

## SUR LA CLASSIFICATION DES SCHÉMAS EN GROUPES SEMI-SIMPLES

*par*

Philippe Gille

---

**Résumé.** – Nous abordons la classification des schémas en groupes semi-simples du point de vue cohomologique et immobilier à la Bruhat-Tits afin de généraliser les techniques galoisiennes sur un corps à des anneaux plus généraux. Cela amène à étudier la notion de réductibilité pour les schémas en groupes réductifs en lien avec les sous-groupes à un paramètre. De plus, on travaille avec des schémas en groupes affines lisses  $G$  non nécessairement connexes mais à composante neutre réductive, ce qui nous conduit à étudier les normalisateurs de sous-groupes paraboliques de  $G^0$  et leurs espaces principaux homogènes. Enfin, l'exposé contient en appendice des analogies pour les schémas en groupes de Weyl et les données radicielles tordues.

**Abstract (On the classification of semisimple group schemes).** – We deal with the classification of semisimple group schemes via the Bruhat-Tits' presentation of non-abelian cohomology. The goal is to generalize Galois techniques to more general rings. It leads us to investigate the concept of reducibility for reductive group schemes with special attention to one parameter subgroups. It requires also the study of parabolic subgroups and their normalizers of a not-necessarily connected affine smooth group scheme  $G$  whose neutral component  $G^0$  is reductive. The text discusses in an appendix also certain analogies for Weyl group schemes and twisted root data.

### 1. Introduction

Soit  $k$  un corps. La théorie de Borel-Tits [3, 36] produit une classification des groupes algébriques semi-simples sur le corps  $k$ , à partir d'invariants discrets (le type absolu, l'indice de Tits) et d'invariants « arithmétiques » qui sont des classes de cohomologie galoisienne du corps  $k$ .

---

*Classification mathématique par sujets (2010).* – 14L15, 14L30.

*Mots clefs.* – Schémas en groupes, sous-groupes paraboliques, isotropie, réductibilité, données radicielles.

L'auteur a bénéficié du soutien du projet IDEI PCE\_2012-4-364 du Ministère de l'Éducation Nationale de Roumanie CNCS-UEFISCDI.

Donnons un exemple pour illustrer ce propos. Si  $(q, V)$  désigne un espace quadratique non dégénéré ( $k$  de caractéristique impaire pour simplifier) avec  $V$  de dimension  $2n$ , le groupe spécial orthogonal  $G = \mathrm{SO}(q)$  admet comme premier invariant son type absolu, i.e.  $D_n$ . Un second invariant est le discriminant de  $q$ , c'est une classe de  $k^\times / (k^\times)^2$  qui correspond à la  $*$ -action du groupe de Galois sur le diagramme de Dynkin  $D_n$  et qui détermine la forme quasi-déployée de  $G$ . Le théorème de Witt est la décomposition (essentiellement unique)  $q = q_0 \perp \mathbb{H}^{\nu(q)}$ , où  $q_0$  est une forme quadratique anisotrope,  $\mathbb{H}$  le plan hyperbolique et  $\nu(q)$  l'indice de Witt de  $q$ . Par exemple, dans le cas d'une forme interne (i.e. de discriminant trivial), l'indice de Tits de  $G$  est alors

$$({}^1D_{n,\nu(q)}^{(1)}) \quad \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_{\nu(q)} & & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \begin{array}{l} \circ \quad \alpha_{n-1} \\ \circ \quad \alpha_n \end{array} \end{array}$$

Cela signifie que  $G$  admet un sous-groupe parabolique minimal de type  $D_n \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu(q)}\}$ ; pour les autres cas, voir les tables de [36]. La forme quadratique  $q_0$  donne lieu au  $k$ -groupe anisotrope  $\mathrm{SO}(q_0)$ , qui est un sous-groupe de Levi d'un tel parabolique minimal et qui est appelée le noyau anisotrope de  $G$ . La décomposition de Witt-Tits donne la forme générale de cette construction.

Soit  $S$  un schéma. Notre objectif principal est de revenir sur le §XXVI de [13], portant sur les sous-schémas en groupes paraboliques, en tentant de se rapprocher du point de vue de Borel-Tits. Nous abordons ainsi la classification des groupes semi-simples avec la cohomologie étale et revenons sur la réductibilité principalement dans le cas d'une base semi-locale connexe pour laquelle on dispose du théorème de conjugaison pour les sous-groupes paraboliques minimaux de Demazure (XXVI.5.2).

Cet objectif est atteint au §4 : pour un schéma semi-local connexe (non vide), on a une décomposition de Witt-Tits de l'ensemble de cohomologie étale  $H^1(S, \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G))$  classifiant les  $S$ -formes d'un  $S$ -schéma en groupes semi-simples  $G$ . Cette décomposition est semblable au cas des corps [36] et est formulée de façon analogue à la décomposition de Bruhat-Tits de la cohomologie galoisienne des groupes définis sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien [8].

Ceci demande des préparatifs, intéressants pour eux-mêmes. La classification des  $S$ -schémas en groupes semi-simples du point de vue de la cohomologie étale fait intervenir les schémas en groupes d'automorphismes  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ . Un tel schéma en groupes n'est en général pas à fibres connexes et il est commode d'étendre la théorie des schémas en groupes paraboliques pour des schémas en groupes lisses dont la composante neutre est réductive (§3).

La notion principale dans les décompositions de Witt-Tits est celle de *réductibilité*. Un  $S$ -schéma en groupes réductifs  $G$  est réductible s'il admet un couple  $(P, L)$  où  $P$  est un  $S$ -schéma en groupes paraboliques partout propres de  $G$  et  $L$  un sous-groupe de Levi de  $P$ . On étudie cette notion pour elle-même, notamment son comportement par extension centrale et son lien avec la notion d'isotropie.

On montre (sur  $S$  connexe ou affine) qu'un tel couple  $(P, L)$  provient par la construction de sous-groupes limites associés à un homomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow G$



(Th. 7.3.1) généralisant le cas des corps [34, §15.1]. En particulier, le sous-groupe de Levi  $L$  est le centralisateur de  $\lambda$ .

Passons en revue le plan de l'article. La section 2 est l'occasion de revenir sur des généralités pour la cohomologie non abélienne, en faisant un compromis entre les techniques galoisiennes omniprésentes en pratique et le cadre très général du livre de Giraud [17]. Dans la section 3, on revient sur les sous-groupes paraboliques d'un  $S$ -schéma en groupes réductifs  $G$  et sur leurs groupes de Levi. On s'intéresse notamment aux normalisateurs d'un sous-schéma en groupes paraboliques dans d'autres schémas en groupes, comme  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$ .

La décomposition de Witt-Tits est l'objet de la section 4 et on l'applique au cas du groupe des automorphismes d'un groupe de Chevalley au §5.

L'objet principal du §7 est la démonstration du résultat mentionné sur la description des couples  $(P, L)$  pour un  $S$ -schéma en groupes réductifs  $G$  avec des homomorphismes  $\mathbb{G}_m \rightarrow G$ . Ce développement requiert une étude de nature combinatoire de cohomologie des groupes faite en appendice (§9) ainsi que des rappels sur les données radicielles tordues (§6).

A la fin, on montre comment deux invariants classiques des groupes algébriques semi-simples ( $*$ -action, classe de Tits) se généralisent pour des schémas en groupes semi-simples sur une base arbitraire.

En appendice, on étudie la cohomologie des schémas en groupes de Weyl du point de vue précédent, c'est-à-dire « immobilier ». L'analogie groupes algébriques/groupes de Weyl et immeubles sphériques/complexes de Coxeter est en effet remarquable.

Les notations XXII.4.1, VI<sub>B</sub>.10.2, etc. renvoient au séminaire sur les schémas en groupes de Demazure-Grothendieck [13].

**Remerciements.** – En premier lieu, je remercie vivement Brian Conrad pour ses nombreuses précisions, améliorations et suggestions apportées au manuscrit (par exemple le §2.8, le lemme 4.4.1, la Définition 6.1.2.(2),...) qui contenaient en germe la caractérisation des couples  $(P, L)$ .

La démonstration des assertions (1) et (2) de la proposition 3.4.5 est due à Bas Edixhoven, je le remercie chaleureusement.

Je tiens à remercier aussi Vladimir Chernousov, Cyril Demarche, Cristian Gonzales-Aviles, Ting-Yu Lee, Arturo Pianzola, ainsi que les rapporteurs pour leurs commentaires bienvenus.

## 2. Préliminaires

Soit  $S$  un schéma.

### 2.1. Faisceaux principaux homogènes, produits contractés et cohomologie non-abélienne.

– Les quelques faits ci-dessous sont bien connus en cohomologie galoisienne (e.g. [33, §2.2, lemme 1]), on se propose de les généraliser pour la cohomologie fppf (i.e. plate) sur le schéma de base  $S$  en utilisant principalement le livre de Giraud [17].

On travaille avec des faisceaux d'ensembles et de groupes sur le grand site plat (i.e. fppf) de  $S$  pour lequel on renvoie à l'exposé [6, §1.2] et à [38, §2]. Les recouvrements pour la (pré)-topologie fppf sur la catégorie des  $S$ -schémas sont les familles de morphismes  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  tel quel le morphisme  $\bigsqcup_{i \in I} U_i \rightarrow U$  est fidèlement plat localement de présentation finie.

On note  $\underline{e}$  le  $S$ -faisceau singleton, c'est-à-dire défini par  $\underline{e}(T) = \{\bullet\}$  pour tout  $T \rightarrow S$ . C'est l'objet final de la catégorie des  $S$ -faisceaux fppf d'ensembles. De plus, si  $\underline{F}$  est un  $S$ -faisceau, on a une bijection naturelle  $\mathrm{Hom}_{S\text{-faisc}}(\underline{e}, \underline{F}) \xrightarrow{\sim} \underline{F}(S)$ . Dans un sens elle associe à un morphisme  $u : \underline{e} \rightarrow \underline{F}$  l'image du point par  $u_S : \underline{e}(S) \rightarrow \underline{F}(S)$ ; dans l'autre, elle associe à une section  $f \in \underline{F}(S)$  le morphisme constant associé à  $f$ ,  $\underline{e} \rightarrow \underline{F}$ , qui pour tout  $T$  au-dessus de  $S$  applique  $\underline{e}(S)$  sur l'image de  $f$  par la restriction  $\underline{F}(S) \rightarrow \underline{F}(T)$ .

Si  $\underline{E}, \underline{F}$  sont des  $S$ -faisceaux fppf d'ensembles, on note  $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{E}, \underline{F})$  le  $S$ -foncteur des homomorphismes de  $S$ -foncteurs de  $\underline{E}$  dans  $\underline{F}$  (I.7), c'est un  $S$ -faisceau fppf (IV.4.5.13). On définit le sous-objet  $\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{E}, \underline{F})$  de  $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{E}, \underline{F})$  par  $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{E}, \underline{F})(S') = \mathrm{Isom}(E_{S'}, F_{S'}) \subseteq \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{E}, \underline{F})(S')$ ; c'est un  $S$ -sous-faisceau. On note  $\underline{\mathrm{Aut}}(\underline{E}) = \underline{\mathrm{Isom}}(\underline{E}, \underline{E})$ , c'est un  $S$ -faisceau en groupes.

Si  $\underline{E}, \underline{F}$  ont des structures supplémentaires<sup>(1)</sup> (par exemple groupes, etc.), on peut considérer les sous-faisceaux  $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{E}, \underline{F})$  et  $\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{E}, \underline{F})$  qui préservent cette structure; dans le cas des groupes, on note  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(\underline{E}, \underline{F})$ .

Soit  $\underline{G}$  un  $S$ -faisceau fppf en groupes. On note  $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr}}(\underline{G}) \subseteq \underline{\mathrm{Aut}}(\underline{G})$  le  $S$ -faisceau fppf des automorphismes de groupes. L'action de conjugaison de  $\underline{G}$  sur lui-même définit un morphisme de  $S$ -faisceaux fppf

$$\mathrm{int} : \underline{G} \rightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr}}(\underline{G}).$$

Le noyau de  $\mathrm{int}$  est le  $S$ -faisceau centre  $\underline{\mathrm{Cent}}(\underline{G})$  de  $\underline{G}$  et le  $S$ -faisceau image de  $\mathrm{int}$  est un  $S$ -sous-faisceau distingué de  $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr}}(\underline{G})$  appelé le sous  $S$ -faisceau des automorphismes intérieurs. Le  $S$ -faisceau conoyau de  $\mathrm{int}$  est noté  $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{ext}_{\mathrm{gr}}}(\underline{G})$ ; ce  $S$ -faisceau est appelé le  $S$ -faisceau en groupes des automorphismes extérieurs de  $\underline{G}$ . Si  $\underline{X}$  (resp.  $\underline{Y}$ ) est un  $S$ -faisceau muni d'une action à droite (resp. de  $\underline{G}$ ), le *produit contracté* de  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  selon  $\underline{G}$  est le  $S$ -faisceau quotient  $\underline{X} \times \underline{Y}$  pour l'action à droite de  $\underline{G}$  selon  $(x, y) \cdot g = (x \cdot g, g^{-1} \cdot y)$ , voir [17, III.1.3]. On le note  $\underline{X} \wedge^{\underline{G}} \underline{Y}$  ou parfois aussi  $\underline{X} \times^{\underline{G}} \underline{Y}$ .

<sup>(1)</sup> Voir [9, 2.1] pour des sorites dans cette direction.

Un  $S$ -faisceau  $\underline{E}$  équipé d'une action à droite de  $\underline{G}$  est *principal homogène* sous  $\underline{G}$  s'il satisfait aux deux conditions suivantes (IV.5.1.5) :

(a) Le morphisme de  $S$ -faisceaux  $\underline{E} \times \underline{G} \rightarrow \underline{E} \times \underline{E}$ ,  $(e, g) \mapsto (e, e.g)$ , est un isomorphisme.

(b) Il existe une famille couvrante  $(S_i)_{i \in I}$  de  $S$  pour la topologie fppf telle que  $\underline{E}(S_i) \neq \emptyset$  pour tout  $i \in I$ .

Le  $S$ -faisceau  $\underline{G}$  muni de la translation à gauche est un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{G}$ , c'est le  $S$ -faisceau principal homogène *trivial* sous  $\underline{G}$ . Un morphisme de  $S$ -faisceaux principaux homogènes sous  $\underline{G}$  est un isomorphisme ; en particulier, un  $S$ -faisceau principal homogène  $\underline{E}$  sous  $\underline{G}$  est isomorphe au  $S$ -faisceau principal homogène trivial sous  $\underline{G}$  si et seulement si  $\underline{E}(S) \neq \emptyset$ . La seconde condition (b) est donc une condition de trivialité locale.

**Remarque 2.1.1.** – Il est tautologique de signaler que si  $\underline{E}$  est un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{G}$ , le quotient  $\underline{E}/\underline{G}$  est isomorphe au faisceau  $\underline{e}$ . Il suffit en effet de le vérifier pour le  $S$ -faisceau principal homogène  $\underline{G}$ .

Etant donné un  $S$ -faisceau principal homogène  $\underline{E}$  sous  $\underline{G}$ , et un  $S$ -faisceau  $\underline{Y}$  muni d'une action à gauche de  $\underline{G}$ , le produit contracté  $\underline{E} \wedge^{\underline{G}} \underline{Y}$  est appelé le  $S$ -faisceau *tordu* de  $\underline{Y}$  par  $\underline{E}$ . On le note  $\underline{Y}^{\underline{E}}$ . Sauf mention expresse du contraire, la notation  $\underline{G}^{\underline{E}}$  désigne le tordu de  $\underline{G}$  par  $\underline{E}$  par automorphismes intérieurs, c'est-à-dire suivant l'action de  $\underline{G}$  sur lui-même via  $g \cdot u = \text{int}(g) \cdot u = g u g^{-1}$ . Par construction, le  $S$ -faisceau  $\underline{G}^{\underline{E}}$  est un  $S$ -faisceau en groupes, il est canoniquement isomorphe au  $S$ -faisceau  $\text{Aut}_{\underline{G}}(\underline{E})$  des automorphismes  $\underline{G}$ -équivalents de  $\underline{E}$ . Le  $S$ -faisceau précédent  $\underline{Y}^{\underline{E}}$  est muni d'une action naturelle (à gauche) de  $\underline{G}^{\underline{E}}$ .

Si  $f : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$  désigne un  $S$ -morphisme de  $S$ -faisceaux en groupes, cela définit une action à gauche de  $\underline{G}$  sur  $\underline{H}$  suivant  $g \cdot h = f(g) \cdot h$ . Ainsi si  $\underline{E}$  est un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{G}$ , alors le produit contracté  $\underline{E} \wedge^{\underline{G}} \underline{H}$  est un  $\underline{H}$ -espace principal homogène. On le note aussi  $f_* \underline{E}$ , c'est la « poussette » (ou push-out) de  $\underline{E}$  selon  $f$ .

**2.2. Cocycles et  $H^1$ .** – On désigne par  $H^1_{\text{fppf}}(S, \underline{G})$  l'ensemble des classes d'isomorphie d'espaces principaux homogènes sous  $\underline{G}$ . Cet ensemble admet une description en cocycles pour laquelle il existe plusieurs conventions. Nous prenons celle du livre de Giraud [17, I.3.6] et nous nous proposons de donner une présentation quelque peu différente de celle donnée au paragraphe I.3.6.2 de ce livre.

Soit  $S' \rightarrow S$  un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie. On note  $p_i : S' \times_S S' \rightarrow S'$  les projections ( $i = 1, 2$ ) et  $q_i : S' \times_S S' \times_S S' \rightarrow S'$  les projections,  $q_{i,j} : S' \times_S S' \times_S S' \rightarrow S'$  les projections partielles ( $i < j$ ). On garde en mémoire les relations utiles  $q_1 = p_1 \circ q_{1,2} = p_1 \circ q_{1,3}$ ,  $q_2 = p_1 \circ q_{2,3} = p_2 \circ p_{1,2}$ , et  $q_3 = p_2 \circ q_{1,3} = p_2 \circ p_{2,3}$ .

Un 1-cocycle de  $S'$  à valeurs dans  $\underline{G}$  est un élément  $g \in \underline{G}(S' \times_S S')$  satisfaisant

$$q_{1,2}^*(g) q_{2,3}^*(g) = q_{1,3}^*(g) \in \underline{G}(S' \times_S S' \times_S S').$$

On note  $Z^1(S'/S, \underline{G})$  l'ensemble pointé des 1-cocycles de  $S$  à valeurs dans  $\underline{G}$  (pointé par le 1-cocycle trivial).

Etant donné un 1-cocycle  $g$  de  $S'$  à valeurs dans  $\underline{G}$ , on lui associe le  $S$ -faisceau  $\underline{E}_g$  sous  $\underline{G}$  défini pour chaque  $S$ -schéma  $T$  par

$$\underline{E}_g(T) = \left\{ h \in \underline{G}(T \times_S S') \mid p_2^*(h) = g_T p_1^*(h) \in \underline{G}(T \times_S S' \times_S S') \right\}.$$

On a une action naturelle à droite de  $\underline{G}$  sur  $\underline{E}_g$  : étant donnés un  $S$ -schéma  $T$  et des sections  $[h] \in \underline{E}_g(T)$ ,  $g_\# \in \underline{G}(T)$ , alors  $h g_\#$  définit un élément de  $\underline{E}_g(T)$ . On note aussi que l'on dispose d'un point privilégié  $e_g \in \underline{E}_g(S')$  défini par l'élément  $g \in \underline{G}(S' \times_S S')$ . En effet, en faisant  $T = S'$  et  $h = g$ , on a

$$g_T p_1^*(h) = q_{1,2}^*(g) q_{2,3}^*(g) = q_{1,3}^*(g) = p_1^*(h).$$

**Lemme 2.2.1.** – (1) Pour chaque 1-cocycle  $g$  de  $S'$  à valeurs dans  $\underline{G}$ , le  $S$ -faisceau  $\underline{E}_g$  est principal homogène sous  $\underline{G}$ .

(2) Si  $\underline{E}$  désigne un  $S$ -faisceau principal homogène muni d'un point  $e \in \underline{E}(S')$ , il existe un unique 1-cocycle  $g$  de  $S'$  à valeurs dans  $\underline{G}$  tel que  $(\underline{E}, e) \xrightarrow{\sim} (\underline{E}_g, e_g)$ . En outre un tel isomorphisme est unique.

*Démonstration.* – (1) Comme  $\underline{E}_g(S')$  est non vide, il suffit de montrer que  $\underline{G}(T)$  agit de façon simplement transitive sur  $\underline{E}_g(T)$  pour tout  $S$ -schéma  $T$ . Soient  $[h], [h_\#]$  deux éléments de  $\underline{E}_g(T)$  avec  $h, h_\# \in \underline{G}(T \times_S S')$ . De la définition de  $\underline{E}_g$ , il vient  $p_1^*(h_\#^{-1} h) = p_2^*(h_\#^{-1} h)$  d'où par descente fidèlement plate de  $T \times_S S'$  à  $T$  on tire que  $h_\#^{-1} h \in \underline{G}(T) \subseteq \underline{G}(T \times_S S')$ . Posant  $g_0 = h_\#^{-1} h$ , on a  $[h] = [h_\#] g_0$ . Ceci montre que  $\underline{G}(T)$  agit transitivement sur  $\underline{E}_g(T)$  et il est alors évident que cette action est simplement transitive.

(2) L'action de  $\underline{G}(S' \times_S S')$  sur  $\underline{E}(S' \times_S S')$  étant simplement transitive, il existe un unique  $g \in \underline{G}(S' \times_S S')$  tel que  $p_2^*(e) = p_1^*(e) \cdot g$ . Nous affirmons que  $g$  est un 1-cocycle de  $S'$  à valeurs dans  $\underline{G}$ . Dans ce but, on utilise la trivialisatation  $t_e : \underline{G} \times_S S' \xrightarrow{\sim} \underline{E} \times_S S'$ ,  $h \mapsto e h$ . Alors le composé

$$p_1(t_e)^{-1} \circ p_2(t_e) : \underline{G} \times_S S' \xrightarrow{\sim} \underline{G} \times_S S'$$

est un isomorphisme du  $S$ -faisceau principal homogène trivial  $\underline{G}$ , c'est donc la translation à gauche  $L_g$  d'un (unique) élément  $g \in \underline{G}(S' \times_S S')$ . En utilisant les relations  $q_{1,3} \circ p_1 = q_1$ ,  $q_{1,3} \circ p_2 = q_3$ , etc., on vérifie alors que

$$\begin{aligned} q_{1,3}^*(L_g) &= q_{1,3}^*(p_1^*(t_e)^{-1}) \circ q_{1,3}^*(p_2^*(t_e)) \\ &= q_1^*(t_e^{-1}) \circ q_3^*(t_e) \\ &= q_1^*(t_e^{-1}) \circ q_2^*(t_e) \circ q_2^*(t_e^{-1}) \circ q_3^*(t_e) \\ &= q_{1,2}^*(p_1^*(t_e)^{-1}) \circ q_{1,2}^*(p_2^*(t_e)) \circ q_{2,3}^*(p_1^*(t_e)^{-1}) \circ q_{2,3}^*(p_2^*(t_e)) \\ &= q_{1,2}^*(L_g) \circ q_{2,3}^*(L_g). \end{aligned}$$

On conclut que  $q_{1,3}^*(g) = q_{1,2}^*(g) q_{2,3}^*(g)$ . Nous allons maintenant construire un isomorphisme entre  $\underline{E}_g$  et  $\underline{E}$ . Etant donné un  $S$ -schéma  $T$  et  $[h] \in \underline{E}_g(T)$  avec  $h \in \underline{G}(T \times_S S')$ , nous affirmons que  $e \cdot h \in \underline{E}(T) \subseteq \underline{G}(T \times_S S')$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} p_1^*(e \cdot h) &= p_1^*(e) \cdot p_1^*(h) \\ &= p_2^*(e) \cdot g \cdot p_1^*(h) \quad [p_1^*(e) = p_2^*(e) \cdot g] \\ &= p_2^*(e) \cdot p_2^*(h) \quad [p_2^*(h) = g \cdot p_1^*(h)] \\ &= p_2^*(e \cdot h). \end{aligned}$$

Ainsi  $e \cdot h \in \underline{E}(T)$ , ce qui permet de définir un morphisme de  $S$ -faisceaux  $u : \underline{E}_g \rightarrow \underline{E}$ ,  $[h] \mapsto e \cdot h$ . Ce morphisme est  $\underline{G}$ -équivariant, c'est donc un isomorphisme. En outre  $u(e_g)$  est donné dans  $\underline{E}(S' \times_S S')$  par  $p_2^*(e) \cdot g = p_1^*(e)$ , c'est-à-dire le point  $e \in \underline{E}(S')$ . La vérification de l'unicité est immédiate et laissée au lecteur.  $\square$

Ainsi  $Z^1(S'/S, \underline{G})$  décrit les classes d'isomorphismes de couples  $(\underline{E}, e)$  où  $\underline{E}$  est un  $S$ -faisceau principal homogène muni d'un point  $e \in \underline{E}(S')$ . Si  $\underline{E}$  est un tel objet, le groupe  $\underline{G}(S')$  agit à droite de façon simplement transitive sur  $\underline{E}(S')$ , ceci induit une action à droite de  $\underline{G}(S')$  sur  $Z^1(S'/S, \underline{G})$ . On pose

$$H_{\text{fppf}}^1(S'/S, \underline{G}) = Z^1(S'/S, \underline{G}) / \underline{G}(S').$$

Alors l'ensemble pointé  $H_{\text{fppf}}^1(S'/S, \underline{G})$  classifie les  $S$ -faisceaux principaux homogènes trivialisés par le recouvrement  $S' \rightarrow S$ . On a donc une application injective naturelle  $H_{\text{fppf}}^1(S'/S, \underline{G}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G})$  et chaque  $S$ -espace principal homogène sous  $\underline{G}$  étant trivialisé par un recouvrement fppf, on obtient par passage à la limite une bijection

$$\varinjlim_{T/S} H_{\text{fppf}}^1(T/S, \underline{G}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}),$$

où  $T$  parcourt les recouvrements fppf de  $S$ .

