30** (1997), 499–526.

[L1] Lichtenbaum, S.: The construction of weight-two arithmetic cohomology, *Invent Math.* **88** (1987), 183–215.

[L2] Lichtenbaum, S.: New results on weight-two motivic cohomology, *Grothendieck Festschrift* **3**, 35–55, Progress in Math. 88, Birkhäuser, Boston, 1990.

[MS1] Merkurjev, A. S. et Suslin, A. A.: $\mathcal{K}$-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et l'homomorphisme de norme résiduelle (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **46** (1982), 1011–1046; trad. anglaise: *Math. USSR Izv.* **21** (1983), 307–340.

[MS2] Merkurjev, A. S. et Suslin, A. A.: Le groupe K_3 d'un corps (en russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR* **54** (1990), 339–356; trad. anglaise: *Math. USSR Izv.* **36** (1990), 541–565.

[M] Milne, J. S.: *Étale Cohomology*, Princeton, Univ. Press, 1980.

[P] Panin, I. A.: Splitting principle and the K-theory of semisimple simply connected algebraic groups, *St Petersburg Math. J.* **10** (1999), 69–101.

[PR] Petersson, H. P. and Racine, M. L.: The Serre–Rost invariant of Albert algebras in characteristic three, *Indag. Math. NS.* **8** (1997), 543–548.

[PrR] Prasad, G. and Raghunathan, M. S.: Topological central extensions of semi-simple groups over local fields I, *An. of Math.* **119** (1984), 143–201.

[Q] Quillen, D.: *Higher Algebraic K-Theory I*, Lecture Notes in Math. 341, Springer, New York, 1973, pp. 83–147, 1973.

[Ro1] Rost, M.: A mod 3-invariant for exceptional Jordan algebras, *C.R. Acad. Sci. Paris* **315** (1991), 823–827.

[Ro2] Rost, M.: Cohomological invariants, en préparation.

[Ro3] Rost, M.: Chow groups with coefficients, *Documenta Math.* **1** (1996), 319–393.

[Sa] Sansuc, J.-J.: Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques sur un corps de nombres, *J. Reine Angew. Math.* **327** (1981), 13–81.

[SGA3] *Seminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S.: 1963–1964*, Schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. 151–153, Springer, New York, 1970.

[Se2] Serre, J.-P.: Lettre à Rost du 3 décembre, 1992.

[Se3] Serre J.-P.: Cohomologie galoisienne: Progrès et problèmes, *Séminaire Bourbaki* **783** (1993–94), *Astérisque* **227** (1995).

[Se1] Serre, J.-P.: *Cohomologie galoisienne* 5^{ieme} édn, Lecture Notes in Math. 5, Springer-Verlag, 1994.

[Sh] Sherman, C.: Some theorems on the K-theory of coherent sheaves, *Comm. Algebra* **7** (1979), 1489–1508.

[Su1] Suslin, A. A.: Algebraic K-theory and the norm-residue homomorphism, *J. Soviet Math.* **30** (1985), 2556–2611.

[Su2] Suslin, A. A.: Torsion in K_2 of fields, *K-Theory* **1** (1987), 5–29.

[T] Tate, J.: Relations between K_2 and cohomology, *Invent Math.* **36** (1976), 257–274.

[Ti1] Tits, J.: Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups, *J. Algebra* **131** (1990), 648–677.

[Ti2] Tits, J.: *Résumé des cours au Collège de France 1991–92*, Annuaire du Collège de France.