**Remarque 2.2.2.** – (a) L'action de  $\underline{G}(S')$  se traduit bien entendu au niveau des cocycles. Etant donné  $g \in Z^1(S'/S, \underline{G})$  et  $g_0 \in \underline{G}(S')$ , on a alors  $g \cdot g_0 = p_1^*(g_0^{-1}) g p_2^*(g_0)$ .

(b) Dans [17, I.3.6], on considère la situation en apparence plus générale de recouvrements  $(S_i)_{i \in I}$  mais cela revient au même en prenant la somme disjointe des  $S_i$ . Ceci étant, il est parfois commode de travailler avec des  $S_i$ , ce que l'on fait d'ailleurs plus loin en 2.6.

Le cas particulier où  $S$  est non vide et  $S' \rightarrow S$  est un  $\Gamma_S$ -torseur pour un groupe fini  $\Gamma$  (i.e. le  $S$ -faisceau  $h_{S'}$  est un  $S$ -espace principal homogène sous  $\Gamma_S$ , voir §2.7 ci-après) est fondamental et nous allons faire le lien avec la cohomologie galoisienne. L'isomorphisme d'action  $a : S' \times_S \Gamma_S \xrightarrow{\sim} S' \times_S S'$ ,  $(x, g) \mapsto (x, x \cdot g)$  produit la décomposition  $\phi : S' \times_S S' \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{\sigma \in \Gamma} S'$ . Celle-ci donne lieu à un isomorphisme de groupes  $\phi^* : \underline{G}(S')^{(\Gamma)} = \prod_{\sigma \in \Gamma} \underline{G}(S') \xrightarrow{\sim} \underline{G}(S' \times_S S')$ . L'action à droite de  $\Gamma_S$  sur  $S'$  produit une action à gauche du groupe fini  $\Gamma \subseteq H^0(S, \Gamma_S)$  sur  $\underline{G}(S')$  notée  $\sigma \cdot g = \sigma(g)$ .

**Lemme 2.2.3.** – Un  $\Gamma$ -uplet  $z = (z_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$  de  $\underline{G}(S')$  définit un 1-cocycle de  $S'/S$  à valeurs dans  $\underline{G}$  si et seulement si

$$z_{\sigma\tau} = z_\sigma \sigma(z_\tau)$$

pour tous  $\sigma, \tau \in \Gamma$ .

*Démonstration.* – On utilise l'isomorphisme  $b : S' \times_S \Gamma_S \times_S \Gamma_S \xrightarrow{\sim} S' \times_S S' \times_S S'$ ,  $(x, \gamma, \tau) \mapsto (x, x.\gamma, x.(\gamma\tau))$  qui donne lieu à un isomorphisme  $\psi : S' \times_S S' \times_S S' \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{(\sigma, \tau) \in \Gamma \times \Gamma} S'$ .

On va identifier les morphismes  $q_{i,j}^* : \underline{G}(S' \times_S S') \rightarrow \underline{G}(S' \times_S S' \times_S S')$  via les isomorphismes  $\phi^*$  et  $\psi^*$ . Notant  $a_0 : S' \times_S \Gamma_S \rightarrow S'$  l'action, on considère les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} S' \times_S \Gamma_S \times_S \Gamma_S & \xrightarrow[\sim]{b} & S' \times_S S' \times_S S' \\ p_{1,2} \downarrow & & p_{1,2} \downarrow \\ S' \times_S \Gamma_S & \xrightarrow[\sim]{a} & S' \times_S S', \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S' \times_S \Gamma_S \times_S \Gamma_S & \xrightarrow[\sim]{b} & S' \times_S S' \times_S S' \\ a_0 \times id_{S'} \downarrow & & p_{2,3} \downarrow \\ S' \times_S \Gamma_S & \xrightarrow[\sim]{a} & S' \times_S S', \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} S' \times_S \Gamma_S \times_S \Gamma_S & \xrightarrow[\sim]{b} & S' \times_S S' \times_S S' \\ id_{S'} \times \prod \downarrow & & p_{1,3} \downarrow \\ S' \times_S \Gamma_S & \xrightarrow[\sim]{a} & S' \times_S S'. \end{array}$$

Ces diagrammes indiquent que le morphisme  $(\psi^*)^{-1} \circ q_{i,j}^* \circ \phi^* : \underline{G}(S')^{(\Gamma)} \rightarrow \underline{G}(S')^{(\Gamma \times \Gamma)}$  applique un  $\Gamma$ -uplet  $(z_\sigma)$  sur  $(u_{\sigma,\tau})_{(\sigma,\tau) \in \Gamma^2}$  où

$$u_{\sigma,\tau} = \begin{cases} z_\sigma & \text{si } i = 1 \text{ et } j = 2; \\ \sigma(z_\tau) & \text{si } i = 2 \text{ et } j = 3; \\ z_{\sigma\tau} & \text{si } i = 1 \text{ et } j = 3. \end{cases}$$

Il ressort que  $(z_\sigma)$  définit un 1-cocycle de  $S'$  à valeurs dans  $\underline{G}$  si et seulement on a  $z_\sigma \sigma(z_\tau) = z_{\sigma\tau}$  pour tous  $\sigma, \tau \in \Gamma$ .  $\square$

Cette description des 1-cocycles est celle de la cohomologie galoisienne [33]. Deux 1-cocycles  $z = (z_\sigma)$  et  $t = (t_\sigma)$  sont alors cohomologues s'il existe  $a \in \underline{G}(S')$  satisfaisant  $z_\sigma = a^{-1} t_\sigma \sigma(a)$  pour tout  $\sigma \in \Gamma$ . L'ensemble pointé de cohomologie

des groupes  $H^1(\Gamma, \underline{G}(S')) := Z^1(\Gamma, \underline{G}(S')) / \underline{G}(S')$  est donc en bijection naturelle avec  $H_{\text{fppf}}^1(S'/S, \underline{G})$ . En particulier, on a une suite exacte d'ensembles pointés

$$1 \rightarrow H^1(\Gamma, \underline{G}(S')) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S', \underline{G}).$$

**2.3. Transporteurs stricts, stabilisateurs.** – On se donne une action de  $\underline{G}$  sur un  $S$ -faisceau fppf  $\underline{X}$ . On rappelle les définitions des exposés I et VI<sub>B</sub>.6 dans le cadre des  $S$ -foncteurs. Soient  $\underline{Z}, \underline{Z}'$  deux sous  $S$ -faisceaux de  $\underline{X}$ . Le *transporteur strict*  $\text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')$  de  $\underline{Z}$  à  $\underline{Z}'$  est le  $S$ -sous-foncteur de  $\underline{G}$  défini par

$$\text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')(T) = \left\{ g \in \underline{G}(T) \mid g_{\tilde{T}}(\underline{Z}(\tilde{T})) = \underline{Z}'(\tilde{T}) \mid \forall \tilde{T} \rightarrow T \right\}$$

pour chaque  $T$  au-dessus de  $S$ .

**Lemme 2.3.1.** – *Le  $S$ -foncteur  $\text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')$  est  $S$ -sous-faisceau fppf de  $\underline{G}$ .*

*Démonstration.* – Soit  $T$  un  $S$ -schéma et  $(T_i)_{i \in I}$  une famille couvrante de  $T$ . On considère le diagramme commutatif de suites d'ensembles

$$\begin{array}{ccccc} \text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')(T) & \xrightarrow{u} & \prod_{i \in I} \text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')(T_i) & \rightrightarrows & \prod_{i \in I} \text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')(T_i \times_S T_j) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \underline{G}(T) & \xrightarrow{v} & \prod_{i \in I} \underline{G}(T_i) & \rightrightarrows & \prod_{i \in I} \underline{G}(T_i \times_S T_j). \end{array}$$

Comme  $\underline{G}$  est un faisceau, la suite du bas est exacte, donc  $\text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')(T) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')(T_i)$  est injective. On se donne une famille de sections  $(g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')(T_i)$  appartenant au noyau de la double flèche. Alors il existe un unique  $g \in \underline{G}(T)$  tel que  $g_i = g|_{T_i}$  et on doit vérifier que  $g$  appartient à  $\text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z}')(T)$ . Il suffit de vérifier que  $g(\underline{Z}(T)) \subseteq \underline{Z}'(T)$ , en utilisant la symétrie et en remarquant que le cas d'un schéma  $\tilde{T}$  au dessus de  $T$  est analogue. Soit  $z \in \underline{Z}(T)$ . Par hypothèse, on a  $g_i(\underline{Z}(T_i)) = \underline{Z}'(T_i)$ , donc  $g_i \cdot z|_{T_i} \in \underline{Z}'(T_i)$ . L'élément  $g_i \cdot z|_{U_i}$  appartient au noyau de la double flèche, donc provient d'un unique élément  $z' \in \underline{Z}'(T)$ . De plus  $g \cdot z$  et  $z'$  ont mêmes restrictions sur le recouvrement  $(T_i)_{i \in I}$ , donc  $g \cdot z = z' \in \underline{Z}'(T)$ .  $\square$

Si  $\underline{Z} = \underline{Z}'$ , on note  $\text{Stab}_{\underline{G}}(\underline{Z}) = \text{Transpstr}_{\underline{G}}(\underline{Z}, \underline{Z})$ , c'est le *stabilisateur* du sous  $S$ -faisceau  $\underline{Z}$ . Si  $x \in \underline{X}(S)$  désigne un point, on note abusivement  $\text{Stab}_{\underline{G}}(x)$  le stabilisateur du sous-faisceau constant de  $\underline{X}$  défini par  $x$ .

Soit  $\underline{H}$  un  $S$ -sous-faisceau en groupes de  $\underline{G}$ . Le *normalisateur*  $N_{\underline{G}}(\underline{H})$  de  $\underline{H}$  dans  $\underline{G}$  est le stabilisateur de  $\underline{H}$  pour l'action adjointe de  $\underline{G}$ , i.e.

$$N_{\underline{G}}(\underline{H})(T) = \text{Stab}_{\underline{G}}(\underline{H})(T) = \left\{ g \in \underline{G}(T) \mid g_{T'} \underline{H}(T') g_{T'}^{-1} = \underline{H}(T') \mid \forall T' \rightarrow T \right\}$$

pour chaque  $T$  au-dessus de  $S$ . De même, le *centralisateur*  $\underline{\text{Cent}}_{\underline{G}}(\underline{H})$  de  $\underline{H}$  dans  $\underline{G}$  est le  $S$ -sous-faisceau de  $\underline{G}$  défini par

$$\underline{\text{Cent}}_{\underline{G}}(\underline{H})(T) = \left\{ g \in \underline{G}(T) \mid g_{T'} \in \underline{\text{Cent}}_{\underline{G}(T')}(\underline{H}(T')) \quad \forall T' \rightarrow T \right\}$$

pour chaque  $T$  au-dessus de  $S$ . On a une suite exacte naturelle de  $S$ -faisceaux en groupes  $1 \rightarrow \underline{\text{Cent}}_{\underline{G}}(\underline{H}) \rightarrow \underline{N}_{\underline{G}}(\underline{H}) \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{gr}}(\underline{H})$  où  $\underline{\text{Aut}}_{\text{gr}}(\underline{H})$  désigne le  $S$ -faisceau des automorphismes de groupes de  $\underline{H}$ . Dans le cas où  $\underline{H} = \underline{G}$ , on retrouve la suite exacte  $1 \rightarrow \underline{\text{Cent}}(\underline{G}) \rightarrow \underline{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\text{gr}}(\underline{G})$  du §2.1.

**2.4. Sections du quotient  $\underline{G}/\underline{H}$  et application caractéristique.** – On note  $\underline{Y} = \underline{G}/\underline{H}$  le faisceau quotient et  $p : \underline{G} \rightarrow \underline{Y}$  le morphisme quotient. Nous nous proposons d'étudier l'application caractéristique sous-jacente en démontrant un cas particulier de la proposition III.3.1.1 de [17] sur la description de  $\underline{Y}(S)$ . L'idée directrice est de travailler avec les espaces principaux homogènes en évitant dans une certaine mesure les cocycles.

Etant donné un point  $y \in H^0(S, \underline{Y})$ , on considère le sous-faisceau fibre en  $y$ , c'est-à-dire l'image réciproque par  $p$  du  $S$ -sous-faisceau constant attaché à  $y$ . On le note  $\underline{F}_y = p^{-1}(y)$ ; c'est un  $\underline{H}$ -faisceau principal homogène muni du  $\underline{H}$ -monomorphisme  $i_y : \underline{F}_y \rightarrow \underline{G}$  (pour l'action à droite de  $\underline{H}$  sur  $\underline{G}$ ). On dispose d'un isomorphisme canonique d'espaces principaux  $\underline{G}$ -homogènes  $\text{can}_y : p^{-1}(y) \wedge^{\underline{H}} \underline{G} \xrightarrow{\sim} \underline{G}$  défini par passage au quotient du morphisme de  $S$ -faisceaux fppf  $p^{-1}(y) \times \underline{G} \rightarrow \underline{G}$ ,  $(u, g) \mapsto i_y(u)g$ .

Cette construction donne lieu à l'application caractéristique  $\varphi : H^0(S, \underline{Y}) = \underline{Y}(S) \rightarrow H^1_{\text{fppf}}(S, \underline{H})$  qui associe à un point  $y$  la classe de  $[\underline{F}_y]$ .

**Remarque 2.4.1.** – Profitons de cette discussion pour signaler la compatibilité suivante. Pour chaque  $y \in H^0(S, \underline{Y})$ , on a un isomorphisme canonique de  $S$ -faisceaux en groupes

$$\underline{H}^{p^{-1}(y)} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Stab}}_{\underline{G}}(y)$$

où le  $S$ -faisceau en groupes de gauche signifie le tordu de  $\underline{H}$  par automorphismes intérieurs suivant le  $\underline{H}$ -faisceau principal homogène  $p^{-1}(y)$  et le terme de droite le faisceau stabilisateur de  $y$  dans  $\underline{G}$  [11, lemme 4.2.33].

**Lemme 2.4.2.** – Soit  $\underline{E}$  un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{H}$ . On note  $\underline{J} = \underline{E} \wedge^{\underline{H}} \underline{G}$  l'espace principal homogène sous  $\underline{G}$  donné par le changement de groupes  $i : \underline{H} \rightarrow \underline{G}$ .

On note  $i_{\underline{E}} : \underline{E} \xrightarrow{\text{id} \times 1} \underline{E} \times \underline{G} \rightarrow \underline{J}$ .

(1) Soit  $q : \underline{E} \rightarrow \underline{G}$  un  $\underline{H}$ -monomorphisme (pour l'action à droite de  $\underline{H}$  sur  $\underline{G}$ ). Alors le morphisme  $\underline{E} \times \underline{G} \rightarrow \underline{G}$ ,  $(e, g) \mapsto q(y)g$  donne lieu à un isomorphisme  $u_q : \underline{J} \xrightarrow{\sim} \underline{G}$ , qui est une trivialisatation de l'espace principal homogène  $\underline{J}$ .

(2) Etant donné une trivialisatation  $u : \underline{J} \xrightarrow{\sim} \underline{G}$ , on définit  $q_u : \underline{E} \rightarrow \underline{G}$  comme le composé de  $\underline{E} \xrightarrow{i_{\underline{E}}} \underline{J} \xrightarrow{u} \underline{G}$ . Alors  $q_u$  est un  $\underline{H}$ -monomorphisme et  $u = u_{q_u}$ .

(3) Soit  $q : \underline{E} \rightarrow \underline{G}$  un  $\underline{H}$ -monomorphisme (pour l'action à droite de  $\underline{H}$  sur  $\underline{G}$ ). Alors il existe un unique point  $y = y(\underline{E}, q) \in \underline{Y}(S)$  tel que le faisceau image du composé



$p \circ q : \underline{E} \rightarrow \underline{Y}$  soit le  $S$ -sous-faisceau constant  $\underline{Y}$  associé à  $y$ . De plus, il existe un unique  $\underline{H}$ -isomorphisme  $l : \underline{E} \xrightarrow{\sim} \underline{F}_y$  de sorte que  $q = i_y \circ l$ .

*Démonstration.* – (1) Cela résulte du fait qu'un morphisme d'espaces principaux homogènes sous  $G$  est un isomorphisme.

(2) Évident.

(3) D'après la remarque 2.1.1, on a un isomorphisme  $\underline{E}/\underline{H} \cong \underline{e}$ . Par passage au quotient par  $\underline{H}$  de  $q$ , on obtient un morphisme  $\underline{e} \rightarrow \underline{Y}$ . C'est une section du morphisme structural  $\underline{Y} \rightarrow \underline{e}$ , elle définit donc un point  $y$  de sorte que l'image de  $q$  est le sous-faisceau constant associé à  $y$ . En outre,  $q$  induit un isomorphisme  $l : \underline{E} \xrightarrow{\sim} \underline{F}_y$  de  $\underline{H}$ -faisceaux principaux homogènes ; celui-ci est unique.  $\square$

On considère maintenant les couples  $(\underline{E}, q)$  où  $\underline{E}$  est un  $\underline{H}$ -faisceau principal homogène (à droite) et  $q : \underline{E} \rightarrow \underline{G}$  un  $\underline{H}$ -monomorphisme de faisceaux. Deux tels couples  $(\underline{E}, q), (\underline{E}', q')$  sont dits équivalents s'il existe un  $\underline{H}$ -isomorphisme  $f : \underline{E} \xrightarrow{\sim} \underline{E}'$  satisfaisant  $q = q' \circ f$ . On note alors  $\mathcal{P}$  l'ensemble des classes d'équivalence de couples  $(\underline{E}, q)$ . Le lemme 2.4.2.(3) montre que l'assignation  $y \mapsto (F_y, i_y)$  induit une bijection

$$\underline{Y}(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}.$$

**Proposition 2.4.3.** – [17, III.3.2.3]. L'application caractéristique  $\varphi : \underline{Y}(S) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{H})$  induit une bijection

$$\underline{G}(S) \setminus \underline{Y}(S) \xrightarrow{\sim} \ker \left( H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{H}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}) \right).$$

*Démonstration.* – Soient  $\underline{E}$  un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{H}$  et  $q : \underline{E} \rightarrow \underline{G}$  un  $\underline{H}$ -monomorphisme. D'après le lemme 2.4.2.(3),  $(\underline{E}, q)$  définit un élément  $y$  de  $\underline{Y}(S)$  dont l'image caractéristique est  $[\underline{E}] \in H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{H})$  ; cette classe appartient bien au noyau de  $i_* : H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{H}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G})$  d'après le lemme 2.4.2.(1). En outre, d'après le lemme 2.4.2.(2), tout élément du noyau  $\ker(i_*)$  provient de cette construction. Il reste à montrer que les fibres de  $\varphi$  correspondent aux  $\underline{G}(S)$ -orbites sur  $\underline{Y}(S)$ . Soient  $y, y' \in \underline{Y}(S)$  deux points satisfaisant  $\varphi(y) = \varphi(y')$ . On représente  $y$  (resp  $y'$ ) par un couple  $(\underline{E}, q)$  (resp.  $(\underline{E}', q')$ ). Alors les espaces principaux  $\underline{H}$ -homogènes  $\underline{E}$  et  $\underline{E}'$  sont isomorphes et on peut donc supposer que  $\underline{E} = \underline{E}'$ . Dans cette situation, nous affirmons qu'il existe un unique  $g \in \underline{G}(S)$  tel que  $q' = gq$ . Cette question est alors locale pour la topologie plate, ce qui ramène au cas évident où  $\underline{E} \xrightarrow{\sim} \underline{H}$ . Ceci montre que  $y' = gy$ .  $\square$

## 2.5. Conjugaison locale de sous-faisceaux en groupes, I

On fixe un entier  $d \geq 1$  et on considère des  $S$ -sous-faisceaux en groupes fppf  $\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d$  de  $\underline{G}$ . Posons  $\underline{N} = \underline{N}_{\underline{G}}(\underline{H}_1, \underline{H}_2, \dots, \underline{H}_d) = \underline{N}_{\underline{G}}(\underline{H}_1) \cap \underline{N}_{\underline{G}}(\underline{H}_2) \cap \dots \cap \underline{N}_{\underline{G}}(\underline{H}_d)$ ,  $\underline{X} = \underline{G}/\underline{N}$  le faisceau fppf associé et  $r : \underline{G} \rightarrow \underline{X}$  le morphisme quotient.

Soient  $\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d$  des  $S$ -sous-faisceaux en groupes de  $\underline{G}$  localement  $\underline{G}$ -conjugués à  $\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d$ , c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement fppf  $(U_i)_{i \in I}$  de  $S$  et des sections  $g_i \in \underline{G}(U_i)$  tels que  $\underline{H}'_j \times_S U_i = g_i(\underline{H}_j \times_S U_i)g_i^{-1}$  pour tous  $i \in I, j = 1, \dots, d$ . Le

transporteur strict  $\underline{\text{Transpstr}}_{\underline{G}}((\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d), (\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d))$ , qui associe à un morphisme  $T \rightarrow S$

$$\underline{\text{Transpstr}}_{\underline{G}}((\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d), (\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d))(T) = \left\{ g \in \underline{G}(T) \mid g \underline{H}_j(\tilde{T}) g^{-1} = \underline{H}'_j(\tilde{T}) \ \forall \tilde{T} \rightarrow T, \ \forall j = 1, \dots, d \right\},$$

est un  $\underline{N}$ -faisceau principal homogène plongé dans  $\underline{G}$ . Il définit donc un point  $\gamma(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  dans  $H^0(S, \underline{X})$  d'après le §2.4.

**Lemme 2.5.1.** – *La flèche  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d) \mapsto \gamma(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  induit une correspondance bijective entre l'ensemble des sous-faisceaux  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  localement  $\underline{G}$ -conjugués à  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$  et  $\underline{X}(S)$ . L'application inverse applique un point  $x \in H^0(S, \underline{X})$  sur les tordus  $(\underline{H}_1^{r^{-1}(x)}, \dots, \underline{H}_d^{r^{-1}(x)})$  qui sont chacun des  $S$ -sous-faisceaux en groupes de  $\underline{G}^{r^{-1}(x)} \xrightarrow[\sim]{\text{can}_x} \underline{G}$  selon l'action naturelle de  $\underline{N}$  sur  $\underline{H}$ .*

*Démonstration.* – Nous commençons par construire un candidat pour l'application inverse  $\gamma$  en voyant  $\underline{X}(S)$  comme l'ensemble des classes  $(\underline{E}, q)$  (pour la relation d'équivalence décrite au §2.4) où  $\underline{E}$  est un  $\underline{N}$ -faisceau principal homogène et  $q : \underline{E} \rightarrow \underline{G}$  un monomorphisme de  $\underline{N}$ -faisceaux. Si  $(\underline{E}, q)$  est un tel objet, on dispose alors d'une trivialisation  $q_* : \underline{E} \wedge^{\underline{N}} \underline{G} \xrightarrow{\sim} \underline{G}$ ,  $(e, g) \mapsto q(e).g$ . On considère les  $S$ -faisceaux en groupes tordus  $\underline{H}_j^{\underline{E}}$  pour l'action naturelle de  $\underline{N}$  sur  $\underline{H}_j$  pour  $j = 1, \dots, d$ . Le composé

$$u_j : \underline{H}_j^{\underline{E}} \rightarrow \underline{G}^{\underline{E}} \xrightarrow{q_*} \underline{G}$$

est un monomorphisme, le faisceau image noté  $\underline{H}_j(E, q)$  est bien un  $S$ -sous-faisceau en groupes de sorte que le  $d$ -uplet  $(\underline{H}_1(E, q), \dots, \underline{H}_d(E, q))$  est localement  $\underline{G}$ -conjugué à  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$ .

Il reste à montrer que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. Dans un sens, étant donné un couple  $(\underline{E}, q)$  comme précédemment, on observe que  $q : \underline{E} \rightarrow \underline{G}$  induit un morphisme

$$\underline{E} \rightarrow \underline{\text{Transpstr}}_{\underline{G}}((\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d), (\underline{H}_1(E, q), \dots, \underline{H}_d(E, q))).$$

Comme c'est un morphisme de  $\underline{N}$ -espaces principaux homogènes, c'est un isomorphisme.

Dans l'autre sens, si on part d'un  $d$ -uplet  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  localement  $\underline{G}$ -conjugué à  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$ , on lui associe le couple

$$(\underline{\text{Transpstr}}_{\underline{G}}((\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d), (\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)), i).$$

On a bien  $\underline{H}'_j = \underline{H}_j(\underline{\text{Transpstr}}_{\underline{G}}((\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d), (\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)), i)$  pour chaque  $j$ .  $\square$

D'après la proposition 2.4.3, l'application caractéristique  $\varphi : \underline{X}(S) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{N})$  induit une bijection

$$\underline{G}(S) \setminus \underline{X}(S) \xrightarrow{\sim} \ker \left( H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{N}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}) \right).$$

Le membre de gauche décrit alors les  $\underline{G}(S)$ -classes de conjugaisons de  $d$ -uplets  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  de sous  $S$ -faisceaux en groupes de  $\underline{G}$  qui sont localement  $\underline{G}$ -conjugués à  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$  pour la topologie fppf.

## 2.6. Conjugaison locale de sous-faisceaux en groupes, II

**Définition 2.6.1.** – Soit  $\underline{E}$  un faisceau principal homogène sous  $\underline{G}$  (pour fppf). Soit  $\underline{X}$  un  $S$ -faisceau sur lequel  $\underline{G}$  agit à gauche et posons  $\underline{X}' = \underline{E} \wedge^{\underline{G}} \underline{X}$ . Soit  $\underline{Y}$  (resp.  $\underline{Y}'$ ) un  $S$ -sous-faisceau de  $\underline{X}$  (resp.  $\underline{X}'$ ). On dit que  $\underline{Y}$  et  $\underline{Y}'$  sont *localement  $\underline{G}$ -conjugués* s'il existe un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $S$  trivialisant  $\underline{E}$ , des trivialisations  $\phi_i : \underline{E} \times_S U_i \cong \underline{G} \times_S U_i$  et  $g = (g_i) \in \prod \underline{G}(U_i)$  tels que  $\phi_{i,*} : \underline{G}^{\underline{E}} \times_S U_i \xrightarrow{\sim} \underline{G} \times_S U_i$  induise un isomorphisme  $\underline{Y}' \times_S U_i \xrightarrow{\sim} g_i (\underline{Y} \times_S U_i) g_i^{-1}$  pour tout  $i \in I$ .

En particulier, si  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$  (resp.  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$ ) désigne un  $d$ -uplet de  $S$ -sous-faisceaux en groupes de  $\underline{G}$  (resp. de  $\underline{G}' = \underline{G}^{\underline{E}}$ ), on dit que  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$  et  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  sont localement  $\underline{G}$ -conjugués s'il existe un recouvrement  $(U_i)_{i \in I}$  de  $S$  trivialisant  $\underline{E}$ , des trivialisations  $\phi_i : \underline{E} \times_S U_i \cong \underline{G} \times_S U_i$  et  $g = (g_i) \in \prod \underline{G}(U_i)$  tels que  $\phi_{i,*} : \underline{G}^{\underline{E}} \times_S U_i \xrightarrow{\sim} \underline{G} \times_S U_i$  induise un isomorphisme  $\underline{H}'_j \times_S U_i \xrightarrow{\sim} g_i (\underline{H}_j \times_S U_i) g_i^{-1}$  pour tout  $i \in I$  et tout  $j = 1, \dots, d$ .

**Lemme 2.6.2.** – Soit  $\underline{E}$  un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{G}$  (pour fppf). On pose  $\underline{G}' = \underline{G}^{\underline{E}}$ . Soit  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$  un  $d$ -uplet de  $S$ -sous-faisceaux en groupes de  $\underline{G}$ . On désigne par  $\underline{N} = \underline{N}_{\underline{G}}(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$  et on note  $i : \underline{N} \rightarrow \underline{G}$ .

(1) Soit  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  un  $d$ -uplet de  $S$ -sous-faisceaux en groupes fppf de  $\underline{G}'$  qui est localement  $\underline{G}$ -conjugué pour fppf au  $d$ -uplet  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$ . Alors il existe un  $S$ -faisceau principal homogène  $\underline{F}$  sous  $\underline{N}$  et un  $\underline{G}$ -isomorphisme  $q : \underline{F} \wedge^{\underline{N}} \underline{G} \xrightarrow{\sim} \underline{E}$  de sorte que l'isomorphisme de  $S$ -groupes  $q_* : \underline{G}^{i_* \underline{F}} \xrightarrow{\sim} \underline{G}' = \underline{G}^{\underline{E}}$  applique le  $d$ -uplet  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  de  $S$ -sous-faisceaux en groupes tordus sur  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$ .

(2) Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a)  $\underline{E}$  admet une réduction à  $\underline{N}$ , i.e. la classe de  $\underline{E}$  appartient à l'image de  $i_* : H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{N}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G})$ .

(b) Le faisceau en groupes tordus  $\underline{G}'$  admet un  $d$ -uplet de sous-faisceaux en groupes  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  qui est localement  $\underline{G}$ -conjugué à  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$  pour la topologie fppf.

**Démonstration.** – (1) On suppose que  $\underline{G}' := \underline{G}^{\underline{E}}$  admet un  $d$ -uplet  $(\underline{H}'_1, \dots, \underline{H}'_d)$  de  $S$ -sous-faisceaux en groupes qui est localement  $\underline{G}$ -conjugué à  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$  pour la topologie fppf. Il existe donc un recouvrement fppf  $(U_i)_{i \in I}$  de  $S$  trivialisant  $\underline{E}$ , des trivialisations  $\phi_i : \underline{E} \times_S U_i \cong \underline{G} \times_S U_i$  et une section  $g = (g_i) \in \prod \underline{G}(U_i)$  tels que  $\phi_{i,*} : \underline{G}^{\underline{E}} \times_S U_i \cong \underline{G} \times_S U_i$  applique  $\underline{H}'_k \times_S U_i$  sur  $g_i (\underline{H}_k \times_S U_i) g_i^{-1}$  pour tout  $i \in I$  et pour tout  $k = 1, \dots, d$ .

On pose  $L_{g_{i,j}} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \underline{G} \times_S (U_i \times_S U_j) \xrightarrow{\sim} \underline{G} \times_S (U_i \times_S U_j)$  pour  $i, j \in I$  où  $L$  désigne la translation à gauche. Alors  $(g_{i,j})_{i,j \in J}$  est le 1-cocycle associé à  $\underline{E}$  et à la trivialisation  $\phi$ . On va montrer que l'on peut supposer  $g$  trivial. Dans ce but, on considère la trivialisation suivante de  $\underline{E}$

$$\tilde{\phi}_i := L_{g_i} \circ \phi_i : \underline{E} \times_S U_i \xrightarrow[\sim]{\phi_i} \underline{G} \times_S U_i \xrightarrow[\sim]{L_{g_i}} \underline{G} \times_S U_i$$

où  $L_{g_i}$  désigne la translation à gauche par  $g_i$ . Alors le 1-cocycle  $(\tilde{g}_{i,j})$  associé à  $\underline{E}$  et à la trivialisation  $\tilde{\phi}$  satisfait  $\tilde{g}_{i,j} = g_i g_{i,j} g_j^{-1}$  pour  $i, j \in I$ . On vérifie immédiatement que  $\tilde{\phi}_{i,*} : \underline{G}^{\underline{E}} \times_S U_i \xrightarrow{\sim} \underline{G} \times_S U_i$  induit un automorphisme  $\underline{H}' \times_S U_i \xrightarrow{\sim} \underline{H} \times_S U_i$  pour tout  $i \in I$ . On s'est donc ramené à ce cas, ce qui permet de supposer que  $\text{int}(g_{i,j}) : \underline{G} \times_S U_{i,j} \xrightarrow{\sim} \underline{G} \times_S U_{i,j}$  induit un automorphisme de  $\underline{H}_k \times_S U_{i,j}$  pour  $k = 1, \dots, d$ , d'où  $g_{i,j} \in \underline{N}(U_{i,j})$  pour tous  $i, j \in I$ . Par suite,  $\underline{E}$  admet un  $S$ -sous-faisceau  $\underline{F}$  qui est principal homogène sous  $\underline{N}$  et qui est défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \underline{F} \times_S U_i & \xrightarrow[\sim]{} & \underline{N} \times_S U_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{E} \times_S U_i & \xrightarrow[\sim]{\phi_i} & \underline{G} \times_S U_i \end{array} .$$

L'application  $\underline{F} \times \underline{G} \rightarrow \underline{E}$ ,  $(f, g) \mapsto f g$  induit un isomorphisme  $q : \underline{F} \wedge^{\underline{N}} \underline{G} \xrightarrow{\sim} \underline{E}$ . Par construction, l'isomorphisme de  $S$ -groupes  $q_* : \underline{G}^{i*F} \xrightarrow{\sim} \underline{G}' = \underline{G}^{\underline{E}}$  applique le  $d$ -uplet  $(\underline{H}_1^{\underline{F}}, \dots, \underline{H}_d^{\underline{F}})$  sur  $(\underline{H}_1', \dots, \underline{H}_d')$ .

(2) (a)  $\implies$  (b) : On suppose que  $\underline{E} \cong \underline{F} \wedge^{\underline{N}} \underline{G}$  où  $\underline{F}$  est un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{N}$ . Alors  $\underline{G}^{\underline{E}} \cong \underline{G}^{i*F}$  admet le  $d$ -uplet de  $S$ -sous-faisceaux  $(\underline{H}_1^{\underline{F}}, \dots, \underline{H}_d^{\underline{F}})$ , qui est localement  $\underline{G}$ -conjugué à  $(\underline{H}_1, \dots, \underline{H}_d)$ .

(b)  $\implies$  (a) : ceci résulte de la première assertion.  $\square$

**Lemme 2.6.3.** – Soit  $\underline{G} = \underline{G}_1 \rtimes_S \underline{G}_2$  un produit semi-direct de faisceaux fppf en groupes. On note  $i : \underline{G}_1 \rightarrow \underline{G}$ ,  $p : \underline{G} \rightarrow \underline{G}_2$  et  $h : \underline{G}_2 \rightarrow \underline{G}$  le scindage.

1. Soit  $\underline{P}_2$  un  $\underline{G}_2$ -faisceau principal homogène au-dessus de  $S$ . Alors on a une suite exacte de faisceaux fppf

$$1 \rightarrow \underline{G}_1^{h*P_2} \xrightarrow[\sim]{i^{h*P_2}} \underline{G}^{h*P_2} \xrightarrow[\sim]{p^{h*P_2}} \underline{G}_2^{P_2} \rightarrow 1$$

et donc une action à droite de  $H^0(S, \underline{G}_2^{P_2})$  sur  $H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}_1^{h*P_2})$ .

2. Pour chaque  $\underline{P}_2$ , on considère l'application

$$H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}_1^{h*P_2}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}^{h*P_2}) \xrightarrow[\sim]{\tau_{h*P_2}} H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G})$$

où  $\tau_{h*P_2}$  désigne de la bijection de torsion [17, III.2.6]. Alors les flèches précédentes induisent une bijection

$$\bigsqcup_{\underline{P}_2} H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}_1^{h*P_2}) / H^0(S, \underline{G}_2^{P_2}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G})$$

où  $\underline{P}_2$  parcourt les classes d'isomorphie de  $\underline{G}_2$ -faisceaux principaux homogènes au-dessus de  $S$ .

*Démonstration.* – (1) Voir [17, III.3.3], en particulier 3.3.4.

(2) Cette décomposition provient de la description des fibres de l'application scindée

$$p_* : H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}_2).$$

Si  $\underline{P}_2$  est un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{G}_2$ , on a  $p^*h^*\underline{P}_2 = \underline{P}_2$ . Ainsi, la fibre de  $p_*$  en  $[\underline{P}_2]$  est décrite par la torsion [17, III.3.3.4]

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}) & \xrightarrow{p^*} & H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}_2) \\ \downarrow \wr \tau_{h^*\underline{P}_2} & & \downarrow \wr \tau_{\underline{P}_2} \\ H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}_1^{\underline{P}_2}) & \xrightarrow{i^{h^*\underline{P}_2}} H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}^{\underline{P}_2}) & \xrightarrow{p^{h^*\underline{P}_2}} H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}_2^{\underline{P}_2}) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\ker(p_*^{h^*\underline{P}_2}) \xrightarrow{\sim} (p_*)^{-1}([h^*\underline{P}_2]).$$

Ainsi on a une bijection

$$\bigsqcup_{\underline{P}_2} \ker(p_*^{h^*\underline{P}_2}) \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{\underline{P}_2} (p_*)^{-1}([h^*\underline{P}_2]) \xrightarrow{\sim} H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}).$$

Mais  $H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}_1^{h^*\underline{P}_2})/H^0(S, \underline{G}_2^{\underline{P}_2}) \xrightarrow{\sim} \ker(p_*^{h^*\underline{P}_2})$  [17, III.3.3.4] d'où la bijection souhaitée.  $\square$

**Remarque 2.6.4.** – Des énoncés analogues valent pour la topologie fpqc mais demanderaient des précautions de théorie des ensembles ; les faisceaux fppf sont amplement suffisants pour les applications en vue.

**2.7. Cas représentable.** – Si  $G$  désigne un  $S$ -schéma en groupes, un  $G$ -torseur au-dessus de  $S$  est un  $S$ -schéma  $E$  muni d'une action à droite de  $G$  de sorte que le faisceau fppf sous-jacent  $\underline{E}$  à  $E$  soit un  $S$ -faisceau principal homogène sous le  $S$ -faisceau en groupes  $\underline{G}$  sous-jacent à  $G$ . Si  $G$  est affine au-dessus de  $S$ , on rappelle que tout  $S$ -faisceau principal homogène sous  $\underline{G}$  est représentable, c'est-à-dire est le  $S$ -faisceau sous-jacent à un  $G$ -torseur au-dessus de  $S$ .

Si  $G$  est affine et lisse au-dessus de  $S$ , tout  $G$ -torseur sur  $S$  est lisse et est trivialisé par un recouvrement étale de  $S$  (XXIV.8.1). En particulier, les énoncés précédents (Proposition 2.4.3, Lemme 2.6.3, etc.) valent pour la cohomologie étale en prenant garde de ne considérer que des faisceaux de groupes qui soient des schémas en groupes  $S$ -affines et  $S$ -lisses.

**Remarque 2.7.1.** – Le cas où le  $S$ -schéma en groupes  $G$  est  $S$ -affine est le seul essentiellement utilisé dans la suite. Au delà, on renvoie au chapitres XI.1 et XIII du livre du Raynaud [32] qui traitent respectivement du cas lisse et du cas d'un schéma abélien, voir aussi [28, th. III.4.3]. D'une façon générale, si  $G$  est  $S$ -plat, la représentabilité

des  $S$ -espaces principaux homogènes vaut dans le cadre de la théorie des espaces algébriques par application du théorème de descente fppf effective d'Artin, voir [2, §6] et [24, §10].

**2.8. Limites.** – Le but de ce paragraphe est de justifier des passages à la limite sur la base pour les schémas en groupes, leurs espaces principaux homogènes et les torsseurs. L'énoncé suivant est un avatar de VI<sub>B</sub>.10.2.

**Proposition 2.8.1.** – *Soit  $S_0$  un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Soit  $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  un système projectif de  $S_0$ -schémas affines au sens de [18, IV<sub>3</sub>.8.2] ; on pose  $S = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ .*

*Soit  $G_0$  un  $S_0$ -schéma en groupes de présentation finie. On pose  $G_\lambda = G_0 \times_{S_0} S_\lambda$  pour chaque  $\lambda \in \Lambda$  et  $G = G_0 \times_{S_0} S$ .*

(1) *Si  $X$  est un  $G$ -torseur sur  $S$ , alors il existe un indice  $\lambda$  et un  $G_\lambda$ -torseur  $X_\lambda$  sur  $S$  tel que  $X \cong X_\lambda \times_{S_\lambda} S$ .*

(2) *Soient  $\lambda \in \Lambda$  et  $X_\lambda, X'_\lambda$  deux  $G_\lambda$ -torsseurs au-dessus de  $S_\lambda$  qui deviennent isomorphes après changement de base à  $S$ . Alors il existe un indice  $\mu \geq \lambda$  tel que les  $G_\lambda$ -torsseurs  $X_\lambda$  et  $X'_\lambda$  deviennent isomorphes après changement de base à  $S_\mu$ .*

(3) *Si  $G$  est affine au-dessus de  $S$ , alors la flèche*

$$\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} H^1_{\text{fppf}}(S_\lambda, G_\lambda) \longrightarrow H^1(S, G)$$

*est bijective.*

*Démonstration.* – (1) D'après [18, IV<sub>3</sub>.8.2.2.(ii)], il existe un indice  $\lambda_1$ , un  $S_{\lambda_1}$ -schéma  $X_{\lambda_1}$  de présentation finie et un  $S$ -isomorphisme  $X \xrightarrow{\sim} X_{\lambda_1} \times_{S_{\lambda_1}} S$ . Pour tout  $\lambda \geq \lambda_1$ , on pose  $X_\lambda = X_{\lambda_1} \times_{S_{\lambda_1}} S_\lambda$ . D'après [18, IV<sub>3</sub>.8.2.3], il existe un indice  $\lambda_2 \geq \lambda_1$  et un morphisme  $a_{\lambda_2} : X_{\lambda_2} \times_{S_{\lambda_2}} G_{\lambda_2} \rightarrow X_{\lambda_2}$  induisant le morphisme d'action  $a : X \times_S G \rightarrow X$  par changement de base de  $S_{\lambda_2}$  à  $S$ . La même référence (ou VI<sub>B</sub>.10.0) indique qu'il existe un indice  $\lambda_3 \geq \lambda_2$  tel que  $a_{\lambda_3} = a_{\lambda_2} \times_{S_{\lambda_3}} S_{\lambda_2} : X_{\lambda_3} \times_{S_{\lambda_3}} G_{\lambda_3} \rightarrow X_{\lambda_3}$  définisse une action du  $S_{\lambda_3}$ -schéma en groupes  $G_{\lambda_3}$  sur  $X_{\lambda_3}$ . On utilise maintenant que  $X$  est un  $G$ -torseur sur  $S$ . D'après VI<sub>B</sub>.10.16, il existe un indice  $\lambda_4 \geq \lambda_3$  tel que  $X_{\lambda_4}$  est un  $G_{\lambda_4}$ -torseur.

(2) On commence par le cas où  $X'_\lambda$  est le  $G_\lambda$ -torseur trivial. L'hypothèse est alors que  $X_\lambda \times_{S_\lambda} S$  est le  $G$ -torseur trivial. Cela signifie que  $X_\lambda(S) \neq \emptyset$ . Soit  $f : S \rightarrow X_\lambda$  une telle  $S_\lambda$ -section. Comme  $S$  est la limite projective des  $(S_\mu)_{\mu \geq \lambda}$  [18, IV<sub>3</sub>.8.2.5] et que  $X_\lambda$  est de présentation finie sur  $S_\lambda$ , il existe  $\mu \geq \lambda$  telle que  $f$  provient par changement de base de  $S_\mu$  à  $S$  d'une section  $f_\mu : S_\mu \rightarrow X_\lambda \times_{S_\lambda} S_\mu$  en vertu de [18, IV<sub>3</sub>.8.8.2]. Ainsi  $X_\lambda(S_\mu) \neq \emptyset$  et le  $G_\lambda$ -torseur  $X_\lambda$  devient trivial après changement de base à  $S_\mu$ .

Pour le cas général, on utilise l'argument de torsion habituel. Quitte à remplacer  $S_0$  par  $S_\lambda$  et  $G_0$  par le  $S_\lambda$ -schéma en groupes tordu  $G_\lambda^{X'_\lambda}$ , le cas précédent indique qu'il existe un indice  $\mu \geq \lambda$  tel que le  $G_\lambda^{X'_\lambda}$ -torseur

$X_\lambda \wedge^{G_\lambda} (X'_\lambda)^{\text{op}}$  devienne trivial après changement de base à  $S_\mu$ . Ainsi les  $G_\lambda$ -torseurs  $X_\lambda$  et  $X'_\lambda$  deviennent isomorphe après changement de base à  $S_\mu$ .

(3) Cela résulte de (1) et (2) puisque les  $H^1$  classifient alors les toseurs.  $\square$

La proposition 2.8.1.(3) apparaît comme le cas représentable de la remarque suivante de Grothendieck [20, VII.5.14.(a)] rédigée par Margaux [27].

**Théorème 2.8.2.** – Soit  $S_0$  un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Soit  $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  un système projectif de  $S_0$ -schémas affines au sens de [18, IV.3.8.2] ; on pose  $S = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ .

Soit  $G_0$  un  $S$ -schéma en groupes localement de présentation finie. On pose  $G_\lambda = G_0 \times_{S_0} S_\lambda$  pour chaque  $\lambda \in \Lambda$  et  $G = G_0 \times_{S_0} S$ . Alors la flèche

$$\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} H^1_{\text{fppf}}(S_\lambda, G_\lambda) \longrightarrow H^1_{\text{fppf}}(S, G)$$

est bijective.

**2.9. Calculs galoisiens.** – On suppose que  $S$  est connexe (non vide) muni d'un point géométrique  $a : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$  où  $\Omega$  désigne un corps séparablement clos. Selon la convention de [19, V.4], un morphisme fini étale  $f : P \rightarrow S$  est appelé un *revêtement galoisien* si  $P$  est connexe et si le groupe fini  $\text{Aut}_S(P)$  agit de façon simplement transitive sur l'ensemble fini  $P_a(\Omega)$  avec  $P_a = P \times_S \text{Spec}(\Omega)$  (cette propriété ne dépend pas du choix du point base). Le groupe fini opposé  $(\text{Aut}_S(P))^{\text{opp}}$  est appelé le groupe de Galois du revêtement galoisien  $f$  et est noté  $\text{Gal}(P/S)$ . Le  $S$ -schéma en groupe fini constant  $\text{Gal}(P/S)_S$  agit à droite sur le  $S$ -schéma  $P$  et cette action fait de  $P$  un  $S$ -torseur sous  $\text{Gal}(P/S)$ .

Soit  $\tilde{S} \rightarrow S$  un revêtement galoisien et notons  $\Gamma = \text{Gal}(\tilde{S}/S)$ . Si  $\underline{G}$  est un  $S$ -faisceau fppf en groupes, on a une bijection naturelle (fin de la section 2.2 ou [17, §III.3.7, prop. 3.7.6])

$$H^1(\Gamma, \underline{G}(\tilde{S})) \xrightarrow{\sim} \ker\left(H^1_{\text{fppf}}(S, \underline{G}) \rightarrow H^1_{\text{fppf}}(\tilde{S}, \underline{G})\right),$$

où  $H^1(\Gamma, \underline{G}(\tilde{S}))$  désigne l'ensemble de cohomologie des groupes définis par des cocycles [33]. Cette construction généralise celle de la cohomologie galoisienne. Elle associe à un 1-cocycle  $z : \Gamma \rightarrow \underline{G}(\tilde{S})$  l'espace principal homogène  $\underline{E}_z$  défini par

$$\underline{E}_z(T) = \left\{ g \in \underline{G}(T \times_S \tilde{S}) \mid \sigma(g) \cdot z_{\sigma, T \times_S \tilde{S}} = g \quad \forall \sigma \in \Gamma \right\}$$

pour tout  $T \rightarrow S$ . Dans cette expression  $\sigma(g)$  désigne le transformé de  $g$  suivant l'action à gauche de  $\Gamma$  sur  $\underline{G}(T \times_S \tilde{S})$  et  $z_{\sigma, T \times_S \tilde{S}}$  l'image de  $z_\sigma$  par la restriction  $p_2^* : \underline{G}(\tilde{S}) \rightarrow \underline{G}(T \times_S \tilde{S})$ .

On note  $(S^{\text{sc}}, s^{\text{sc}})$  le revêtement universel de  $(S, a)$  [19, §V.7]. La référence originelle impose à  $S$  d'être localement noethérien, le cas général se trouve dans le livre [35, §5.4]. Par construction le revêtement universel  $S^{\text{sc}}$  est une limite projective de revêtements galoisiens  $(S_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de  $S$ . Le groupe fondamental  $\pi_1(S, a)$  est le groupe profini défini

comme la limite projective des groupes finis  $\text{Gal}(S_\lambda | S)$ . Pour chaque  $\lambda$ , on dispose de la bijection

$$H^1(\text{Gal}(S_\lambda | S), \underline{G}(S_\lambda)) \xrightarrow{\sim} \ker\left(H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S_\lambda, \underline{G})\right).$$

Le passage à la limite formel produit la bijection

$$\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} H^1(\text{Gal}(S_\lambda | S), \underline{G}(S_\lambda)) \xrightarrow{\sim} \ker\left(H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}) \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} H_{\text{fppf}}^1(S_\lambda, \underline{G})\right).$$

La limite inductive  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} \underline{G}(S_\lambda)$  est un  $\pi_1(S, a)$ -groupe discret et pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $\underline{G}(S_\lambda) = \left(\varinjlim_{\mu \geq \lambda} \underline{G}(S_\mu)\right)^{\ker(\pi_1(S, a) \rightarrow \text{Gal}(S_\mu | S))}$ . Par définition de la cohomologie des groupes profinis [33], l'expression précédente donne lieu à la bijection

$$(\star) \quad H^1\left(\pi_1(S, a), \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} \underline{G}(S_\lambda)\right) \xrightarrow{\sim} \ker\left(H_{\text{fppf}}^1(S, \underline{G}) \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} H_{\text{fppf}}^1(S_\lambda, \underline{G})\right).$$

**Remarque 2.9.1.** – Il faut prendre garde que, dans cette généralité, le morphisme de groupes  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} \underline{G}(S_\lambda) \rightarrow \underline{G}(S^{\text{sc}})$  n'est pas en général bijectif. Soit  $p$  un nombre premier et donnons l'exemple de  $S = \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ , muni du point base  $a : \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ . Alors  $a$  est le revêtement universel de  $S$  et  $S^{\text{sc}} := \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  est la limite projective des  $S_n = \text{Spec}(\mathbb{F}_{p^{n+1}})$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On considère le  $S$ -schéma en groupes vectoriel  $G = V(E)$  associé au  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{F}_p^{(\mathbb{N})}$ , défini par  $G(A) = \text{Hom}_A(E \otimes_{\mathbb{F}_p} A, A) = \text{Hom}_A(A^{(\mathbb{N})}, A) \xrightarrow{\sim} A^{\mathbb{N}}$  pour toute  $\mathbb{F}_p$ -algèbre  $A$  (I.4.6). Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\overline{\mathbb{F}}_p$  telle que  $x_n \notin \mathbb{F}_{p^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit un élément de  $G(S^{\text{sc}}) = (\overline{\mathbb{F}}_p)^{\mathbb{N}}$  qui n'est pas dans l'image de  $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{F}_{p^{n+1}})^{\mathbb{N}} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} G(\mathbb{F}_{p^{n+1}})$ .

**Corollaire 2.9.2.** – *Sous les hypothèses précédentes, on suppose de plus que  $S$  est quasi-compact et quasi-séparé, et que  $\underline{G}$  est représentable par un  $S$ -schéma  $G$  localement de présentation finie au-dessus de  $S$ .*

(1) *La flèche  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} G(S_\lambda) \rightarrow G(S^{\text{sc}})$  est un isomorphisme de sorte que  $G(S^{\text{sc}})$  est un  $\pi_1(S, s^{\text{sc}})$ -groupe discret.*

(2) *On a une bijection naturelle*

$$H^1(\pi_1(S, a), G(S^{\text{sc}})) \xrightarrow{\sim} \ker\left(H_{\text{fppf}}^1(S, G) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S^{\text{sc}}, G)\right).$$

(3) *On suppose que  $G$  est fini constant tordu. Alors  $H^1(S^{\text{sc}}, G) = 1$  et la flèche naturelle*

$$H^1(\pi_1(S, s), G(S^{\text{sc}})) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(S, G)$$

*est bijective.*

**Démonstration.** – (1) Comme  $G$  est localement de présentation finie, la flèche  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} G(S_\lambda) \rightarrow G(S^{\text{sc}})$  est bijective [18, IV<sub>3</sub>.8.8.2].

(2) Le Théorème 2.8.2 montre que l'application  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} H_{\text{fppf}}^1(S_\lambda, \underline{G}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S^{\text{sc}}, G)$  est bijective. C'est donc un cas particulier de la bijection  $(\star)$ .



(3) Comme  $G$  est lisse, on peut remplacer la cohomologie fppf par la cohomologie étale. Soit  $X$  un  $G$ -torseur au-dessus de  $S^{\text{sc}}$ . D'après la proposition 2.8.1.(1), il existe un indice  $\lambda$  tel que  $X$  provient d'un  $G$ -torseur  $X_\lambda$  au-dessus de  $S_\lambda$ . Alors  $X_\lambda$  est fini étale au-dessus de  $S_\lambda$ . Or  $S^{\text{sc}}$  est aussi le revêtement universel de  $S_\lambda$ , donc  $X_\lambda(S) \neq \emptyset$ . Par suite  $X(S) \neq \emptyset$  et  $X$  est le  $G$ -torseur trivial. Ceci montre la trivialité de  $H_{\text{fppf}}^1(S^{\text{sc}}, G)$  et l'assertion (2) produit la bijection souhaitée  $H^1(\pi_1(S, s), G(S^{\text{sc}})) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^1(S, G)$ .  $\square$

**Remarque 2.9.3.** – Pour la démonstration de (2) pour  $G$  affine au-dessus de  $S$ , notons que la proposition 2.8.1.(3) suffit en lieu et place du Théorème 2.8.2.

### 3. Sous-groupes paraboliques

Soit  $S$  un schéma. Soit  $H$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs, c'est-à-dire un  $S$ -schéma en groupes  $S$ -affine,  $S$ -lisse, dont les fibres géométriques sont réductives (connexes), voir XIX.1. On rappelle qu'un  $S$ -sous-schéma en groupes  $P$  de  $H$  est *parabolique* s'il est fermé dans  $H$ , lisse sur  $S$  et tel que  $P_{\bar{s}}$  est un  $\bar{\kappa}(s)$ -sous-groupe parabolique de  $H_{\bar{s}}$  pour tout  $s \in S$  (XXVI.1.1). On sait alors que le quotient fppf  $H/P$  est représentable par un  $S$ -schéma projectif et cette propriété caractérise d'ailleurs les sous-groupes paraboliques parmi les sous-schémas en groupes fermés de  $H$  lisses sur  $S$  (XXII.5.8.5).

**3.1. Liens entres paraboliques et leurs radicaux unipotents.** – Soit  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique du  $S$ -schéma en groupes réductifs  $H$ . On note  $\text{rad}^u(P)$  son radical unipotent,  $P^{\text{red}} = P/\text{rad}^u(P)$  son quotient réductif et  $p : P \rightarrow P^{\text{red}}$  le morphisme canonique (XXVI.1.21). Le fait suivant est bien connu dans le cas d'un corps algébriquement clos [3, prop. 4.4.(c)].

**Proposition 3.1.1.** – Soit  $Q$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$  inclus dans  $P$ .

- (1) On a  $\text{rad}^u(P) \subseteq \text{rad}^u(Q)$  et  $\text{rad}^u(P)$  est distingué dans  $\text{rad}^u(Q)$  et dans  $Q$ .
- (2)  $P = Q \iff \text{rad}^u(P) = \text{rad}^u(Q) \iff \text{Lie}(Q) = \text{Lie}(P)$ .
- (3) Si  $P$  admet un sous-groupe de Levi  $L$ , alors  $Q \cap L$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $L$  et  $Q = \text{rad}^u(P) \rtimes (L \cap Q)$ .

*Démonstration.* – (1) L'assertion à démontrer est locale pour la topologie étale sur  $S$  si bien que le lemme XXVI.1.13 permet de supposer que le couple  $(G, Q)$  est épinglé. Cela signifie que  $H$  admet un épinglage  $\mathcal{E} = (T, M, R, \Delta, (X_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$  adapté à  $Q$ , i.e.  $Q$  est l'unique  $S$ -groupe de type (R) d'algèbre de Lie  $\mathcal{L}ie(Q/S) = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R'_Q} \mathfrak{h}^\alpha$  où  $R'_Q$  est une partie de  $R$  contenant  $R_+$  (XXVI.1.11). En d'autres mots, avec les notations de XXII.5.4, on a  $Q = H_{R'_p}$ . On pose  $\Delta(Q) = \Delta \cap (-R'_Q)$ , alors on a la décomposition

$$(\clubsuit) \quad \text{rad}^u(Q) = U_{R''_Q} = \prod_{\alpha \in R''_Q} U_\alpha,$$

où  $R''_Q$  désigne l'ensemble des racines positives qui dans leur décomposition sur  $\Delta$ , contiennent au moins un élément de  $\Delta - \Delta(Q)$  avec un coefficient non nul (XXVI.1.12). Le sous- $S$ -groupe

$$Z_{\Delta(Q)} = \underline{\text{Cent}}_G(T_{\Delta(Q)}),$$

(où  $T_{\Delta(Q)}$  est le tore maximal du noyau commun des  $\alpha \in \Delta(Q)$ ) est l'unique  $S$ -sous-groupe de Levi de  $Q$  contenant  $T$ ; on a  $Q = \text{rad}^u(Q) \rtimes Z_{\Delta(Q)}$ .

Passons maintenant à  $P$ . Selon XXII.5.2.3, c'est un sous-groupe de type (R) contenant  $T$ ,  $P$  est donc épinglé par  $\mathcal{E}$  (XXII.5.4.1). On peut ainsi définir les sous-ensembles de racines  $\Delta(P)$ ,  $R_P$ ,  $R''_P$ , etc. L'inclusion  $Q \subseteq P$  produit des inclusions  $\mathcal{L}ie(Q/S) \subseteq \mathcal{L}ie(P/S)$ ,  $R'_Q \subseteq R'_P$ ,  $\Delta(Q) \subseteq \Delta(P)$ ,  $R''_P \subseteq R''_Q$ ,  $Z_{\Delta(Q)} \subseteq Z_{\Delta(P)}$  et  $\text{rad}^u(P) \subseteq \text{rad}^u(Q)$ .

Montrons que  $\text{rad}^u(Q)$  normalise  $\text{rad}^u(P)$ . On se donne un  $S$ -schéma  $\tilde{S}$ , et des éléments  $g \in \text{rad}^u(Q)(\tilde{S})$ ,  $h \in \text{rad}^u(Q)(\tilde{S})$  dans le but d'établir que le commutateur  $[g, h]$  appartient à  $\text{rad}^u(Q)(\tilde{S})$ . La décomposition ( $\clubsuit$ ) pour  $\text{rad}^u(Q)$  et  $\text{rad}^u(P)$  nous ramène au cas  $g = \exp(xX_\alpha)$ ,  $h = \exp(yX_\beta)$  pour  $x, y \in H^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}})$ ,  $\alpha \in R''_Q$  et  $\beta \in R''_P$ . En vertu de XXII.5.5.2, on a

$$\left[ \exp_\alpha(xX_\alpha), \exp_\beta(yX_\beta) \right] = \prod_{\substack{i, j \in \mathbb{N}^* \\ i\alpha + j\beta \in R}} \exp_{i\alpha + j\beta}(C_{i, j, \alpha, \beta} x^i y^j X_{i\alpha + j\beta}),$$

où les  $C_{i, j, \alpha, \beta} \in H^0(\tilde{S}, \mathcal{O}_{\tilde{S}})$  sont des constantes uniques. Etant donnés  $i, j \in \mathbb{N}^*$  tels que  $i\alpha + j\beta \in R$ , on observe que  $i\alpha + j\beta \geq \beta$  et que la décomposition de  $i\alpha + j\beta$  sur  $\Delta$  admet au moins un élément de  $\Delta \setminus \Delta(P)$  apparaissant avec un coefficient non nul. Ainsi  $i\alpha + j\beta \in R''_P$  pour chaque couple  $(i, j)$  apparaissant dans le produit ci-dessus et on conclut que  $[g, h] \in \text{rad}^u(P)(\tilde{S})$ .

On a montré que  $\text{rad}^u(Q)$  normalise  $\text{rad}^u(P)$ . Vu que  $Q = \text{rad}^u(Q) \rtimes Z_{\Delta(Q)}$  et que  $Z_{\Delta(Q)} \subseteq Z_{\Delta(P)}$ , on conclut que  $P$  normalise  $\text{rad}^u(Q)$ .

(2) L'assertion est locale pour la topologie étale, ce qui permet de localiser comme précédemment. Alors  $P$  et  $Q$  contiennent le tore maximal déployé  $T$  et on a  $\text{Lie}(P) = \text{Lie}(Q)$  si et seulement  $Q = P$  en vertu de XXII.5.3.5 (ou XXVI.1.4).

Par ailleurs, si  $\text{rad}^u(P) = \text{rad}^u(Q)$ , on obtient  $R''_Q = R''_P$  et partant  $\text{Lie}(Z_{\Delta(Q)}) = \text{Lie}(Z_{\Delta(P)})$ , d'où  $\text{Lie}(P) = \text{Lie}(Q)$  et  $Q = P$ .

(3) Soit  $L$  un  $S$ -sous-groupe de Levi de  $P$ . Une nouvelle fois, l'assertion à démontrer est locale pour la topologie étale sur  $S$  ce qui permet de travailler dans le cadre précédent. En vertu de XXVI.1.8, il existe un (unique)  $u \in \text{rad}^u(P)(S)$  tel que  $L = uZ_{\Delta(P)}u^{-1}$ . Vu que  $\text{rad}^u(P) \subseteq Q$  on peut donc supposer, sans perte de généralité, que  $L = Z_{\Delta(P)}$ . Le  $S$ -sous-groupe  $Z_{\Delta(P)}$  de  $H$  est de type (R) (XXII.5.2.5) et son algèbre de Lie est

$$\mathcal{L}ie(Z_{\Delta(P)}/S) = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R'_P \cap (-R'_P)} \mathfrak{h}^\alpha.$$

En d'autres mots,  $Z_{\Delta(P)} = H_{R'_P \cap (-R'_P)}$ , toujours avec les notations de XXII.5.4. En vertu de XXII.5.4.5,  $Z_{\Delta(P)} \cap Q$  est lisse en tout point de la section unité. En tenant

compte du cas des corps, on sait que  $(Z_{\Delta(P)} \cap Q)_s$  est un sous-groupe parabolique de  $Q_s$  pour tout  $s \in S$ , en particulier est connexe. Ainsi  $Z_{\Delta(P)} \cap Q = (Z_{\Delta(P)} \cap Q)^0$  est un  $S$ -groupe lisse, fermé dans  $Q$  et ses fibres géométriques sont paraboliques, c'est donc un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $Q$ .

En tenant compte une nouvelle fois du cas des corps, le  $S$ -morphisme  $j : \text{rad}^u(P) \rtimes (L \cap Q) \rightarrow Q$  est tel que  $j_s$  est un isomorphisme pour tout  $s \in S$ . Vu que  $\text{rad}^u(P) \rtimes (L \cap Q)$  est lisse sur  $S$ , on conclut que  $j$  est un isomorphisme [18, IV<sub>4</sub>.17.9.5].  $\square$

**Proposition 3.1.2.** – (1) (XXVI.1.20) On suppose que  $P$  admet un  $S$ -groupe de Levi  $L$ . Les applications

$$Q \mapsto Q \cap L = Q', \quad Q' \mapsto \text{rad}^u(P) \rtimes Q'$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des  $S$ -sous-groupes paraboliques de  $H$  contenus dans  $P$  et l'ensemble des  $S$ -sous-groupes paraboliques de  $L$ . De plus, les sous-groupes de Levi de  $Q'$  sont les sous-groupes de Levi de  $Q$  contenus dans  $L$ .

(2) Les applications

$$Q \mapsto Q/\text{rad}^u(P), \quad M \mapsto p^{-1}(M)$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des  $S$ -sous-groupes paraboliques de  $H$  contenus dans  $P$  et l'ensemble des  $S$ -sous-groupes paraboliques de  $P^{\text{red}}$ .

*Démonstration.* – (1) Cette démonstration ayant été laissée au lecteur, nous la rédisons ici à partir du cas connu des corps algébriquement clos [3, proposition 4.4.(c)]. On montre d'abord que les flèches sont bien définies. D'après la proposition 3.1.1.(3), si  $Q$  est un  $S$ -sous-schéma en groupes paraboliques de  $H$  contenu dans  $P$ , on a un isomorphisme de  $S$ -groupes  $\text{rad}^u(P) \rtimes (Q \cap L) \xrightarrow{\sim} Q$ . Par suite, le quotient fppf  $Q/\text{rad}^u(P)$  est représentable par le  $S$ -schéma  $Q' = Q \cap L$  qui est un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $L$ . Ceci montre que la première flèche est bien définie.

Pour définir la seconde flèche, c'est-à-dire  $M \mapsto p^{-1}(M)$ , on considère un  $S$ -sous-groupe parabolique  $M$  de  $P^{\text{red}}$  et on pose  $\widetilde{M} = p^{-1}(M)$ . Comme  $M$  et  $\text{rad}^u(P)$  sont lisses sur  $S$ ,  $\widetilde{M}$  est lisse sur  $S$  (VI<sub>B</sub>.9.2.(xii)). Les fibres géométriques de  $\widetilde{M}$  étant des sous-groupes paraboliques,  $\widetilde{M}$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$  inclus dans  $P$ . Par contruction, les deux flèches sont inverses l'une de l'autre, ce qui achève la preuve de ce fait.

(2) On suppose tout d'abord que  $P$  admet un  $S$ -sous-groupe de Levi  $L$ . On observe que  $q := p|_L : L \rightarrow P/\text{rad}^u(P)$  est un isomorphisme, donc (1) induit une correspondance bijective entre les sous-groupes paraboliques de  $L$  et ceux de  $P/\text{rad}^u(P)$  qui est donnée par  $Q' \mapsto q(Q') = (\text{rad}^u(P) \rtimes Q')/\text{rad}^u(P)$  et  $M \mapsto q^{-1}(M) = M \cap L$ . Suivant XXVI.1.9; le  $S$ -foncteur  $\text{Lev}(P)$  des sous-groupes de Levi de  $P$  est représentable par un  $\text{rad}^u(P)$ -torseur sur  $S$ . En particulier,  $P$  admet un sous-groupe de Levi localement sur  $S$  pour la topologie fppf, ceci entraîne la correspondance souhaitée.  $\square$

**Proposition 3.1.3.** – (1) Le  $S$ -faisceau fppf en groupes normalisateur  $\underline{N}_H(\mathrm{rad}^u(P))$  est représentable par un  $S$ -sous-schéma en groupes  $N_H(\mathrm{rad}^u(P))$  fermé de  $H$ .

(2) On suppose que  $S$  est un  $\mathbb{Q}$ -schéma. Alors  $P = N_H(\mathrm{rad}^u(P))$ .

*Démonstration.* – (1) On pose  $U = \mathrm{rad}^u(P)$ , c'est un  $S$ -schéma en groupes lisse à fibres géométriques connexes (et résolubles) de sorte que le normalisateur  $\underline{N}_H(U)$  est représentable par un sous-schéma fermé  $N_H(U)$  de  $H$  puisque  $U$  est lisse à fibres connexes (VI<sub>B</sub>.6.5.5 ou XI.6.1 ou [6, th. 3.8.2]).

(2) Rappelons d'abord le cas  $S = \mathrm{Spec}(k)$ ,  $k$  corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Cette hypothèse intervient pour identifier le normalisateur schématique à celui des  $k$ -variétés intervenant dans les deux références à suivre. On a  $P \subseteq N_H(U)$  et on veut montrer l'inclusion réciproque. D'après une construction de Platonov [31] (voir aussi [22, §30.3]), on associe à  $U$  un  $k$ -groupe parabolique canonique  $Q = P(U)$  tel que  $Q = N_H(V)$  où  $V = \mathrm{rad}^u(Q)$ . Comme  $U$  est un sous-groupe lisse unipotent connexe distingué de  $Q$ , on a  $U \subseteq V = \mathrm{rad}^u(Q)$ . On souhaite montrer que  $U = V$  et que  $P = Q$ .

Comme  $P$  normalise  $U$ ,  $P$  normalise  $Q$ , donc  $P \subseteq Q = N_H(Q)$ . Soit  $M$  un  $k$ -sous-groupe de Levi de  $Q$ . Alors suivant [3, prop. 4.4.c],  $P$  se décompose en  $P = V \rtimes (M \cap P)$  et  $M \cap P$  est un sous-groupe parabolique de  $M$ ; en particulier  $V \subseteq P$ . Or  $P \subseteq Q = N_H(V)$ , donc  $V$  est distingué dans  $P$  d'où  $V \subseteq U = \mathrm{rad}^u(P)$ . On a donc  $U = V$  et le radical unipotent de  $M \cap P$  est trivial. On se souvient alors que  $M \cap P$  est un  $k$ -sous-groupe parabolique de  $M$ , d'où l'on conclut que  $M = M \cap P$  et partant que  $Q = V \rtimes M = P$ .

Pour le cas d'une base arbitraire  $S$  de caractéristique nulle,  $P$  est un sous-schéma fermé de  $N_H(U)$  tel que  $P_{\bar{s}} = N_H(P)_{\bar{s}}$  pour tout  $s \in S$ . On conclut que  $P = N_H(P)$ .  $\square$

**Remarque 3.1.4.** – Il faut prendre garde que la proposition 3.1.3.(2) est fausse sans l'hypothèse de caractéristique nulle. Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique 2. On considère le  $k$ -groupe semi-simple  $G = \mathrm{PGL}_2 = \mathrm{GL}_2 / \mathbb{G}_m$  sur  $k$  où  $\mathrm{GL}_2$  est muni des coordonnées standard  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . L'équation  $c = 0$  définit le sous-groupe de Borel standard  $B$  de  $G$  dont on note  $U$  le radical unipotent. L'équation  $c^2 = 0$  définit un  $k$ -sous-groupe  $J$  de  $G$  de sorte que  $B$  est le  $k$ -schéma réduit associé. Nous affirmons que  $J$  est un sous-schéma de  $N_G(U)$  et donc que  $B \subsetneq N_G(U)$ . En d'autres mots, le résultat classique «  $P = N_G(U)$  » ([22, §30.4, exercice 4]) ne vaut que dans le cadre des  $k$ -schémas réduits.

On note  $u_{\pm} : \mathbb{G}_a \rightarrow G$  les sous-groupes radiciels standard de  $G$  et  $\alpha_2$  le noyau de l'homomorphisme de groupes  $\mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$ ,  $t \mapsto t^2$ . En vertu de [39, prop. 4], le morphisme de  $k$ -schémas

$$\alpha_2 \times_k B \rightarrow J, (x, b) \mapsto u_{-}(x)b$$

est un isomorphisme. On est ramené à vérifier que  $u_-(\alpha_2) \subseteq N_G(U)$ . Soient  $A$  une  $k$ -algèbre,  $x \in \alpha_2(A)$  et  $b \in A$ ; on calcule dans  $\mathrm{GL}_2(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+bx & b \\ 2b+bx^2 & 1+bx \end{pmatrix} = (1+bx) \begin{pmatrix} 1 & b(1+bx) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que  $u_-(\alpha_2) \subseteq N_G(U)$  et partant que  $J \subseteq N_G(U)$ .

**3.2. Comportement par extension centrale.** – Le foncteur  $\underline{\mathrm{Par}}(H)$  des sous-groupes paraboliques de  $H$  est représentable par un  $S$ -schéma noté  $\mathrm{Par}(H)$  appelé le  $S$ -schéma des sous-schémas en groupes paraboliques de  $H$  (XXVI.3). Le  $S$ -schéma  $\mathrm{Par}(H)$  est un  $S$ -schéma projectif et est muni d'une action naturelle à gauche de  $H$ . En outre, on dispose d'une application type  $\mathfrak{t}_H : \mathrm{Par}(H) \rightarrow \mathrm{Of}(\mathrm{Dyn}(H))$  dont le but est le schéma fini étale des parties ouvertes et fermées du  $S$ -schéma fini de Dynkin  $\mathrm{Dyn}(H)$  (XXIV.3). Par construction l'application  $\mathfrak{t}_H(S) : \mathrm{Par}(H)(S) \rightarrow \mathrm{Of}(\mathrm{Dyn}(H))$  est invariante pour l'action de  $H(S)$ . Ces constructions se comportent bien par extension centrale.

**Lemme 3.2.1.** – *Soit  $H'$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs et  $f : H' \rightarrow H$  un  $S$ -homomorphisme surjectif dont le noyau est un  $S$ -groupe de type multiplicatif central.*

(1) *L'image inverse définit un isomorphisme  $f^* : \mathrm{Par}(H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Par}(H')$  entre le  $S$ -schéma des paraboliques de  $H$  et celui de  $H'$ .*

(2) *L'image inverse produit une bijection entre l'ensemble des couples  $(P, L)$  où  $P$  est un  $S$ -groupe parabolique de  $H$ ,  $L$  un  $S$ -sous-groupe de Levi de  $P$  et les couples  $(P', L')$  similaires pour  $H'$ . En outre, l'application réciproque est le passage au quotient par  $\ker(f)$ .*

(3) *Si  $P$  désigne un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$  d'image inverse  $P'$ , alors le normalisateur  $\underline{N}_H(P')$  de  $P'$  pour l'action adjointe de  $H$  sur  $H'$  est représentable par  $P$ .*

(4) *Il y a un isomorphisme naturel  $f^* : \mathrm{Dyn}(H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dyn}(H')$  et le diagramme*

$$(\spadesuit) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Par}(H) & \xrightarrow[\sim]{f^*} & \mathrm{Par}(H') \\ \downarrow \mathfrak{t}_H & & \downarrow \mathfrak{t}_{H'} \\ \mathrm{Of}(\mathrm{Dyn}(H)) & \xrightarrow[\sim]{f^*} & \mathrm{Of}(\mathrm{Dyn}(H')). \end{array}$$

*commute.*

**Démonstration.** – Tout d'abord, nous affirmons que  $f$  est un quotient fppf. Dans ce but, on considère le quotient fppf  $H'/\ker(f)$  qui est représentable par un  $S$ -schéma en groupes réductifs  $\tilde{H}$  (XXIII.4.3.2). Le morphisme  $f$  se factorise alors en un monomorphisme surjectif  $\tilde{f} : \tilde{H} \rightarrow H$ . Vu que  $H$  est de présentation finie et séparé sur  $S$ , que  $\tilde{H}$  est réductif, ceci entraîne que  $\tilde{f}$  est une  $S$ -immersion fermée surjective (XVI.4.5.(a)). Pour chaque  $s \in S$ ,  $\tilde{f}_s$  est une immersion fermée surjective entre  $\kappa(s)$ -schémas lisses, donc  $\tilde{f}_s$  est un isomorphisme. Vu que  $\tilde{H}$  est plat sur  $S$ , on conclut

que  $\tilde{f}$  est un  $S$ -isomorphisme [18, IV<sub>4</sub>.17.9.5]. Ainsi le morphisme  $f$  est un quotient fppf.

(1) Si  $P$  est un  $S$ -groupe parabolique de  $H$ , nous affirmons que  $P' = f^{-1}(P)$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H'$ . En effet, on a un isomorphisme de  $S$ -faisceaux fppf  $H'/P' \xrightarrow{\sim} H/P$ . Comme  $H/P$  est représentable par un  $S$ -schéma projectif lisse, il en est de même de  $H'/P'$ , d'où l'on conclut que  $P'$  est un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $H'$ . Dans l'autre sens, on part d'un sous-groupe parabolique  $P'$  de  $H'$ . Comme  $P$  contient localement pour la topologie étale un sous-groupe de Borel, on sait que  $Z(H') \subseteq P'$ , d'où  $\ker(f) \subseteq P'$ . Le quotient fppf  $P = P'/\ker(f)$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes fermé de  $H = H'/\ker(f)$  (IX.2.5), qui est  $S$ -lisse (VI<sub>B</sub>.9.2.(xii)) et  $H/P$  est représentable par le  $S$ -schéma projectif lisse  $H'/P'$ . Ainsi  $P$  est un  $S$ -sous-schéma en groupes paraboliques de  $G$ .

(2) Ici aussi, il suffit de voir que les applications en jeu sont bien définies. Soit  $(P, L)$  un couple où  $P$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique et  $L$  un  $S$ -sous-groupe de Levi de  $P$ . On doit montrer que  $L' = f^{-1}(L)$  est un  $S$ -sous-groupe de Levi du  $S$ -sous-groupe parabolique  $P'$  de  $H'$  (suivant (1)). D'après le théorème XXVI.4.3.2, il existe un unique  $S$ -sous-groupe parabolique  $Q$  de  $H$  tel que  $L = P \cap Q$ . Posant  $Q' = f^{-1}(Q)$ , on a  $L' = P' \cap Q'$ . Nous prétendons que  $L'$  est un sous-groupe de Levi de  $P'$  et pour cela on va utiliser le critère XXVI.4.3.2.(b).(v). En d'autres mots, il suffit de montrer que  $\text{rad}^u(P') \cap Q' = 1$  et que  $\text{rad}^u(Q') \cap P' = 1$ . Les fibres géométriques du  $S$ -groupe affine  $\text{rad}^u(P') \cap \ker(f)$  sont unipotentes et en même temps de type multiplicatif; elle sont donc triviales en vertu de [12, cor. IV.2.2.4]. On en déduit que  $\text{rad}^u(P') \cap \ker(f) = 1$  (par [18, IV<sub>4</sub>.17.9.5]) et la restriction de  $f : \text{rad}^u(P') \cap Q' \rightarrow H$  est un monomorphisme. Or  $\text{rad}^u(P) \cap Q = 1$ , d'où aussitôt  $\text{rad}^u(P') \cap Q' = 1$ . De la même façon, on a  $\text{rad}^u(Q') \cap P = 1$  et on conclut que  $L'$  est un  $S$ -sous-groupe de Levi de  $P'$ .

Dans l'autre sens, si  $P'$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H'$  et  $L'$  est un  $S$ -groupe de Levi de  $H'$ , on écrit de même  $L' = P' \cap Q'$  où  $Q'$  est opposé à  $P'$ . On pose  $L = L'/\ker(f)$  (XXII.4.3.3), alors  $L = P \cap Q$  où  $P = f(P')$  et  $Q = f(Q')$ . Alors  $L$  est à fibres géométriques réductives, donc  $L$  est un  $S$ -groupe de Levi de  $P$  en vertu de la caractérisation XXVI.4.3.2(b).(i).

(3) On a un monomorphisme  $P \rightarrow \underline{N}_H(P')$  de  $S$ -faisceaux fppf en groupes. Par ailleurs, on a un monomorphisme  $\underline{N}_H(P') \rightarrow \underline{N}_H(P)$ . Or  $\underline{N}_H(P)$  est représentable par  $P$  (XXII.5.8.5), d'où l'on conclut que le  $S$ -faisceau fppf  $\underline{N}_H(P')$  est représentable par  $P$ .

(4) On commence par le cas où  $H'$  est déployable, c'est-à-dire muni d'un tore maximal  $T' = D_S(M')$  et d'un système de racines  $R \subseteq M'$  satisfaisant les conditions de XXII.1.12 qui font de  $(H', T', M', R)$  un déploiement de  $H'$ . On applique alors XXII.4.3.1 en posant  $T = T'/\ker(f)$ ; on sait que  $T = D_S(M)$  est un  $S$ -tore déployé maximal de  $H$ , que  $R$  est un système de racines de  $H$  par rapport à  $T$  et que  $(H, T, M, R)$  est un déploiement de  $H$ . On munit  $R$  d'un ordre, on note alors  $R_+$  le sous-ensemble des racines positives. On note  $B$  (resp.  $B'$ ) le sous-groupe de Borel de  $H$  (resp.  $H'$ ) associé à cet ordre (XXII.5.1). Ceci donne lieu à un morphisme

de données radicielles épinglées  $\Phi(H, B, T) \rightarrow \Phi(H', B', T')$  d'où un isomorphisme de groupes finis entre leurs diagrammes de Dynkin respectifs  $\Delta := \Delta(H', B', T') \cong \Delta' := \Delta(H, B, T)$  (XXI.6.1.3) et partant des  $S$ -schémas finis constants  $f^* : \text{Dyn}(H) \cong \text{Dyn}(H')$ . Ce morphisme ne dépend pas du choix d'un déploiement de  $H$ . Montrons la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Par}(H)(S) & \xrightarrow[\sim]{f^*} & \text{Par}(H')(S) \\ \downarrow \mathfrak{t}_H & & \downarrow \mathfrak{t}_{H'} \\ \text{Of}(\text{Dyn}(H))(S) & \xrightarrow[\sim]{f^*} & \text{Of}(\text{Dyn}(H'))(S). \end{array}$$

Étant donné un  $S$ -sous-groupe parabolique  $Q$  de  $H$  d'image inverse  $Q'$  dans  $H'$ , on souhaite établir que  $f^*(\mathfrak{t}_H(Q)) = \mathfrak{t}_{H'}(Q')$ . On sait qu'il existe un unique  $S$ -sous-groupe parabolique  $P$  de  $H$  tel que  $B \subseteq Q$  et  $\mathfrak{t}_H(Q) = \mathfrak{t}_H(P)$  (XXVI.3.6). Alors  $Q$  et  $P$  sont localement  $H$ -conjugués pour la topologie fpqc sur  $S$  (XXVI.3.3) de sorte qu'il suffit de vérifier la commutativité souhaitée pour  $P$  et son image inverse  $P'$  dans  $H'$ . Le  $S$ -sous-groupe  $P$  est un sous-groupe de type (R) de  $H$  (XXII.5.2.3) qui contient le  $S$ -tore déployé maximal  $T$ ; en vertu de XXII.5.2.1, quitte à localiser sur  $S$  pour la topologie de Zariski, l'algèbre de Lie de  $P$  est de la forme  $\mathcal{L}ie(P/S) = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in R_P} \mathfrak{h}^\alpha$  pour une partie  $R_P$  de l'ensemble des racines  $R$  de  $T$  sur  $\mathfrak{h} = \mathcal{L}ie(H/S)$ . Par définition,  $\mathfrak{t}_H(P)$  est la partie  $\Delta(P)_S$  de  $\Delta_S$  associé au sous-ensemble  $\Delta(P) = \Delta \cap (-R_P)$  de  $\Delta$ . On va utiliser l'interprétation classique de  $\Delta(P)$  en terme du sous- $S$ -groupe de Levi associé  $Z_{\Delta(P)} = \text{Cent}_H(T_{\Delta(P)})$  de  $P$ , où  $T_{\Delta(P)}$  désigne le tore maximal de l'intersection des  $\ker(\alpha)$  pour  $\alpha$  parcourant  $\Delta(P)$  (XXVI.1.12). Comme dans le cas des groupes algébriques [34, §8.4.1], on a la décomposition

$$\mathcal{L}ie(Z_{\Delta(P)}/S) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in [\Delta(P)]} \mathfrak{h}^\alpha$$

où  $[\Delta(P)]$  désigne le sous-système de racines de  $R$  engendré par  $\Delta(P)$ . Alors  $\Delta(P)$  est le diagramme de Dynkin du système de racines  $\Phi(Z_{\Delta(P)}, T)$  relatif au sous-groupe de Borel  $B \cap L$  de  $L$ . L'assertion (2) indique que  $Z'_{\Delta(P)} = f^{-1}(Z_{\Delta(P)})$ . Comme la restriction  $f : Z'_{\Delta(P)} \rightarrow Z_{\Delta(P)}$  est un morphisme de  $S$ -groupes réductifs déployés à noyau central de type multiplicatif, XXII.4.3.1 montre que le morphisme de données radicielles épinglées  $\Phi(Z_{\Delta(P)}, B \cap T, T) \rightarrow \Phi(Z'_{\Delta(P)}, B' \cap T', T')$  induit une bijection sur les racines, d'où un isomorphisme  $\Delta(P) \xrightarrow{\sim} \Delta(P')$ .  $\square$

Passons maintenant au cas général en reprenant la construction de  $\text{Dyn}(H)$  de XXIV.4.3. Soit  $\tilde{S} \rightarrow S$  un morphisme étale couvrant tel que  $H \times_S \tilde{S}$  soit déployable. Alors  $\text{Dyn}(H \times_S \tilde{S})$  est muni d'une donnée de descente canonique, c'est-à-dire d'un  $\tilde{S} \times_S \tilde{S}$ -isomorphisme canonique  $c : p_1^*(\text{Dyn}(H \times_S \tilde{S})) \xrightarrow{\sim} p_2^*(\text{Dyn}(H \times_S \tilde{S}))$  tel que  $\text{pr}_{3,1}^*(c) = \text{pr}_{3,2}^*(c) \circ \text{pr}_{2,1}^*(c)$  (IV.2.1) où  $\text{pr}_{i,j} : \tilde{S} \times_S \tilde{S} \times_S \tilde{S} \rightarrow \tilde{S} \times_S \tilde{S}$  désigne la projection sur le facteur  $(i, j)$ . Par définition  $\text{Dyn}(H)$  est le  $S$ -schéma descendu de  $\tilde{S}$



à  $S$  de  $\text{Dyn}(H \times_S \tilde{S})$  ; il est défini pour tout  $S$ -schéma  $S^\sharp$  par

$$\text{Dyn}(H)(S^\sharp) = \left\{ x \in \text{Dyn}(H \times_S S^\sharp \times_S \tilde{S}) \mid c \circ \text{pr}_1^*(x) = \text{pr}_2^*(x) \in \text{Dyn}(H \times_S S^\sharp \times_S \tilde{S} \times_S \tilde{S}) \right\}.$$

Le  $\tilde{S}$ -groupe  $H' \times_S \tilde{S}$  est aussi déployable et on dispose également d'un  $\tilde{S} \times_S \tilde{S}$ -isomorphisme canonique  $c' : p_1^*(\text{Dyn}(H' \times_S \tilde{S})) \xrightarrow{\sim} p_2^*(\text{Dyn}(H' \times_S \tilde{S}))$ . L'isomorphisme  $\tilde{f}^* : \text{Dyn}(H \times_S \tilde{S}) \xrightarrow{\sim} \text{Dyn}(H' \times_S \tilde{S})$  défini précédemment est compatible aux données de descente, c'est-à-dire que le carré suivant

$$\begin{array}{ccc} p_1^*(\text{Dyn}(H \times_S \tilde{S})) & \xrightarrow{\sim} & p_2^*(\text{Dyn}(H \times_S \tilde{S})) \\ \downarrow p_1^*(\tilde{f}^*) & & \downarrow p_2^*(\tilde{f}^*) \\ p_1^*(\text{Dyn}(H' \times_S \tilde{S})) & \xrightarrow{\sim} & p_2^*(\text{Dyn}(H' \times_S \tilde{S})) \end{array}$$

commute. Ainsi  $\tilde{f}^*$  se descend en un  $S$ -isomorphisme  $f^* : \text{Dyn}(H) \xrightarrow{\sim} \text{Dyn}(H')$ . La commutativité du diagramme ( $\spadesuit$ ) sur les types suit par descente.

Par exemple, ce type de dévissage peut être employé pour travailler avec des groupes adjoints, notamment lorsque l'on travaille avec les algèbres de Lie (e.g. XXIV.3).

**Proposition 3.2.2.** – Soient  $H$  un  $S$ -groupe réductif et  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$ .

- (1) Si  $H/S$  est adjoint, alors  $P = N_H(\text{Lie}(H))$ .
- (2) Si le quotient adjoint  $\pi : H \rightarrow H^{\text{ad}}$  est lisse, alors  $P = N_H(\text{Lie}(P))$ .

Le  $S$ -groupe  $N_H(\text{Lie}(H))$  désigne le normalisateur pour l'action adjointe de  $H$  dont on sait qu'il est représentable par un sous  $S$ -schéma en groupes fermé de  $H$  de présentation finie sur  $S$  (XX.5.3.0)

*Démonstration.* (1) Le  $S$ -groupe  $H$  est de type (RA) (XXII.5.1.7.a) si bien que  $P$  est un  $S$ -sous-groupe de type (RA) de  $H$  (XXII.5.2.6). Alors le normalisateur  $N_H(\text{Lie}(P))$  est lisse le long de la section unité et on a  $H = N_H(\text{Lie}(P))^0$  (XXII.5.3.1). Ainsi  $N_H(\text{Lie}(P))$  normalise  $H$  et le théorème de Chevalley  $P = N_H(P)$  (XXII.5.8.5) permet de conclure que  $H = N_H(\text{Lie}(P))$ .

(2) On note  $\pi : H \rightarrow H^{\text{ad}}$  le quotient adjoint de  $H$ . Le lemme 3.2.1.(1) montre que  $\ker(\pi) \subset P$ , que  $P^{\text{ad}} = P/\ker(\pi)$  est un  $S$ -parabolique de  $H$  satisfaisant  $P = \pi^{-1}(P^{\text{ad}})$ . Le morphisme  $\pi$  étant lisse, l'application tangente en l'origine  $\text{Lie}(\pi) : \text{Lie}(P) \rightarrow \text{Lie}(P^{\text{ad}})$  est surjective. On a donc  $N_H(\text{Lie}(P)) \subseteq N_H(\text{Lie}(P^{\text{ad}}))$ . Ainsi la restriction  $\pi : N_H(\text{Lie}(P)) \rightarrow H^{\text{ad}}$  factorise par  $N_H(\text{Lie}(P^{\text{ad}})) = P^{\text{ad}}$  d'après le premier cas. Par suite,  $N_H(\text{Lie}(P)) \subseteq \pi^{-1}(P^{\text{ad}}) = P$ , d'où l'on conclut que  $P = N_H(\text{Lie}(P))$ .



**Remarque 3.2.3.** – (a) Le noyau du quotient adjoint  $\pi : H \rightarrow H^{\text{ad}}$  est un  $S$ -groupe de type multiplicatif, il est donc lisse si  $S$  est un  $\mathbb{Q}$ -schéma. Ainsi si  $S$  est un  $\mathbb{Q}$ -schéma, on a  $P = N_H(\text{Lie}(P))$  pour tout  $S$ -parabolique de  $H$ .

(b) Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique 2 et notons  $B$  le sous-groupe de Borel standard de  $G = \text{SL}_2$ . Il existe sur  $R = k[t]/t^2$  un  $R$ -sous-groupe de Borel  $B' \neq B_R$  tel que  $\text{Lie}(B) \otimes_k R = \text{Lie}(B')$  [10, ex. 2.4.8.(iii)]. Ainsi, dans ce cas on a  $B \neq N_G(\text{Lie}(B))$  et ceci produit un contre-exemple à la proposition 3.2.2.(1) dans le cas non adjoint. En outre, on sait que  $B = N_G(\text{Lie}(B))_{\text{réd}}$  [10, ex. 2.4.8.(iii)], donc  $N_G(\text{Lie}(B))$  n'est pas réduit.

**3.3. Sous-groupes paraboliques minimaux.** – On rappelle qu'un  $S$ -sous-groupe parabolique  $P$  de  $H$  est *minimal* si pour tout  $S$ -schéma en groupes paraboliques  $Q$  de  $H$ ,  $Q \subseteq P$  implique  $Q = P$  (XXVI.5.6). On s'intéresse à l'existence de sous-groupes paraboliques minimaux.

**Lemme 3.3.1.** – *On suppose que que  $S$  est connexe ou bien satisfait les deux propriétés suivantes : quasi-compact et localement connexe. Soit  $H$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs.*

(1) *Soit  $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  un système projectif de sous-schémas en groupes paraboliques de  $H$  au sens de [18, IV<sub>3</sub>.8.2]. Alors il existe un indice  $\lambda_0$  tel que  $P_\lambda = P_{\lambda_0}$  pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ .*

(2) *Si  $P$  désigne un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$ , alors il existe un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal  $Q$  de  $H$  satisfaisant  $Q \subseteq P$ .*

(3) *Le  $S$ -groupe réductif  $H$  admet un  $S$ -groupe parabolique minimal.*

**Démonstration.** – (1) Sans perte de généralité, on peut supposer dans les deux cas que  $S$  est connexe. Alors  $H$  est de type constant, est une  $S$ -forme d'un  $S$ -groupe réductif de Chevalley  $H_0$  dont on note  $\Delta_0$  le diagramme de Dynkin.

*Premier cas : le  $S$ -schéma fini  $\text{Dyn}(H)$  est constant :* on a alors un isomorphisme  $\text{Dyn}(H) \cong \Delta_{0,S}$ , et l'application type s'interprète de la façon suivante :  $\mathbf{t} : \text{Par}(H) \rightarrow \text{Of}(\text{Dyn}(H)) \cong \text{Of}(\Delta_{0,S})$ . Comme  $S$  est connexe,  $\text{Of}(\Delta_{0,S})(S)$  est l'ensemble fini des parties de  $\Delta_0$  ; la famille décroissante  $\mathbf{t}([P_\lambda])$  est donc stationnaire à partir d'un indice  $\lambda_0$ . Pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ , on a  $P_\lambda \subseteq P_{\lambda_0}$  et  $\mathbf{t}([P_\lambda]) = \mathbf{t}([P_{\lambda_0}])$ , donc  $P_\lambda = P_{\lambda_0}$  en vertu de XXVI.3.8.

*Cas général.* Le  $S$ -schéma fini  $\text{Dyn}(H)$  est une  $S$ -forme de  $\Delta_{0,S}$ , ainsi il existe un revêtement fini galoisien  $S' \rightarrow S$  tel que  $\text{Dyn}(H) \times_{S'} S \xrightarrow{\sim} \Delta_{0,S'}$ . D'après le premier cas, il existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $P_\lambda \times_S S' \xrightarrow{\sim} P_{\lambda_0} \times_S S'$  pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ . Par descente fidèlement plate, on conclut que  $P_\lambda = P_{\lambda_0}$  pour tout  $\lambda \geq \lambda_0$ .

(2) Le sous-ensemble  $\mathcal{P}$  de  $\text{Par}(H)(S)$  consistant en les  $Q \subseteq P$  est non vide et est muni de l'ordre inverse de l'inclusion, i.e.  $Q_1 \leq Q_2$  si  $Q_2 \subseteq Q_1$ . L'assertion (1) entraîne que toute famille totalement ordonnée de  $\mathcal{P}$  est majorée et le lemme de Zorn montre que  $\mathcal{P}$  admet un élément maximal  $Q$ . Par construction,  $Q$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal inclus dans  $P$ .

(3) Vu que  $H$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$ , l'assertion (2) implique aussitôt que  $H$  admet un  $S$ -groupe parabolique minimal.  $\square$

**Remarque 3.3.2.** – Si la base  $S$  est quasi-compacte et quasi-séparée, il est naturel de se demander sous quelles conditions la limite d'un système projectif  $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de sous-schémas en groupes paraboliques d'un  $S$ -schéma en groupes réductif  $H$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique. Le lemme 3.3.1.(1) indique que pour tout point  $s \in S$ , il existe un indice  $\lambda_s$  tel que  $P \times_S \mathcal{O}_{S,s} \xrightarrow{\sim} P_{\lambda_s} \times_S \mathcal{O}_{S,s}$ . Soit  $U \subseteq S$  le plus grand ouvert sur lequel  $P$  est de présentation finie. Alors le critère de lissité par fibres indique que  $P \times_S U$  est lisse [18, IV<sub>4</sub>.17.8.2]; les fibres géométriques de  $P \times_S U$  étant des sous-groupes paraboliques, il suit que  $P \times_S U$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H \times_S U$ . Nous affirmons que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $U = S$ ,
- (ii)  $P$  est un  $S$ -parabolique de  $H$ ,
- (iii) Il existe un indice  $\lambda_0$  tel que  $P = P_{\lambda_0}$ .

Les implications (iii)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (i) sont triviales et on a déjà établi l'implication (i)  $\implies$  (ii). Montrons l'implication (ii)  $\implies$  (iii). On pose  $S_\lambda = S$ ,  $Q_\lambda = P$  pour tout  $\lambda$ . La limite projective des  $S_\lambda$ -morphisms  $Q_\lambda \rightarrow P_\lambda$  est un isomorphisme, donc il existe un indice  $\lambda_0$  tel que  $P = Q_{\lambda_0} \rightarrow P_{\lambda_0}$  est un isomorphisme [18, IV<sub>3</sub>.8.10.5.(i)].

Les conditions équivalentes ci-dessus ne sont pas toujours satisfaites même dans le cas de  $\mathrm{SL}_2$  sur une base affine. Donnons l'exemple de l'anneau produit  $R = \prod_{n \in \mathbb{N}} k$  où  $k$  désigne un corps commutatif. Étant donné  $N \geq 0$ , on décompose  $R = \prod_{0 \leq n \leq N} k \times \prod_{n \geq N+1} k$ , d'où une décomposition en ouverts disjoints  $S = \mathrm{Spec}(R) = U_N \sqcup V_N$ .

On définit le  $R$ -sous-groupe parabolique  $P_N$  de  $\mathrm{SL}_{2,R}$  par  $P_N \times_S U_N = B \times_S U_N$  et  $P_N \times_S V_N = \mathrm{SL}_{2,R} \times_S V_N$ , où  $B \subseteq \mathrm{SL}_{2,R}$  désigne le sous-groupe de Borel standard. Alors la suite  $(P_N)_{N \geq 0}$  est une suite décroissante de  $S$ -paraboliques de  $\mathrm{SL}_2$  qui n'est pas stationnaire. L'équivalence ci-dessus montre que  $P$  n'est pas de présentation finie sur  $S$  et *a fortiori* pas un  $S$ -parabolique de  $\mathrm{SL}_{2,R}$ . En conclusion, la méthode du lemme 3.3.1 ne permet pas de construire des sous-groupes paraboliques minimaux au delà du cas localement connexe.

**3.4. Normalisateurs de schémas en groupes paraboliques.** – Soit  $S$  un schéma. On considère maintenant la situation plus générale d'un  $S$ -schéma en groupes  $G$  lisse et séparé, non nécessairement à fibres connexes. On note  $G^0$  la composante neutre de  $G$ , c'est un sous-schéma en groupes ouvert caractéristique de  $G$  (VI<sub>B</sub>.3.10) tel que  $G_s^0$  soit la composante connexe de  $1_s$  dans  $G_s$  pour tout point  $s \in S$ .

**Remarque 3.4.1.** – Si le faisceau  $G/G^0$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes, alors celui-ci est étale sur  $S$ . En effet,  $G/G^0$  est lisse sur  $S$  (VI<sub>B</sub>.9.2.(xii)) et le cas des corps indique que  $(G/G^0)_s$  est étale sur  $\kappa(s)$  pour tout point  $s$  de  $S$  [12, II.5.1.1]. Le critère « fibres par fibres » s'applique et montre que  $G/G^0$  est étale sur  $S$  [18, IV<sub>4</sub>.17.8.2].

On suppose que  $G^0$  est un  $S$ -groupe réductif. Le morphisme  $G^0 \rightarrow G$  est un monomorphisme et le théorème 5.3.5 de [10] montre que  $G^0$  est fermé dans  $G$ . Le prototype d'une telle situation est le  $S$ -groupe orthogonal  $O_{2n}$  de la forme quadratique hyperbolique de dimension  $2n$  ( $n \geq 2$ ). Le  $S$ -groupe  $O_{2n}$  est affine lisse et sa composante neutre est le  $S$ -groupe spécial orthogonal  $SO_{2n}$  [10, theorem C.2.10].

Si  $H$  est un  $S$ -schéma en groupes semi-simples, on rappelle que le  $S$ -faisceau fppf  $\underline{\text{Aut}}_{\text{gr}}(H)$  des automorphismes de  $H$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes  $\text{Aut}_{\text{gr}}(H)$ ;  $\text{Aut}_{\text{gr}}(H)$  est  $S$ -affine,  $S$ -lisse et admet le groupe adjoint de  $H$  comme composante neutre (XXIV.1). Dans cet article, nous sommes surtout intéressés par de tels  $S$ -groupes  $\text{Aut}_{\text{gr}}(H)$  parce qu'ils interviennent dans la classification des  $S$ -schémas en groupes semi-simples.

**Remarque 3.4.2.** – Au delà du cas où  $S$  est le spectre d'un corps, on note que l'hypothèse de réductivité est essentielle pour garantir le fait que  $G^0$  soit fermé dans  $G$ . En effet la théorie de Bruhat-Tits donne lieu à des schémas en groupes affines et lisses sur un anneau de valuation discrète hensélien dont la fibre générique est réductive et la fibre spéciale n'est pas connexe [7, §4.6].

**Proposition 3.4.3.** – *Sous les hypothèses du §3.4, soit  $P_1 \subseteq \dots \subseteq P_d$  une chaîne de  $S$ -sous-schémas en groupes paraboliques de  $G^0$ .*

1. *Le normalisateur  $\underline{N}_G(P_1, \dots, P_d)$  est représentable par un  $S$ -sous-schéma en groupes fermé  $N_G(P_1, \dots, P_d)$  de  $G$ .*
2. *Le schéma en groupes  $N_G(P_1, \dots, P_d)$  est lisse sur  $S$  et  $P_1 = N_G(P_1, \dots, P_d) \cap G^0 = N_G(P_1, \dots, P_d)^0$ .*
3. *Le quotient  $G/N_G(P_1, \dots, P_d)$  est représentable par un  $S$ -schéma localement de présentation finie sur  $S$ .*
4. *Le quotient  $N_G(P_1)/\text{rad}^u(P_1)$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes  $H_1$   $S$ -lisse et  $S$ -séparé. De plus,  $(H_1)^0$  est isomorphe à  $P_1^{\text{red}}$ . En outre, si  $G$  est  $S$ -affine, alors  $H_1$  est  $S$ -affine.*
5. *Si le faisceau fppf en groupes  $G/G^0$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes, alors le faisceau fppf  $N_G(P_1, \dots, P_d)/P_1$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes  $S$ -lisse. En outre,  $N_G(P_1, \dots, P_d)/P_1 \rightarrow G/G^0$  est une immersion ouverte.*

**Démonstration.** – (1) Le schéma des  $S$ -sous-groupes paraboliques  $\text{Par}(G^0)$  est lisse et projectif sur  $S$  (XXVI.3.5). Il est en particulier séparé et de présentation finie sur  $S$  et est muni d'une application « type »  $t : \text{Par}(G^0) \rightarrow \text{Of}(\text{Dyn}(G^0))$  vers le  $S$ -schéma fini étale des parties ouvertes et fermées du  $S$ -schéma fini étale « diagramme de Dynkin de  $G^0$  ».

On note  $x_{P_i} : S \rightarrow \text{Par}(G^0)$  le point correspondant au  $S$ -parabolique  $P_i$  pour  $i = 1, \dots, d$ , ce morphisme est localement de présentation finie. Vu que  $\underline{N}_G(P_i)$  est le fixateur du point  $x_{P_i}$  pour l'action de  $G$  sur le  $S$ -schéma séparé  $\text{Par}(G^0)$ , il est donc représentable par un  $S$ -sous-schéma fermé de  $G$  qui est localement de présentation finie sur  $S$  (on peut aussi invoquer le fait général XI.6.3). Ainsi  $\underline{N}_G(P_1, \dots, P_d) =$

$N_G(P_1) \cap \dots \cap N_G(P_d)$  est représentable par un  $S$ -sous-schéma fermé qui est de présentation finie sur  $S$ .

(2)<sup>(2)</sup> Pour établir la lissité du  $S$ -schéma localement de présentation finie  $N_G(P_1, \dots, P_d)$ , il suffit donc par définition de montrer que  $N_G(P_1, \dots, P_d)$  est formellement lisse [18, IV<sub>4</sub>.17.3.1]. Soient  $T$  un  $S$ -schéma affine et  $T_0$  un  $S$ -sous-schéma fermé défini par un idéal de carré nul. Soit  $n_0 \in N_G(P_1, \dots, P_d)(T_0)$ . Comme  $G$  est  $S$ -lisse, il existe  $g \in G(T)$  relevant  $n_0$ . On pose  $x_{Q_1} = g \cdot (x_{P_1} \times_S T) \in \text{Par}(G^0)(T)$ . Alors  $x_{Q_1}$  a même type  $t_1 \in \text{Of}(\text{Dyn}(G^0))(T)$  que  $x_{P_1} \times_S T$  car c'est le cas pour leurs changements de base à  $T_0$ . On note  $\text{Par}(G^0)_{t_1}$  le  $T$ -schéma défini par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Par}(G^0)_{t_1} & \longrightarrow & \text{Par}(G^0) \\ \downarrow & & \downarrow \mathfrak{t} \\ T & \xrightarrow{t_1} & \text{Of}(\text{Dyn}(G^0)) \end{array} .$$

En vertu de XXVI.3.6, le morphisme  $G^0 \rightarrow \text{Par}(G^0)_{t_1}$ ,  $g \mapsto g \cdot x_{P_1}$  est couvrant pour fpqc donc aussi pour fppf puisque ce morphisme est localement de présentation finie. En d'autres mots, le  $S$ -schéma  $\text{Par}(G^0)_{t_1}$  représente le quotient fppf  $G^0/P_1$ . Ainsi le transporteur strict  $\underline{\text{Transpstr}}_{G^0_{T'}}(x_{Q_1}, x_{P_1} \times_S T)$  qui associe à un morphisme  $T' \rightarrow T$

$$\underline{\text{Transpstr}}_{G^0_{T'}}(x_{Q_1}, x_{P_1} \times_S T)(T') = \left\{ h \in G^0(T') \mid h \cdot x_{Q_1} \times_T T' = x_{P_1} \times_S T' \right\}$$

est représentable par un  $T$ -torseur  $E$  sous le  $T$ -schéma en groupes  $N_{G^0}(P_1) \times_S T = P_1 \times_S T$ . Vu que  $P_1 \times_S T$  est  $T$ -lisse, il en est de même de  $E$  par descente [18, IV<sub>4</sub>.17.7.3]. Par construction on a  $1_{T_0} \in G^0(T_0)$  appartient à  $E(T_0)$ . Il existe donc un élément  $h \in \ker(G^0(T) \rightarrow G^0(T_0))$  satisfaisant  $h x_{Q_1} = x_{P_1} \times_S T$ . On conclut que l'élément  $n = h g \in N_G(P_1)(T)$  relève  $n_0$ . Pour  $i = 2, \dots, d$ ,  $n P_{i,T} n^{-1}$  est de même type que  $P_{i,T}$  et contient  $P_{1,T}$ , on a donc  $n P_{i,T} n^{-1} = P_{i,T}$  d'après le lemme XXVI.3.8. Ainsi  $n \in N_G(P_1, \dots, P_d)(T)$ . Ceci établit la lissité formelle de  $N_G(P_1, \dots, P_d)$  et donc sa lissité.  $\square$

Le  $S$ -sous-schéma  $P_1 = N_G(P_1, \dots, P_d) \cap G^0$  est un sous-schéma ouvert lisse à fibres connexes de  $N_G(P_1, \dots, P_d)$ . On a donc  $P_1 = N_G(P_1, \dots, P_d)^0$ .

(3) Comme le  $S$ -schéma  $\text{Par}(G^0)^d$  est localement de type fini sur  $S$ , le théorème XVI.2.2 montre que  $G/N_G(P_1, \dots, P_d)$  est représentable par un  $S$ -schéma localement de présentation finie sur  $S$ .

(4) La question est locale pour la topologie de Zariski et on peut donc supposer que  $P$  admet un sous-groupe de Levi  $L_1$  (XXVI.2.3). Le lemme 3.4.5.(2) ci-dessous produit un isomorphisme  $\text{rad}^u(P_1) \rtimes N_G(P_1, L_1) \xrightarrow{\sim} N_G(P_1)$ . Ainsi  $N_G(P_1)/\text{rad}^u(P_1)$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes  $H_1$  isomorphe à  $N_G(P_1, L_1)$ . Le lemme 3.4.5.(3) indique que  $H_1$  est  $S$ -lisse,  $S$ -séparé et que  $H_1^0 \xrightarrow{\sim} P_1^{\text{red}}$ . Si  $G$

<sup>(2)</sup> Noter que VI<sub>B</sub>.6.5.5 (ou XII.7.9) ne s'applique pas ici pour (2) car les fibres géométriques de  $G$  ne sont pas connexes.

est  $S$ -affine, comme  $N_G(P_1, L_1)$  est  $S$ -fermé dans  $G$ , alors  $N_G(P_1, L_1)$  est  $S$ -affine et  $H_1$  aussi.

(5) On suppose que le faisceau fppf quotient  $G/G^0$  est représentable, on sait alors que  $G/G^0$  est étale au-dessus de  $S$  (Remarque 3.4.1.(a)). On pose  $N = N_G(P_1, \dots, P_d)$ . Le  $S$ -groupe  $N$  étant lisse, il est de présentation finie, et on observe que  $P_1 = N^0$  est le noyau du morphisme de  $S$ -groupes  $N \rightarrow G \rightarrow G/G^0$ . Le  $S$ -groupe  $N^0$  étant lisse et *a fortiori* plat, l'application de XVI.2.3 montre que le quotient fppf  $N/N^0$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes qui est  $S$ -étale (Remarque 3.4.1.(a)). On considère le  $S$ -monomorphisme  $i : N/N^0 \rightarrow G/G^0$ . Pour chaque point  $s$ ,  $i_s : (N/N^0)_s \rightarrow (G/G^0)_s$  est une immersion fermée (VI<sub>A</sub>.2.5.2.(c)) et donc aussi une immersion ouverte. Comme  $N/N^0$  est plat sur  $S$ , on peut appliquer le critère d'immersion fibres par fibres [18, IV<sub>4</sub>.17.9.5] qui établit que  $i$  est une immersion ouverte.

**Remarque 3.4.4.** – Dans le cas où  $G/G^0$  est fini étale, un raffinement de l'assertion (5) de la proposition 3.4.3 figure à la proposition 4.5.5.(3).

**Lemme 3.4.5.** – Soit  $P$  un  $S$ -sous-schéma en groupes paraboliques de  $G^0$  admettant un  $S$ -sous-groupe de Levi  $L$ .

1. Le normalisateur  $\underline{N}_G(L)$  est représentable par un  $S$ -sous-schéma en groupes  $N_G(L)$  fermé de  $G$ , qui est localement de présentation finie sur  $S$ .
2. Le faisceau fppf  $\underline{N}_G(P, L) := \underline{N}_G(P) \cap \underline{N}_G(L)$  est représentable par un sous-schéma fermé de  $G$  qui est localement de présentation finie sur  $S$ . En outre, on a  $N_G(P) = \text{rad}^u(P) \rtimes N_G(P, L)$ .
3.  $N_G(P, L)$  est un  $S$ -sous-schéma fermé de  $G$ ,  $S$ -séparé et  $S$ -lisse. De plus  $L = N_G(P, L)^0$ .
4. Le quotient  $G/N_G(P, L)$  est représentable par un  $S$ -schéma qui est  $S$ -lisse.

*Démonstration.* – (1) Vu que  $L$  est  $S$ -lisse de présentation finie à fibres connexes, le corollaire XI.6.11 montre que  $\underline{N}_G(L)$  est représentable par un  $S$ -sous-schéma fermé de  $G$ , qui est de présentation finie sur  $G$ . Comme  $G$  est localement de présentation finie sur  $S$ , il en est de même de  $N_G(L)$ .

(2) Ainsi  $\underline{N}_G(P, L) = \underline{N}_G(P) \cap \underline{N}_G(L)$  est représentable par un  $S$ -sous-schéma fermé en groupes de  $G$  et est localement de présentation finie sur  $S$ . On va montrer que le morphisme de faisceaux fppf  $\text{rad}^u(P) \rtimes N_G(P, L) \rightarrow N_G(P)$  est un isomorphisme. On peut supposer  $S = \text{Spec}(A)$  affine non vide. C'est un monomorphisme puisque

$$N_G(P, L) \cap \text{rad}^u(P) = N_{G^0}(P, L) \cap \text{rad}^u(P) = L \cap \text{rad}^u(P) = 1$$

suivant XXVI.1.21.ii. Pour établir que c'est un épimorphisme de faisceaux, on se donne  $S' = \text{Spec}(A')$  au-dessus de  $S$  avec  $A'$  fidèlement plat sur  $A$  et  $g \in N_G(P)(S')$ . Il faut montrer que l'on peut raffiner par un recouvrement fppf  $S''$  au-dessus de  $S'$  de sorte que  $g|_{S''} \in \text{rad}^u(P)(S'') \cdot N_G(P, L)(S'')$ . Alors  $gLg^{-1}$  est un sous-groupe de Levi de  $P$ . Suivant XXVI.1.9, il existe un recouvrement affine étale  $S''$  de  $S'$  et  $h \in \text{rad}^u(P)(S'')$  tel que  $g(L \times_S S'')g^{-1} = h(L \times_S S'')h^{-1}$ . Alors  $h^{-1}g \in N_G(P, L)(S'')$

et comme  $h \in P(S'') = \text{rad}^u(P)(S'') \cdot L(S'')$ , on conclut que  $g = h h^{-1} g$  appartient à  $\text{rad}^u(P)(S'') \cdot N_G(P, L)(S'')$ .

(3) On a une suite exacte (scindée) de  $S$ -groupes

$$1 \rightarrow \text{rad}^u(P) \rightarrow N_G(P) \rightarrow N_G(P, L) \rightarrow 1.$$

Ainsi, le  $S$ -schéma en groupes  $N_G(P, L)$  est un  $S$ -sous-schéma fermé de  $N_G(P)$ , lui-même  $S$ -sous-schéma fermé de  $G$  donc  $N_G(P, L)$  est un  $S$ -sous-schéma fermé de  $G$ . Par hypothèse,  $G$  est  $S$ -séparé donc  $N_G(P, L)$  est  $S$ -séparé [18, I.5.5.2]. Par ailleurs,  $N_G(P)$  est lisse, il en est de même de son quotient  $N_G(P, L)$  (VI<sub>B</sub>.9.2.(xii)). On a l'inclusion  $N_G(P, L)^0 \subseteq N_G(P)^0 = P$ , donc  $N_G(P, L)^0 \subseteq N_G(P, L) \cap P = N_P(L) = L$  d'après la discussion précédent le corollaire XXVI.1.8. Comme  $L \subseteq N_G(P, L)^0$ , on conclut que  $L = N_G(P, L)^0$ .

(4) On considère le  $S$ -foncteur suivant :

$$\underline{\text{PL}}(S') = \{\text{couples } Q \supset M, \text{ } Q \text{ parabolique de } G_{S'}, M \text{ sous-groupe de Levi de } Q\};$$

il est représentable par un  $S$ -schéma PL lisse (XXVI.3.16.(i)). Le  $S$ -schéma en groupes  $G$  agit de façon naturelle sur PL et le  $S$ -schéma en groupes  $N_G(P, L)$  est le stabilisateur du  $S$ -point  $x = [(P, L)]$  de PL. Comme  $N_G(P, L)$  est plat sur  $S$ , le théorème XVI.2.2 s'applique et montre que le quotient fppf  $G/N_G(P, L)$  est représentable par un  $S$ -schéma. La  $S$ -lissité de  $G$  entraîne alors celle de  $G/N_G(P, L)$  (VI<sub>B</sub>.9.2.(xii)).  $\square$

**Lemme 3.4.6.** – Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes  $S$ -affine et  $S$ -lisse tel que  $G^0$  est réductif. Soit  $P_1 \subseteq \dots \subseteq P_d$  une chaîne de sous  $S$ -schémas en groupes paraboliques de  $G^0$ . Alors l'image de l'application

$$H^1(S, N_G(P_1, \dots, P_d)) \rightarrow H^1(S, G)$$

consiste en les classes de  $S$ -torseurs  $E$  sous  $G$  tels que le  $S$ -schéma en groupes tordu  $(G^0)^E$  admette une chaîne  $(P'_1, \dots, P'_d)$  de  $S$ -sous-schémas en groupes qui est localement  $G$ -conjugué à  $(P_1, \dots, P_d)$  pour la topologie étale (au sens de la Définition 2.6.1).

Rappelons que  $G^0$  est fermé dans  $G$ .

**Démonstration.** – Le  $S$ -groupe  $G$  est  $S$ -affine et  $S$ -lisse et la proposition 3.4.3.(2) indique qu'il en est de même de  $N_G(P_1, \dots, P_d)$ . Suivant la section 2.7, la variante étale du lemme 2.6.2 est légitime. Ainsi l'image de  $i_* : H^1(S, N_G(P_1, \dots, P_d)) \rightarrow H^1(S, G)$  consiste en les classes de  $S$ -espaces principaux homogènes  $\underline{E}$  sous  $G$  tels que le  $S$ -schéma en groupes tordu  $G^{\underline{E}}$  admette un  $n$ -uplet  $(\underline{P}'_1, \dots, \underline{P}'_d)$  de  $S$ -sous-faisceaux localement  $G$ -conjugué à  $(P_1, \dots, P_d)$  pour la topologie étale.

Comme les  $P_i$  sont affines au-dessus de  $S$ , ces  $S$ -faisceaux sont représentables respectivement par  $P'_1, \dots, P'_d$  et par descente ils forment une chaîne de  $S$ -sous-groupes fermés  $P'_1 \subseteq \dots \subseteq P'_d$ .  $\square$

### 3.5. Irréductibilité

**Définition 3.5.1.** – Un  $S$ -schéma en groupes réductifs  $H$  est *réductible* s'il admet un  $S$ -sous-groupe parabolique partout propre  $P$  (i.e.  $P_{\bar{s}} \neq H_{\bar{s}}$  pour tout point géométrique  $\bar{s}$  de  $S$ ) qui admet un sous-groupe de Levi  $L$ . On dit que  $H$  est *irréductible* dans le cas contraire.

**Remarque 3.5.2.** – (1) La réductibilité est une notion stable par changement de base arbitraire.

(2) Si  $S$  est affine, l'existence d'un sous-groupe de Levi XXVI.2.3 indique alors que  $H$  est réductible si et seulement si  $H$  admet un  $S$ -sous-groupe parabolique partout propre  $P$ , i.e.  $P_{\bar{s}} \subsetneq H_{\bar{s}}$  pour tout  $s \in S$ .

On vérifie que cette notion se comporte bien par extension centrale.

**Lemme 3.5.3.** – Soit  $H$  un  $S$ -groupe réductif. On note  $DH$  son  $S$ -groupe dérivé,  $H^{\text{ad}}$  son  $S$ -groupe adjoint et  $H = H/\text{rad}(H)$  son quotient semi-simple maximal.

(a) Soit  $H'$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs et  $f : H' \rightarrow H$  un  $S$ -homomorphisme surjectif dont le noyau est un  $S$ -groupe de type multiplicatif central dans  $H'$ .

(1) Si  $P$  désigne un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$  muni d'un sous-groupe de Levi  $L$  d'images inverses respectives  $P'$  et  $L'$ , alors le  $S$ -faisceau normalisateur  $\underline{N}_H(P', L')$  de  $P'$  pour l'action adjointe de  $H$  sur  $H'$  est représentable par  $L$ .

(2)  $H$  est réductible si et seulement si  $H'$  est réductible.

(b) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $H$  est réductible ;
- (ii)  $H$  est réductible ;
- (iii)  $H^{\text{ad}}$  est réductible ;
- (iv)  $DH$  est réductible.

**Démonstration.** – Le début de la preuve du lemme 3.2.1 indique que  $f$  est un quotient fppf.

(a)(1) On a un monomorphisme  $L \rightarrow \underline{N}_H(P', L')$  de  $S$ -faisceaux fppf en groupes. Par ailleurs, on a un monomorphisme  $\underline{N}_H(P', L') \rightarrow \underline{N}_H(P, L)$ . Vu que  $P = N_H(P)$ , on a  $\underline{N}_P(L) = \underline{N}_H(P, L)$  d'où une suite de morphismes  $L \rightarrow \underline{N}_H(P', L') \rightarrow \underline{N}_P(L)$ . Or on sait que le  $S$ -faisceau  $\underline{N}_P(L)$  est représentable par  $L$  (discussion avant le corollaire XXVI.1.8). Ainsi le monomorphisme  $L \rightarrow \underline{N}_H(P', L')$  admet une rétraction qui est un monomorphisme, ce qui permet de conclure que le  $S$ -faisceau fppf  $\underline{N}_H(P', L')$  est représentable par  $L$ .

(a)(2) C'est une conséquence immédiate de (1).

(b) Cela suit de l'application successive de (1) aux morphismes  $H \rightarrow H^{\text{ad}}$ ,  $H \rightarrow H$  et  $DH \rightarrow H$  qui sont des  $S$ -homomorphismes surjectifs de noyau central de type multiplicatif (XXIV.4.3.5 et 6.2.3).  $\square$



**3.6. Classes de cohomologie irréductibles.** – On se place de nouveau dans la situation où  $G$  est un  $S$ -groupe lisse tel que  $G^0$  est un  $S$ -sous-schéma en groupes réductifs (fermé dans  $G$ ). Soit  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G^0$ . On dit qu'un  $S$ -faisceau étale principal homogène  $\underline{E}$  sous  $N_G(P)$  est *irréductible* si le  $S$ -schéma en groupes tordu  $(P^{\underline{E}})^{\text{réd}}$  est irréductible. Ceci passe aux classes et on note alors

$$H^1(S, N_G(P))_{\text{irr}} \subseteq H^1(S, N_G(P))$$

le sous-ensemble formé des classes de  $S$ -faisceaux étales  $\underline{E}$  principaux homogènes sous  $N_G(P)$  qui sont irréductibles.

**Lemme 3.6.1.** – *On suppose que  $S = \text{Spec}(A)$  est affine localement connexe.*

(a) *Soit  $\underline{E}$  un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $N_G(P)$  pour la topologie étale au-dessus de  $S$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $[\underline{E}] \in H^1(S, N_G(P))_{\text{irr}}$  ;
2.  $P^{\underline{E}}$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $(G^0)^{\underline{E}}$ .

(b) *Si de plus les  $S$ -groupes paraboliqes minimaux de  $(G^0)^{\underline{E}}$  sont  $G(S)$ -conjugués, alors les assertions ci-dessus sont aussi équivalentes à l'assertion suivante :*

3. *le  $S$ -schéma en groupes  $(G^0)^{\underline{E}}$  admet un sous-groupe parabolique minimal qui est localement  $G$ -conjugué à  $P$  pour la topologie étale.*

(c) *Soit  $L$  un sous-groupe de Levi de  $P$  (cela existe en vertu de XXVI.2.3). La flèche  $H^1(S, N_G(P, L)) \rightarrow H^1(S, N_G(P))$  est bijective et induit une bijection  $H^1(S, N_G(P, L))_{\text{irr}} \xrightarrow{\sim} H^1(S, N_G(P))_{\text{irr}}$ .*

**Démonstration.** – a) Il s'agit principalement de l'application de la proposition 3.1.2 au  $S$ -schéma en groupes réductifs  $(G^0)^{\underline{E}}$ , à son  $S$ -sous-groupe parabolique  $P^{\underline{E}}$  et à la projection  $p : P^{\underline{E}} \rightarrow (P^{\underline{E}})^{\text{réd}}$  : les applications

$$Q \mapsto (\text{rad}^u(P^{\underline{E}}) \rtimes Q) / \text{rad}^u(P^{\underline{E}}), \quad M \mapsto p^{-1}(M)$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des sous-groupes paraboliqes de  $(G^0)^{\underline{E}}$  contenus dans  $P^{\underline{E}}$  et l'ensemble des sous-groupes paraboliqes de  $P^{\underline{E}} / \text{rad}^u(P^{\underline{E}}) = (P^{\underline{E}})^{\text{réd}}$ .

(1)  $\implies$  (2) : On suppose que  $[\underline{E}] \in H^1(S, N_G(P))_{\text{irr}}$  c'est-à-dire que le  $S$ -schéma en groupes réductifs  $(P^{\underline{E}})^{\text{réd}}$  est irréductible. Comme la base est affine, ceci est équivalent à dire que  $(P^{\underline{E}})^{\text{réd}}$  n'admet pas de  $S$ -parabolique partout propre. La remarque ci-dessus indique que  $P^{\underline{E}}$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal de  $(G^0)^{\underline{E}}$ .

(2)  $\implies$  (1) : évident.

(b) L'implication (2)  $\implies$  (3) est évidente. Réciproquement, on suppose que le  $S$ -groupe réductif  $(G^0)^{\underline{E}}$  admet un sous-groupe parabolique minimal  $P'$  qui est localement  $G$ -conjugué à  $P$  pour la topologie étale.

D'après le lemme 3.3.1.(2), il existe un  $S$ -groupe parabolique minimal  $P'_0$  de  $(G^0)^{\underline{E}}$  tel que  $P'_0 \subseteq P^{\underline{E}}$ . Par hypothèse, il existe  $g \in G^{\underline{E}}(S)$  tel que  $P'_0 = g P^{\underline{E}} g^{-1}$ . Pour des raisons de dimension, on a  $g P^{\underline{E}} g^{-1} = P'_0$ . Ainsi  $P^{\underline{E}}$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal de  $(G^0)^{\underline{E}}$ .



(c) Selon le lemme 3.4.5.(3), on a une décomposition  $N_G(P) = \text{rad}^u(P) \rtimes N_G(P, L)$  et le fait  $L = N_G(P, L)^0$ . Le même argument qu'en XXVI.2.3 pour le cas  $P = \text{rad}^u(P) \rtimes L$  fondé sur la structure de  $\text{rad}^u(P)$  (XXVI.2.1) fonctionne et montre la bijectivité de la flèche  $H^1(S, N_G(P, L)) \rightarrow H^1(S, N_G(P))$ . Soit  $\underline{F}$  un  $S$ -faisceau principal homogène sous  $N_G(P)$  pour la topologie étale au-dessus de  $S$  et on pose  $\underline{E} = \underline{F} \times^{N_G(P, L)} N_G(P)$  qui est  $S$ -faisceau principal homogène sous  $N_G(P)$ . Le point est que le  $S$ -homomorphisme  $L \rightarrow P^{\text{red}}$  est un isomorphisme et induit un isomorphisme de  $S$ -groupes  $L^F \xrightarrow{\sim} (P^{\text{red}})^E$ . Ainsi le  $S$ -faisceau principal homogène  $\underline{F}$  sous  $N_G(P, L)$  est irréductible si et seulement si le  $S$ -faisceau principal homogène  $\underline{E}$  sous  $N_G(P)$  est irréductible.  $\square$

#### 4. La décomposition de Witt-Tits

Soit  $S$  un schéma.

**4.1. Localisation semi-locale.** – C'est l'occasion de rappeler la technique de semi-localisation [4, II.3.5, prop. 17]. On se donne un ensemble fini de points  $s_1, \dots, s_n$  de  $S$  inclus dans un ouvert affine  $\text{Spec}(A)$ . Les points  $s_1, \dots, s_n$  correspondent respectivement à des idéaux premiers  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  de  $A$ . La partie  $\Sigma = A \setminus \bigcup_i \mathfrak{p}_i = \bigcap_i (A \setminus \mathfrak{p}_i)$  est une intersection de parties multiplicatives de  $A$ ;  $\Sigma$  est donc une partie multiplicative de  $A$  et le localisé  $A' = A_\Sigma$  est un anneau semi-local dont les idéaux maximaux sont  $\mathfrak{p}_1 \cdot A', \dots, \mathfrak{p}_n \cdot A'$ . En pratique, on travaille avec de tels anneaux.

**4.2. Un morceau de la décomposition.** – Enonçons maintenant dans ce contexte un premier corollaire du théorème de conjugaison des sous-groupes paraboliques minimaux XXVI.5.7.(ii).

**Lemme 4.2.1.** – *On suppose que  $S$  est semi-local. Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes  $S$ -affine et  $S$ -lisse tel que  $G^0$  est  $S$ -réductif ( $G^0$  est fermé dans  $G$ ). Soient  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G^0$ .*

(1) *Si  $P$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal de  $G^0$ , alors  $G(S)/N_G(P)(S) \xrightarrow{\sim} (G/N_G(P))(S)$  et la flèche  $H^1(S, N_G(P)) \rightarrow H^1(S, G)$  a un noyau trivial.*

(2) *La flèche*

$$H^1(S, N_G(P))_{\text{irr}} \rightarrow H^1(S, G)$$

*est injective.*

**Démonstration.** – On note  $i : N_G(P) \rightarrow G$ .

(1) On pose  $X = G/N_G(P)$ ,  $p : G \rightarrow X$  la projection et on considère un point  $x \in X(S)$ . Soit  $E = p^{-1}(x)$  le  $S$ -torseur sous  $N_G(P)$  associé. Il est muni d'une trivialisation naturelle  $\phi : E \wedge^{N_G(P)} G \cong G$ ,  $(e, g) \mapsto eg$ . Celle-ci induit une trivialisation  $\phi_* : G^E \xrightarrow{\sim} G$ . Alors  $\phi_*(P^E)$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G^0$  localement  $G$ -conjugué à  $P$ . Suivant le théorème de conjugaison de Demazure XXVI.5.7.(ii), il existe  $g \in G^0(S)$  satisfaisant  $\phi_*(P^E) = gPg^{-1}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Le lemme 2.5.1 indique que  $x$  est  $G(S)$ -conjugué à l'origine de  $(G/N_G(P))(S)$ . Ceci

montre que  $G(S)/N_G(P)(S) \cong (G/N_G(P))(S)$ . Puisque  $N_G(P)$  est lisse sur  $S$  (Proposition 3.4.3.(2)), le morphisme  $G \rightarrow G/N_G(P)$  est lisse (VI<sub>B</sub>.9.2.(xii)) et on a une suite exacte d'ensembles pointés [17, III.3.2.2]

$$1 \rightarrow N_G(P)(S) \rightarrow G(S) \rightarrow (G/N_G(P))(S) \rightarrow H^1(S, N_G(P)) \xrightarrow{i_*} H^1(S, G).$$

Ainsi la flèche  $H^1(S, N_G(P)) \rightarrow H^1(S, G)$  a un noyau trivial.

(2) On va montrer que les fibres de  $H^1(S, N_G(P))_{\text{irr}} \rightarrow H^1(S, G)$  sont réduites à un élément par un argument de torsion. On se donne un faisceau  $\underline{F}$  principal homogène sous  $N_G(P)$  sur  $S_{\text{ét}}$  tel que  $[\underline{F}] \in H^1(S, N_G(P))_{\text{irr}}$ . Selon le lemme 3.6.1, le tordu  $P^{\underline{F}}$  est un  $S$ -sous-schéma en groupes parabolique minimal de  $(G^0)^{i_* \underline{F}}$ . Le  $S$ -schéma en groupes tordu  $N_G(P)^{\underline{F}}$  est représenté par  $N_{G^{\underline{F}}}(P^{\underline{F}})$ . On dispose alors du diagramme commutatif d'ensembles pointés

$$\begin{array}{ccc} H^1(S, N_G(P)) & \xrightarrow{i_*} & H^1(S, G) \\ \downarrow \wr \tau_{\underline{F}} & & \downarrow \wr \tau_{\underline{F}} \\ H^1(S, N_{G^{\underline{F}}}(P^{\underline{F}})) & \xrightarrow{(i^{\underline{F}})_*} & H^1(S, G^{i_* \underline{F}}) \end{array}$$

où  $\tau_{\underline{F}}$  désigne la bijection de torsion. D'après (1), on a  $\ker(i_*^{\underline{F}}) = 1$ , on en déduit que  $i_*^{-1}([\underline{F}]) = \{[\underline{F}]\}$ .  $\square$

### 4.3. Décomposition dans le cas épinglé

**Théorème 4.3.1.** – *On suppose que  $S = \text{Spec}(A)$  est connexe (non vide) semi-local. Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes  $S$ -affine et  $S$ -lisse tel que le  $S$ -schéma en groupes  $G^0$  est réductif épinglé. Soit  $B$  (resp.  $T$ ) le sous-groupe de Borel (resp. le tore maximal) de  $G^0$  donné par cet épinglage et soient  $P_1, \dots, P_l$  des  $S$ -sous-schémas en groupes paraboliques de  $G^0$  contenant  $B$  tels que  $P_1, \dots, P_l$  représentent les classes d'équivalence de  $S$ -sous-groupes paraboliques de  $G$  pour la relation d'équivalence  $P \sim Q$  si  $P$  et  $Q$  sont localement  $G$ -conjugués pour la topologie étale. On note  $L_j$  l'unique sous-groupe de Levi de  $P_j$  contenant  $T$  pour  $j = 1, \dots, l$ . Alors on a la décomposition*

$$\bigsqcup_{j=1, \dots, l} H^1(S, N_G(P_j, L_j))_{\text{irr}} \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{j=1, \dots, l} H^1(S, N_G(P_j))_{\text{irr}} \xrightarrow{\sim} H^1(S, G).$$

La démonstration est une variation sur un thème de Bruhat-Tits [8, section 3].

**Démonstration.** – La première bijection est le regroupement des bijections  $H^1(S, N_G(P_j, L_j))_{\text{irr}} \xrightarrow{\sim} H^1(S, N_G(P_j))_{\text{irr}}$  établies dans le lemme 3.6.1.(c). Montrons la surjectivité de la seconde flèche. Soit  $\underline{E}$  un  $S$ -faisceau étale homogène sous  $G$ . Alors le  $S$ -schéma en groupes tordu  $(G^0)^{\underline{E}}$  admet un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal  $Q$ , unique à  $(G^0)^{\underline{E}}(S)$ -conjugaison près (XXVI.5.7.ii). Comme  $S$  est connexe,  $Q$  est de type constant et  $Q$  est localement  $G$ -conjugué pour la topologie étale sur  $S$  à un des  $P_j$  (XXVI.3.3, 3.8). Le lemme 2.6.2 montre que  $[\underline{E}]$  provient d'une classe  $[\underline{F}] \in H^1(S, N_G(P_j))$ . Le lemme 3.6.1 montre que  $[\underline{F}] \in H^1(S, N_G(P_j))_{\text{irr}}$ .

Le lemme 4.2.1 indique que chaque facteur  $H^1(S, N_G(P_j))_{\text{irr}}$  se plonge dans  $H^1(S, G)$ . L'unicité de  $Q$  à  $G(S)$ -conjugaison près garantit que ces facteurs ne se rencontrent pas.  $\square$

**4.4. Décomposition dans le cas quasi-épinglé.** – La généralisation au cas quasi-épinglé nécessite deux lemmes préliminaires.

**Lemme 4.4.1.** – *Soit  $f : S' \rightarrow S$  un morphisme fini étale surjectif et soit  $h : X \rightarrow S$  un morphisme lisse séparé surjectif dont les fibres géométriques sont géométriquement connexes. Alors  $\text{Hom}_S(S, S') \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S(X, S')$ .*

*Démonstration.* – Cet énoncé est local pour la topologie étale sur  $S$ . Il est donc loisible de supposer que  $S$  est local strictement hensélien. En particulier  $S' \cong S \sqcup \dots \sqcup S$  ( $n \geq 1$  copies de  $S$ ). Le morphisme  $h$  étant lisse, il est donc ouvert. De plus, le morphisme  $h$  étant à fibres géométriques connexes, le lemme de connexité par fibres [18, IV.2.4.4.2] montre que  $X$  est connexe. Pour  $i = 1, \dots, n$ , on désigne par  $h_i$  le composé  $h_i : X \xrightarrow{h} S \xrightarrow{c_i} S'$ ,  $c_i$  appliquant  $S$  sur la  $i$ -ème composante.

Soit  $f : X \rightarrow S$  un  $S$ -morphisme. Pour chaque  $i$ , on considère « l'égalisateur »  $X_i = \{x \in X \mid f(x) = h_i(x)\}$ , c'est un sous-schéma fermé de  $X$  puisque  $X$  est séparé sur  $S$ . On a  $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n = X$ , donc les  $X_i$  sont aussi ouverts. Or  $X$  est connexe donc il existe un unique indice  $i$  tel que  $X = X_i$ . Ainsi  $f = h_i$  et on conclut que l'application  $\text{Hom}_S(S, S') \rightarrow \text{Hom}_S(X, S')$  est bijective.  $\square$

**Proposition 4.4.2.** – *Soit  $G$  un  $S$ -groupe réductif admettant un  $S$ -groupe de Borel  $B$ . Soient  $E$  un  $G$ -torseur au-dessus de  $S$  et  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique du  $S$ -schéma en groupes tordu  $G^E$ . Alors  $P$  est localement  $G$ -conjugué pour la topologie étale à un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G$ .*

*Démonstration.* – On note  $\underline{\text{Par}}(G)$  le  $S$ -schéma des sous-groupes paraboliques du  $S$ -groupe réductif  $G$  (XXVI.3). L'isomorphisme  $G^E \times_S E \cong G \times_S E$  produit des flèches

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\text{Par}}(G^E)(S) & \longrightarrow & \underline{\text{Par}}(G^E)(E) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\text{Par}}(G)(E) & \longleftarrow & \underline{\text{Par}}(G)(S) \\ \downarrow \text{t} & & \downarrow \text{t} & & \downarrow \text{t} & & \downarrow \text{t} \\ \text{Of}(\text{Dyn}(G^E))(S) & \xrightarrow{\sim} & \text{Of}(\text{Dyn}(G^E))(E) & \xrightarrow{\sim} & \text{Of}(\text{Dyn}(G))(E) & \xleftarrow{\sim} & \text{Of}(\text{Dyn}(G))(S). \end{array}$$

En effet, selon le lemme 4.4.1 appliqué au  $S$ -schéma  $E$  à fibres géométriques géométriquement connexes, on a  $\text{Of}(\text{Dyn}(G))(S) \xrightarrow{\sim} \text{Of}(\text{Dyn}(G))(E)$  et de même pour  $\text{Dyn}(G^E)$ . Ceci montre que le type de  $P$  dans  $\text{Of}(\text{Dyn}(G^E))(S)$  définit un élément de  $t_0 \in \text{Of}(\text{Dyn}(G))(S)$ . Puisque  $G$  contient un sous-groupe de Borel  $B$ , le lemme XXVI.3.8 montre que tous les types  $\text{Of}(\text{Dyn}(G))(S)$  sont représentés par des  $S$ -sous-groupes paraboliques de  $G$ . On note  $Q$  le  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G$  de type  $t_0$ . Pour montrer que  $P$  et  $Q$  sont localement  $G$ -conjugués pour la topologie étale, il est loisible de supposer  $S$  local strictement hensélien. En particulier, le  $G$ -torseur  $E$  est alors trivial et il est loisible de supposer que  $G^E = G$ . Comme  $P$  et  $Q$  ont même

type,  $P$  est localement  $G$ -conjugué pour la topologie fpqc à  $P$  (XXVI.3.3), mais aussi donc localement pour la topologie étale en vertu de XXVI.1.3.  $\square$

La décomposition suivante généralise celle de Tits dans le cas des corps [36].

**Théorème 4.4.3.** – *On suppose que  $S = \text{Spec}(A)$  est connexe (non vide) semi-local. Soit  $G$  un  $S$ -groupe réductif quasi-épinglé, i.e. muni d'un quasi-épinglage  $(B, T, X)$  où  $(B, T)$  est un couple de Killing de  $G$  et  $X$  une section partout non nulle de  $H^0(\text{Dyn}(G), \text{Lie}(G)^{\text{Dyn}(G)})$ ,  $\text{Lie}(G)^{\text{Dyn}(G)}$  désignant le  $\mathcal{O}_{\text{Dyn}(G)}$ -module canonique (XXIV.3.9). Soient  $P_1, \dots, P_l$  les  $S$ -sous-schémas en groupes paraboliques de  $G$  contenant  $B$  et soient  $L_1, \dots, L_l$  les sous-groupes de Levi (uniques) respectifs contenant  $T$ . Alors on a les bijections*

$$\bigsqcup_{j=1, \dots, l} H^1(S, L_j)_{\text{irr}} \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{j=1, \dots, l} H^1(S, P_j)_{\text{irr}} \xrightarrow{\sim} H^1(S, G).$$

**Démonstration.** – Pour chaque  $j$ , on a  $L_j = N_G(P_j, L_j)$  (discussion précédent le corollaire XXVI.1.8); l'application  $H^1(S, L_j)_{\text{irr}} \rightarrow H^1(S, P_j)_{\text{irr}}$  est donc bijective en vertu du lemme 3.6.1.(c). En prenant la somme disjointe, on obtient le premier isomorphisme.

L'injectivité de la seconde application suit du même argument que pour le Théorème 4.3.1, à savoir que chaque morceau  $H^1(S, P_j)_{\text{irr}}$  se plonge dans  $H^1(S, G)$  et que les morceaux ne se rencontrent pas. Pour la surjectivité, on se donne un  $S$ -faisceau étale  $\underline{E}$  principal homogène sous  $G$ . Suivant XXVI.5.7 (ou le lemme 3.3.1.(2), le  $S$ -schéma en groupes tordu  $G^{\underline{E}}$  admet un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal  $Q$ . La proposition 4.4.2 montre que  $Q$  est localement  $G$ -conjugué pour la topologie étale à un  $S$ -sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$ .

Le lemme 3.4.6 montre alors que  $\underline{E}$  admet une réduction à  $P$ , c'est-à-dire il existe un  $S$ -faisceau principal homogène  $\underline{F}$  sous  $P$  et un isomorphisme  $\phi : \underline{F} \wedge^P G \xrightarrow{\sim} \underline{E}$  de  $S$ -espaces principaux homogènes sous  $G$ . Cette trivialisation donne lieu à un isomorphisme  $\phi_* : G^{\underline{F}} \xrightarrow{\sim} G^{\underline{E}}$  et  $\phi_*(P^{\underline{F}})$  est un  $S$ -parabolique de  $G^{\underline{E}}$  de même type que  $Q$ . En vertu du théorème de conjugaison XXVI.5.5.(i),  $\phi_*(P^{\underline{F}})$  est  $G^{\underline{E}}(S)$ -conjugué à  $Q$ . En particulier  $\phi_*(P^{\underline{F}})$  est un  $S$ -groupe parabolique minimal de  $G^{\underline{E}}$  et la réduction  $\underline{F}$  est bien irréductible suivant le lemme 3.6.1.(a).  $\square$

**4.5. Questions d'isotrivialité.** – Nous rappelons les définitions XXIV.4.1.1 et XXIV.4.1.2 dans le cas particulier localement de présentation finie qui nous concerne ici (XXIV.4.1.3).

**Définition 4.5.1.** – Soient  $H$  un  $S$ -schéma en groupes localement de présentation finie.

(1) Si  $E$  est un  $H$ -torseur sur  $S$ , on dit que  $E$  est isotrivial si  $E$  est trivialisé par un morphisme fini étale surjectif. On dit que  $E$  est *localement isotrivial* (resp. *semi-localement isotrivial*) si et seulement si pour tout morphisme  $S' \rightarrow S$ ,  $S'$  local (resp. semi-local),  $E_{S'}$  est isotrivial, c'est-à-dire s'il existe  $S'' \rightarrow S'$  étale fini surjectif tel que  $\underline{E}_{S''}$  soit trivial.

(2) On suppose  $H$  réductif. On dit que  $H$  est *isotrivial* si  $H$  est déployé par un morphisme fini étale surjectif. On dit que  $H$  est *localement trivial* (resp. *semi-localement isotrivial*) si et seulement si pour tout morphisme  $S' \rightarrow S$ ,  $S'$  local (resp. semi-local),  $H_{S'}$  est isotrivial, c'est-à-dire s'il existe  $S'' \rightarrow S'$  étale fini surjectif tel que  $\underline{H}_{S''}$  est déployé.

On dit que  $H$  vérifie la propriété  $(I)$ , (resp.  $(LI)$ ,  $(SLI)$ ) si pour tout  $S$ -schéma  $T$  et tout  $T$ -torseur  $E$  sous  $H_T$ , alors  $E$  est isotrivial (resp. localement trivial, semi-localement isotrivial). On a les implications évidentes  $(I) \implies (SLI) \implies (LI)$ . Voici deux exemples, l'un tautologique, l'autre démontré seulement dans l'exposé XXIV.

**Exemples 4.5.2.** – (1) Si  $H$  est un  $S$ -schéma en groupes fini  $S$ -étale, alors  $H$  satisfait la propriété  $(I)$ . En effet, tout  $S$ -torseur  $E$  sous  $H$  est isotrivial fini étale sur  $S$  et donc  $E$  est fini étale et trivialisé par  $E \rightarrow S$ .

(2) Si  $H$  est un  $S$ -schéma en groupes réductifs *de type constant*, alors  $H$  est semi-localement isotrivial (resp. semi-localement quasi-isotrivial) si et seulement si le  $S$ -tore  $\text{rad}(H)$  est isotrivial (resp. semi-localement quasi-isotrivial), voir le théorème XXIV.4.1.5. Sous cette condition  $H$  satisfait la propriété  $(LI)$  (resp.  $(SLI)$ ) en vertu de XXIV.4.1.6.

Le lemme suivant est une variante de l'argument de XXIV.4.2.4.

**Lemme 4.5.3.** – Soit  $1 \rightarrow H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow H_3 \rightarrow 1$  une suite exacte (pour fppf) de  $S$ -schémas en groupes  $S$ -affines. Si  $H_1$  et  $H_3$  satisfont la propriété  $(SLI)$ , alors  $H_2$  satisfait la propriété  $(SLI)$ .

*Démonstration.* – Soient  $T$  un  $S$ -schéma,  $E$  un  $T$ -torseur sous  $H_2$  et  $T' \rightarrow T$ ,  $T'$  semi-local. On considère le produit contracté  $E_3 := E \wedge^{H_2, T} H_{3, T}$  qui est un  $T$ -torseur sous  $H_3$ . Comme  $H_3$  satisfait la propriété  $(SLI)$ , il existe un morphisme  $T'' \rightarrow T'$  étale fini surjectif tel que  $E_{3, T''}$  soit isomorphe au  $T''$ -torseur trivial sous  $H_{3, T''}$ . En vertu de [17, III.3.2.1.2], le  $T''$ -torseur  $E$  sous  $H_2$  admet une réduction à  $H_1$ , c'est-à-dire qu'il existe un  $T''$ -torseur  $E_1$  et un  $H_2$ -isomorphisme  $E_1 \wedge^{H_1, T''} H_{2, T''} \xrightarrow{\sim} E_{T''}$ . Le point est que  $T''$  étant fini sur  $T'$  semi-local,  $T''$  est aussi semi-local d'après [18, II.6.1.4 et 1.7]. Par hypothèse il existe un morphisme  $T''' \rightarrow T''$  étale fini surjectif qui trivialisent  $E_1$  et partant  $E_{T''}$ . On a donc construit un morphisme  $T''' \rightarrow T'$  étale fini surjectif qui trivialisent  $E$ .  $\square$

**Lemme 4.5.4.** – Soit  $H$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs de type constant supposé semi-localement isotrivial. Soit  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G$  de type constant. Alors le quotient réductif  $P^{\text{réd}}$  de  $P$  est semi-localement isotrivial. En outre, si  $P$  admet un  $S$ -sous-groupe de Levi, alors  $L$  est semi-localement isotrivial.

*Démonstration.* – Soit  $S' \rightarrow S$  un morphisme tel que  $S'$  est semi-local. Puisque  $G$  est supposé semi-localement isotrivial, il existe un morphisme  $S'' \rightarrow S'$  fini étale surjectif tel que  $G_{S''}$  est déployé, c'est-à-dire muni d'un tore maximal  $T'' = D_{S''}(M)$  et d'un système de racines  $R \subseteq M$  satisfaisant les conditions de XXII.1.12 qui font de  $(G_{S''}, T'', M, R)$  un déploiement de  $G_{S''}$ . On choisit alors un système de racines positives  $R_+$  de  $R$ , il définit un  $S''$ -groupe de Borel  $B''$  de  $G_{S''}$  selon XXII.5.1. Notant  $\Delta$  le diagramme de Dynkin de  $R$ , on note  $\Delta(P) \subseteq \Delta$  le type du  $S''$ -parabolique de type constant  $P_{S''}$ . On note  $Q''$  le  $S''$ -sous-groupe parabolique de  $G_{S''}$  contenant  $B''$  et de type  $\Delta(P)$  défini en XXVI.1.4.

Comme  $S''$  est semi-local, il existe  $g \in G(S'')$  tel que  $P_{S''} = g Q'' g^{-1}$  en vertu de XXVI.5.5. Le  $S''$ -groupe réductif  $(Q'')^{\text{réd}}$  est isomorphe à l'unique  $S''$ -groupe de Levi  $Q''$  contenant  $T''$ , à savoir le  $S''$ -groupe  $L'' := \text{Cent}_{G''}(T''_{\Delta(P)})$  défini en XXVI.1.12.ii. Celui-ci est un  $S''$ -schéma en groupes réductifs contenant un  $S''$ -tore déployé maximal, il est donc localement déployable en vertu de XXII.2.2. Ceci étant,  $L''$  est de type constant, il est donc déployé. En remontant, il vient que  $(Q'')^{\text{réd}}$  et  $(P^{\text{réd}})_{S''}$  sont déployés.  $\square$

On généralise alors au cas non connexe les résultats d'isotrivialité de XXIV.4.

**Proposition 4.5.5.** – *Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes  $S$ -lisse et  $S$ -affine. On suppose que la composante neutre  $G^0$  (qui est fermée dans  $G$ ) est un  $S$ -schéma en groupes réductifs et que le quotient fppf  $G/G^0$  est représentable par un  $S$ -schéma fini étale sur  $S$ . On suppose que  $G^0$  est semi-localement isotrivial.<sup>(3)</sup>*

1. *Le  $S$ -groupe  $G$  satisfait la propriété (SLI).*
2. *Soit  $P$  un  $S$ -schéma en groupes paraboliques de  $G^0$ . Alors  $P$  satisfait la propriété (SLI).*
3. *Le  $S$ -schéma en groupes  $N_G(P)/P$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes  $S$ -fini et  $S$ -étale et  $N_G(P)/P \rightarrow G/G^0$  est une immersion ouverte et fermée. De plus,  $N_G(P)$  satisfait la propriété (SLI).*

*Démonstration.* – La propriété (SLI) est locale pour la topologie de Zariski, ce qui permet de supposer  $G^0$  de type constant et  $P$  de type constant.

(1) Par dévissage, le lemme 4.5.3 ramène au cas de  $G^0$  et  $G/G^0$  décrit dans les exemples 4.5.2.

(2) On note  $q : P \rightarrow P^{\text{réd}}$  le quotient réductif maximal de  $P$ . Soient  $T$  un  $S$ -schéma,  $E$  un  $T$ -torseur sous  $P$  et  $T' \rightarrow T$ ,  $T'$  semi-local. On considère le  $S$ -torseur  $E^{\text{réd}} = E \wedge^P P^{\text{réd}}$  sous  $P^{\text{réd}}$ . Le lemme 4.5.4 indique que  $P^{\text{réd}}$  est semi-localement isotrivial donc il existe un morphisme  $T'' \rightarrow T'$  fini étale surjectif tel que  $(E^{\text{réd}})_{T''}$  est isomorphe au  $T''$ -torseur trivial sous  $P^{\text{réd}}$ . Comme  $T''$  est affine, l'application  $q_* : H^1(T'', P) \rightarrow H^1(T'', P^{\text{réd}})$  est bijective (XXVI.2.8) d'où l'on conclut que  $E_{T''}$  est isomorphe au  $T''$ -torseur trivial sous  $P$ . Ceci montre que  $P$  satisfait la propriété (SLI).

<sup>(3)</sup> Ce qui équivaut à la même condition pour le tore  $\text{rad}(G^0)$  (XXIV.4.1.5.(i)).

(3) D'après la proposition 3.4.3.(5),  $N_G(P)/P$  est représentable par un  $S$ -schéma étale et  $i : N_G(P)/P \rightarrow G/G^0$  est une immersion ouverte. Pour montrer que  $N_G(P)/P$  est  $S$ -fini, nous allons montrer que  $N_G(P)/P$  est propre. On pose  $X = G/G^0$  et on considère le  $G_X^0$ -torseur  $q : G \rightarrow X = G/G^0$ . Nous affirmons que le produit contracté  $\mathcal{Y} = G \wedge^{G^0} G^0/P$  au dessus de  $X$  est représentable. Par hypothèse,  $G^0$  satisfait la propriété (SLI), il existe donc un recouvrement ouvert  $(X_i)_{i \in I}$  de  $X$  et des morphismes finis étales  $f : X'_i \rightarrow X_i$  qui trivialisent  $q$ . En particulier, pour chaque  $i$ , le  $X'_i$ -faisceau  $\mathcal{Y}_{|X'_i}$  est représentable par un  $X'_i$ -schéma projectif, donc par descente effective de  $X'_i$  à  $X_i$  [19, VIII.5.6],  $\mathcal{Y}_{|X_i}$  est représentable par un  $S$ -schéma. Par recollement,  $\mathcal{Y}$  est donc représentable par un  $X$ -schéma  $Y$  qui est  $X$ -propre en vertu des propriétés de permanence de la descente fidèlement plate [18, IV.2.7.1.(vii)]. Le  $S$ -schéma  $Y \rightarrow X \rightarrow S$  est aussi propre et représente  $G/P$ . Par descente fidèlement plate,  $N/P \rightarrow G/P$  est une immersion fermée, d'où  $N/P$  est propre sur  $S$ . On conclut que  $N/P$  est fini étale sur  $S$  et que l'immersion ouverte  $i : N_G(P)/P \rightarrow G/G^0$  est aussi fermée.

Pour établir la propriété (SLI), le passage de  $P$  à  $N_G(P)$  se fait de la même façon qu'en (1).  $\square$

## 5. Le cas du schéma en groupes des automorphismes d'un schéma de Chevalley

Soit  $\Psi = (M, M^\vee, R, R^\vee)$  une donnée radicielle épinglée (XXIII.1.5), i.e. munie d'un système de racines simples  $\Delta \subseteq R$ . On note  $R_+$  l'ensemble des racines positives associées. On note  $G = \text{Ép}_{\mathbb{Z}}(\Phi)$  le  $\mathbb{Z}$ -schéma en groupes de Chevalley correspondant (XXV). Il est muni d'un  $\mathbb{Z}$ -sous-groupe de Borel  $B$  contenant un  $\mathbb{Z}$ -tore maximal déployé  $T$  de groupe des caractères  $M$ . On a une suite exacte (scindée) de  $\mathbb{Z}$ -schémas en groupes

$$1 \rightarrow G^{\text{ad}} \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(G) \xrightarrow{p} \text{Aut ext}(G) \rightarrow 1$$

où  $G^{\text{ad}} = G/\text{Cent}(G)$  désigne le quotient adjoint de  $G$  et  $\text{Aut ext}(G)$  est un groupe constant à engendrement fini (§XXIV.1.3) de groupe abstrait sous-jacent noté encore  $\text{Aut ext}(G)$ . La section  $h : \text{Aut ext}(G) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  de cette suite exacte est définie en prenant la réciproque de l'isomorphisme  $E_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \text{Aut ext}(G)$  où  $E_{\mathbb{Z}}$  désigne le schéma en groupes constant associé au groupe abstrait  $E \subseteq \text{Aut}_{\text{gr}}(G)(\mathbb{Z})$  des  $\mathbb{Z}$ -automorphismes de  $G$  qui préservent l'épingleage.

**5.1. Normalisateurs des sous-groupes paraboliques standards.** – On note  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{t}$ ) l'algèbre de Lie de  $G$  (celle de  $T$ ) et on rappelle que l'on a une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$  où les  $\mathfrak{g}^\alpha$  sont libres de rang 1. Pour chaque partie  $I \subseteq \Delta$ ,  $[I]$  désigne l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers d'éléments de  $I$  et  $R_I = R_+ \cup -[I]$  est la partie parabolique de  $R$  attachée à  $I$  (voir §9.1 ci-dessous). On dispose du  $\mathbb{Z}$ -groupe parabolique « standard »  $P_I$  qui est déterminé



(parmi les paraboliques) par son algèbre de Lie (XXVI.1.4)

$$\mathrm{Lie}(P_I) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R_I} \mathfrak{g}^\alpha$$

On définit le réseau

$$M_I = (M / \bigoplus_{r \in I} \mathbb{Z}.r) / \text{torsion}$$

et on note  $T_I$  son  $\mathbb{Z}$ -tore dual, c'est le tore maximal du noyau commun des  $\alpha \in I$ . Suivant XXVI.1.12,  $L_I := \mathrm{Cent}_G(T_I)$  est l'unique sous-groupe de Levi de  $P_I$  qui contient  $T$ . Le  $S$ -groupe  $L_I$  est un  $S$ -sous-groupe de type (R) de  $G$ ; cela se vérifie sur la définition XXII.5.2.1 : le  $S$ -groupe  $L_I$  est lisse de présentation finie sur  $S$ , et pour tout  $s \in S$ ,  $(L_I)_{\bar{s}}$  est connexe et contient un tore maximal de  $G_{\bar{s}}$ . En vertu de XXII.5.3.5, le  $S$ -groupe  $L_I$  est donc caractérisé parmi les  $S$ -sous-groupes de  $G$  de type (R) contenant  $T$  par son algèbre de Lie

$$\mathrm{Lie}(L_I) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in [I]} \mathfrak{g}^\alpha.$$

On note  $U_I = \mathrm{rad}^u(P_I)$ .

**Lemme 5.1.1.** – Soient  $I, J \subseteq \Delta$ . Soit  $S$  un schéma non vide. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe  $e \in E$  tel que  $J = eI$ ;
2. les  $\mathbb{Z}$ -sous-groupes  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_I)$  et  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_J)$  de  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$  sont  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)(\mathbb{Z})$ -conjugués;
3. les  $S$ -sous-groupes  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_I)$  et  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_J)$  de  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)_S$  sont  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)(S)$ -conjugués;
4. les  $S$ -sous-groupes  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_I)$  et  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_J)$  de  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)_S$  sont localement  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)_S$ -conjugués pour la topologie fppf.

*Démonstration.* – Les implications  $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4)$  sont triviales. On suppose (4). Il existe alors un point  $\mathrm{Spec}(k) \rightarrow S$  où  $k$  est un corps algébriquement clos tel que  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_I)_k$  et  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_J)_k$  sont  $\mathrm{Aut}(G)(k)$ -conjugués. Il existe donc un automorphisme  $f$  de  $G_k$  tel que  $f(\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_I)_k) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_J)_k$ . En prenant les composantes neutres, il vient  $f(P_{I,k}) = P_{J,k}$ . Quitte à modifier  $f$  par un élément convenable de  $\mathrm{Ad}(P_I)(k)$ , il est loisible de supposer que  $f$  préserve  $B_k$  et  $T_k$ . Suivant XXIV.2.1 (dernière ligne), on a  $f = e \mathrm{ad}(t)$  avec  $e \in E$  et  $t \in T(k)$ . Ainsi  $f(P_{I,k}) = P_{eI,k} = P_{J,k}$  et  $J = eI$ .  $\square$

Pour  $I \subseteq \Delta$ , nous allons décrire suivant [34, 16.3.9.(4)] le normalisateur  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},I}(G) := \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G, P_I, L_I)$  de  $P_I$  et  $L_I$ .

**Lemme 5.1.2.** – On note  $E_I \subseteq E$  le sous-groupe qui préserve  $I \subseteq \Delta$ . Alors

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},I}(G) = (L_I/C(G)) \rtimes E_{I,\mathbb{Z}}$$

et on a une suite exacte scindée de  $\mathbb{Z}$ -groupes

$$1 \rightarrow (L_I/C(G)) \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},I}(G) \rightarrow \mathrm{Aut} \, \mathrm{ext}_I(G) \rightarrow 1,$$

où  $\text{Aut ext}_I(G) = p(E_{I,\mathbb{Z}})$ . En outre on a un isomorphisme

$$U_I \rtimes \text{Aut}_{\text{gr},I}(G) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_I).$$

*Démonstration.* – On étudie le morphisme  $f_I : \text{Aut}_{\text{gr},I}(G) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(G) \rightarrow \text{Aut ext}(G)$ . On a  $\ker(f_I) = G^{\text{ad}} \cap \text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_I, L_I) = N_{G^{\text{ad}}}(P_I, L_I)$ . Suivant le lemme 3.5.3.(a) appliqué au quotient adjoint  $G \rightarrow G^{\text{ad}}$  et au couple  $(P_I/C(G), L_I/C(G))$ , on a  $L_I/C(G) = N_{G^{\text{ad}}}(P_I, L_I)$ . On conclut que  $L_I/C(G) = \ker(f_I)$ . Par ailleurs, le morphisme  $f_I$  est à valeurs dans  $E_I$  et la section  $E \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  induit une section  $E_I \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)$ . On a bien montré l'existence de la suite exacte annoncée. Le morphisme  $\text{int} : G \rightarrow \text{Aut}(G)$  induit des inclusions  $U_I \subseteq P_I \subseteq \text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_I)$  et  $\text{Aut}_{\text{gr},I}(G)$  normalise  $U_I$  et  $P_I$ , d'où un morphisme naturel  $h_I : U_I \rtimes \text{Aut}_{\text{gr},I}(G) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_I)$ . Nous allons montrer que  $h_I$  est un isomorphisme. Soit  $A$  un anneau et soit  $(u, v) \in \ker(h_I)(A)$ . Alors  $\text{int}(u) = v^{-1}$  et  $u$  normalise  $P_I$  et  $L_I$ . Comme  $L_I = N_G(P_I, L_I)$ , il vient  $N_G(P_I, L_I) \cap U_I = 1$ , d'où  $u = 1$ . Ainsi  $\ker(h_I) = 1$ .

Soit  $v \in \text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_I)(A)$ . Alors  $v(L_{I,A})$  est un  $A$ -groupe de Levi de  $P_{I,A} = v(P_{I,A})$  donc il existe un (unique)  $u \in U_I(A)$  tel que  $v(L_{I,A}) = u L_{I,A} u^{-1}$  (XXVI.1.9). Ainsi  $v = \text{int}(u) (\text{int}(u)^{-1}v)$  avec  $u \in U_I(A)$  et  $\text{int}(u)^{-1}v \in \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)(A)$ . Ceci montre que  $U_I(A) \rtimes \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)(A) \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_I)(A)$  est un isomorphisme.  $\square$

## 5.2. Décomposition de Witt-Tits

**Corollaire 5.2.1.** – Soit  $G$  un  $\mathbb{Z}$ -groupe de Chevalley semi-simple comme dans le §5.1. Soit  $S = \text{Spec}(A)$  un schéma affine connexe (non vide) semi-local. Alors on a la décomposition

$$\bigsqcup_{[I] \subseteq \Delta/E} H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G))_{\text{irr}} \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{[I] \subseteq \Delta/E} H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_I))_{\text{irr}} \xrightarrow{\sim} H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G)).$$

*Démonstration.* – L'hypothèse  $G$  semi-simple garantit que le  $S$ -groupe  $H = \text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  est  $S$ -affine (et  $S$ -lisse) suivant XXIV.1.9. En outre  $H^0$  est le  $S$ -groupe adjoint  $G^{\text{ad}}$ . Le lemme 5.1.1 indique que deux  $S$ -sous-groupes  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_I) = N_H(P_I/C(G))$  et  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G, P_J) = N_H(P_J/C(G))$  sont localement  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$ -conjugués pour la topologie étale si et seulement si  $I$  et  $J$  sont  $E$ -conjugués. Le Théorème 4.3.1 appliqué à  $H = \text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  produit la décomposition souhaitée.  $\square$

**5.3. Le cas adjoint.** – On suppose ici que le  $\mathbb{Z}$ -schéma en groupes  $G$  de Chevalley est adjoint. Alors  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  est affine au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  et  $\text{Aut ext}(G)$  est le  $\mathbb{Z}$ -schéma en groupes constant associé au groupe fini  $\text{Aut}(\Delta)$ . Le théorème d'isotrivialité semi-locale XXIV.4.1.6 indique que dans la décomposition 5.2.1, les ensembles de cohomologie considérés ne contiennent que des classes isotriviales.

Les racines simples induisent un isomorphisme (XXIV.3.13)

$$\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha : T \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_m)^\Delta.$$

De plus, si  $I \subseteq \Delta$ , cet isomorphisme induit  $T_I \xrightarrow{\sim} (\mathbb{G}_m)^{\Delta \setminus I}$ . Suivant XXII.4.1.6, on a  $\text{Cent}(L_I) = T_I$ , en particulier, le quotient  $L_I/T_I$  est adjoint. On peut alors passer au quotient par le tore  $T_I$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & T_I & \longrightarrow & L_I & \longrightarrow & L_I/T_I \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & T_I & \longrightarrow & \text{Aut}_{\text{gr},I}(G) & \longrightarrow & \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)/T_I \longrightarrow 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & \text{Aut ext}_I(G) & \xrightarrow{\sim} & \text{Aut ext}_I(G) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 1 & & 1
 \end{array}$$

**Lemme 5.3.1.** – On suppose que  $\text{Pic}(S') = 0$  pour tout  $E_I$ -revêtement  $S' \rightarrow S$  (e.g.  $S$  semi-local). Alors l'application  $H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)) \rightarrow H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)/T_I)$  est injective.

*Démonstration.* – Par l'argument habituel de torsion (comme dans la preuve du lemme 4.2.1.(2)), on doit vérifier que l'application

$$H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)^{\underline{F}}) \rightarrow H^1(S, (\text{Aut}_{\text{gr},I}(G)/T_I)^{\underline{F}})$$

a un noyau trivial pour tout  $\text{Aut}_{\text{gr},I}(G)$ -espace principal homogène  $\underline{F}$ . Ce noyau est l'image de  $H^1(S, T_I^{\underline{F}})$  dans  $H^1(S, \text{Aut}_I(G)^{\underline{F}})$ . Or le groupe fini  $\text{Aut ext}_I$  agit sur  $T_I = (\mathbb{G}_m)^{\Delta \setminus I}$  en permutant les racines; ainsi  $T_I^{\underline{F}}$  est un  $S$ -tore quasi-trivial, i.e.  $T_I^{\underline{F}} = \prod_{S'|S} \mathbb{G}_{m,S'}$  (XXIV.3.13) où  $S'$  est un  $E_I$ -torseur au-dessus de  $S$ . Alors  $H^1(S, T_I^{\underline{F}}) = H^1(S', \mathbb{G}_m) = 0$  par hypothèse, d'où le résultat.  $\square$

Ainsi, sous l'hypothèse du lemme, l'ensemble  $H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G))$  s'identifie à un sous-ensemble de  $H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)/T_I)$ . On considère alors la flèche naturelle  $\text{Aut}_{\text{gr},I}(G)/T_I \rightarrow \text{Aut}(L_I^{\text{ad}})$  et on s'intéresse au composé

$$H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)) \rightarrow H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)/T_I) \rightarrow H^1(S, \text{Aut}(L_I^{\text{ad}}))$$

qui s'insère dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr},I}(G)) & \longrightarrow & H^1(S, \text{Aut}(L_I^{\text{ad}})) \\
 \downarrow & & \\
 H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G)) & & 
 \end{array}$$

Dans le cas où  $S$  est semi-local connexe, si on se donne un  $S$ -torseur  $F$  sous  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},I}(G)$  qui est irréductible, alors le  $S$ -schéma en groupes  $(L_I^{\mathrm{ad}})^F$  est appelé le noyau anisotrope du schéma en groupes  $G^F$ . Une question naturelle est de savoir si ce noyau anisotrope détermine  $G^F$ . Au vu du lemme 5.3.1, c'est le cas lorsque le morphisme  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},I}(G)/T_I \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(L_I^{\mathrm{ad}})$  est un isomorphisme (ce qui n'est pas toujours le cas, voir la remarque ci-dessous). Dans le cas général, une réponse précise à cette question ne nous semble pas connue, voir toutefois [30, §4] pour une version orientée qui généralise le cas des corps dû à Tits [36].

**Remarque 5.3.2.** – Si  $G$  est de type  $A_3$ , on va considérer les cas  $I = \{\alpha_2\}$ ,  $J = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ , avec les conventions de Bourbaki [5, Planche I].

On a  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},I}(G) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $L_I^{\mathrm{ad}} = \mathrm{PGL}_2$  donc le morphisme  $(L_I/T_I) \rtimes_S \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},I}(G)/T_I \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(L_I^{\mathrm{ad}}) = \mathrm{PGL}_2$  n'est pas injectif.

Par ailleurs, on a  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},J}(G) = 1$ ,  $L_J^{\mathrm{ad}} = \mathrm{PGL}_2 \times_S \mathrm{PGL}_2$  et  $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(L_J^{\mathrm{ad}}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ainsi le morphisme  $L_J/T_J = \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr},J}(G)/T_J \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(L_J^{\mathrm{ad}}) = (\mathrm{PGL}_2 \times_S \mathrm{PGL}_2) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  n'est pas surjectif.

## 6. Sous-schémas paraboliques des données radicielles tordues

Soit  $S$  un schéma.

**6.1. Données radicielles tordues.** – On rappelle la définition de données radicielles au-dessus de  $S$  appelées « *Données radicielles tordues* » en XXII.1.9 et que l'on appelle librement aussi  $S$ -données radicielles.

**Définition 6.1.1.** – Soit  $T$  un  $S$ -tore. On appelle *donnée radicielle tordue* dans  $T$  la donnée :

- (i) d'un sous-schéma fini  $\mathcal{R}$  de  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{grp},S}(T, \mathbb{G}_m, S)$ ,
- (ii) d'un sous-schéma fini  $\mathcal{R}^\vee$  de  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{grp},S}(\mathbb{G}_m, S, T)$ ,
- (iii) d'un isomorphisme  $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^\vee$  noté  $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ ,

vérifiant les conditions suivantes :

(DR 1) Pour tout  $S' \rightarrow S$  et tout  $\alpha \in \mathcal{R}(S')$ , on a  $\alpha \circ \alpha^\vee = 2$ .

(DR 2) Pour tout  $S' \rightarrow S$  et tous  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(S')$ , on a

$$\alpha - \langle \beta^\vee, \alpha \rangle \beta \in \mathcal{R}(S'), \quad \alpha^\vee - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \beta^\vee \in \mathcal{R}(S').$$

De plus, si  $\alpha \in \mathcal{R}(S')$  ( $S' \neq \emptyset$ ) entraîne  $2\alpha \notin \mathcal{R}(S')$ , on dit que la donnée radicielle est *réduite*.

Le  $S$ -faisceau fppf  $\widehat{T} := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{grp} S}(T, \mathbb{G}_{m,S})$  (resp.  $(\widehat{T})^0 := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{grp} S}(\mathbb{G}_{m,S}, T)$ ) est appelé le  $S$ -faisceau des caractères (resp. cocaractères) du  $S$ -tore  $T$ ; ils sont représentables par des  $S$ -schémas en groupes constants tordus localement isotriviaux (X.4.5 et X.5.6).

Si un  $S$ -groupe réductif  $H$  admet un  $S$ -tore maximal  $T$ , on lui associe la donnée radicielle tordue  $\Psi(H, T) = (\mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  où  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}^\vee$ ) est le  $S$ -schéma des racines (resp. des coracines) par rapport à  $T$  (XXVI.1.20).

Le lien avec la notion classique est aussi donné en associant à une donnée radicielle abstraite  $(M, R, M^\vee, R^\vee)$  une  $S$ -donnée radicielle tordue  $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  relative au tore déployé  $T = D_S(M)$  (voir §6.2 ci-après). On a des isomorphismes canoniques (VIII.1.5)

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{grp} S}(T, \mathbb{G}_{m,S}) \xrightarrow{\sim} M_S, \quad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{grp} S}(\mathbb{G}_{m,S}, T) \xrightarrow{\sim} (M^\vee)_S$$

où  $M_S$  désigne le  $S$ -groupe constant de base  $M$ . Alors le sous-schéma constant  $\mathcal{R} = R_S$  (resp.  $\mathcal{R}^\vee = (R^\vee)_S$ ) est un  $S$ -sous-schéma fini de  $M_S$  (resp. de  $(M^\vee)_S$ ) et la bijection  $R \xrightarrow{\sim} R^\vee$  induit un isomorphisme de  $S$ -schémas  $\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^\vee$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha^\vee$ , qui satisfait les propriétés suivantes pour tout  $S' \rightarrow S$

- $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$  pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}(S')$ ;
- $\alpha - \langle \alpha^\vee \circ \beta \rangle \beta \in \mathcal{R}(S')$  pour tous  $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(S')$ .

Ainsi  $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  est une donnée radicielle tordue relative au tore  $T = D_S(M)$ . En outre, si  $(M, R, M^\vee, R^\vee)$  est une donnée radicielle réduite, alors  $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  est une donnée radicielle tordue réduite.

Un  $S$ -isomorphisme  $f : \Psi_1 = (T_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1^\vee) \xrightarrow{\sim} \Psi_2 = (T_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2^\vee)$  est la donnée d'un isomorphisme de  $S$ -tores  $f : T_1 \xrightarrow{\sim} T_2$  tel que tels que  $\mathcal{R}_1 = \widehat{f}(\mathcal{R}_2)$  et  $(\widehat{f})^0(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_2$ .

En particulier, on peut définir le  $S$ -foncteur des automorphismes  $\underline{\mathrm{Aut}}(\Psi)$  d'un triplet  $\Psi = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$ .

**Définition 6.1.2.** – Soit  $\Psi = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  un triplet où  $T$  est un  $S$ -tore et  $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  une donnée radicielle tordue.

(1) Pour chaque point  $s \in S$ , le *type* de  $\Psi$  en  $s$  est la classe d'isomorphie de la donnée radicielle  $(\widehat{T}_{\bar{s}}, \mathcal{R}_{\bar{s}}, (\widehat{T}_{\bar{s}})^0, \mathcal{R}_{\bar{s}}^\vee)$ .

(2) Un  $S$ -sous-schéma  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{R}$  est *parabolique* s'il est fermé, fini étale au dessus de  $S$ , et si pour tout  $s \in S$ ,  $\mathcal{Q}_{\bar{s}}$  est une partie parabolique de  $\mathcal{R}_{\bar{s}}$ .

On met en valeur maintenant le fait que localement pour la topologie étale sur  $S$ , les données radicielles sont constantes.

**Proposition 6.1.3.** – Soit  $\Psi = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  un triplet où  $T$  est un  $S$ -tore et  $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  une donnée radicielle tordue par rapport à  $T$ .

(1) Il existe un recouvrement étale  $(S_i)_{i \in I}$  de  $S$ , des données radicielles  $(M_i, R_i, M_i^\vee, R_i^\vee)$  et des isomorphismes  $f_i : (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)_{S_i} \xrightarrow{\sim} (D_{U_i}(M_i), R_{i,S_i}, (R_i^\vee)_{S_i})$  pour tout  $i \in I$ .

(2) La fonction  $s \mapsto \text{type de } \Psi \text{ en } \bar{s}$  est localement constante.

(3) Soit  $\mathcal{Q}$  un  $S$ -sous-schéma de  $\mathcal{R}$ . Alors  $\mathcal{Q}$  est un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\mathcal{R}$  si et seulement s'il existe une trivialisat on comme en (1) telle que pour chaque  $i \in I$ ,  $R_i$  admet une partie parabolique  $Q_i$  telle que  $\widehat{f}_i(Q_{i,U_i}) = \mathcal{Q}_i$ .

*Démonstration.* – (1) Le tore  $T$  est de présentation finie sur  $S$  (IX.2.1.b) et le  $S$ -tore  $T$  est quasi-isotrivial (X.4.5), c'est-  dire il existe un recouvrement étale  $S'/S$  tel que  $T \times_S S'$  est un  $S'$ -tore localement déployé. Il existe donc un recouvrement ouvert  $(S'_i)$  de  $S'$  et un  $\mathbb{Z}$ -module libre  $M_i$  de type fini tel que  $T \times_S S' \cong D_{S'_i}(M_i)$ . Les  $(S'_i)$  forment un recouvrement étale de  $S$  que nous allons raffiner. Comme  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}^\vee$  sont finis étales sur  $S$ , il existe un recouvrement étale  $(U_j)$  de  $S$  tels que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}^\vee$  sont des  $S$ -schémas finis constants.

Les  $S'_i \times_S U_j$  forment un recouvrement étale de  $S$  et comme l'énoncé est local pour la topologie étale sur  $S$ , il est loisible de supposer que  $T = D_S(M)$  et que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}^\vee$  sont des  $S$ -schémas finis constants, i.e.  $\mathcal{R} = E_S$  et  $\mathcal{R}^\vee = F_S$  où  $E, F$  sont des ensembles finis. On utilise maintenant le fait que l'on dispose d'immersions fermées  $j : \mathcal{R} = E_S \rightarrow \widehat{T} = M_S$  et  $j^\vee : \mathcal{R}^\vee = F_S \rightarrow (\widehat{T})^0 = (M^\vee)_S$ . On a un dictionnaire [29,  3.1]

$$\mathrm{Hom}_S(E_S, M_S) \xrightarrow{\sim} \left\{ h : E \times S \rightarrow M \text{ localement constante en la seconde variable} \right\};$$

les immersions fermées correspondent aux applications  $h : E \times S \rightarrow M$  telles que  $h_s$  est injective pour tout  $s$ . Comme  $E$  est fini, on obtient donc une partition de  $S$  en ensembles ouverts sur lesquels  $j$  est constante. On fait de même pour  $\mathcal{R}^\vee$ , d'où une partition de  $S$  en ouverts  $S_i$  sur lesquels  $j$  et  $j^\vee$  sont des applications constantes.

Par localisation, on est donc ramené au cas où  $T = D_S(M)$ ,  $\mathcal{R}_S = R_S$  et  $\mathcal{R}_S^\vee = (R^\vee)_S$  pour un sous-ensemble  $R$  de  $M$  (resp.  $R^\vee$  de  $M^\vee$ ). En évaluant sur une fibre géométrique, on constate que la  $S$ -donnée radicielle tordue  $(T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  est  $S$ -isomorphe à  $(D_S(M), R_S, R_S^\vee)$ .

(2) C'est un corollaire immédiat de (1) puisqu'un morphisme étale est ouvert.

(3) La notion de  $S$ -sous-schémas paraboliques de  $\mathcal{R}$  est locale pour la topologie étale (et fppf) sur  $S$ . La réciproque de l'assertion   démontrer est donc évidente. Pour le sens direct, on suppose que  $\mathcal{Q}$  est un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\mathcal{R}$ . Reprenant la trame de la démonstration de (2), on est ramené au cas  $\Psi = (D_S(M), R_S, (R^\vee)_S)$ . Comme  $\mathcal{Q}$  est fini étale sur  $S$ , on peut supposer par localisation étale que  $\mathcal{Q} \xrightarrow{\sim} E_S$  pour un ensemble fini  $E$ . Alors la  $S$ -immersion fermée  $E_S \rightarrow R_S$  est donnée par une application localement constante  $h : S \rightarrow \mathrm{Inj}(E, R)$  à valeurs dans l'ensemble des applications injectives de  $E$  dans  $R$ . Ceci produit une partition de  $S$  en ouverts  $(S_i)$  où  $\mathcal{Q}_{S_i} \cong E_i \rightarrow R_{S_i}$  est constante, donnée par une application injective  $h_i : E_i \rightarrow R$ . On pose alors  $Q_i = h_i(E_i)$ . Par évaluation à une fibre géométrique de  $S_i$ , on constate que  $Q_i$  est une partie parabolique de  $R$ . De plus,  $\mathcal{Q}_{S_i} = Q_{S_i}$  dans  $R_{S_i}$ .  $\square$

Etant donné un triplet  $\Psi = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  comme précédemment, on peut alors lui associer par descente étale son  $S$ -groupe de Weyl  $W(\Psi)$  qui est un  $S$ -groupe fini

étale. De même, on peut associer à  $\Psi$  son  $S$ -diagramme de Dynkin  $\text{Dyn}(\Psi)$  qui est un  $S$ -schéma fini étale.

On note  $\text{Par}(\Psi)$  le  $S$ -schéma fini des sous-schémas paraboliques de  $\Psi$ . De même que pour définir le type des sous-schémas en groupes paraboliques d'un groupe réductif (XXVI. 3.2), la proposition 6.1.3.(3) permet de définir le morphisme type

$$t : \text{Par}(\Psi) \rightarrow \text{Of}(\text{Dyn}(\Psi))$$

qui dans le cas de  $(D_S(M), R, R^\vee)$  et de  $A_S$  pour une partie parabolique de  $R$  associe le type de  $A$  comme partie du diagramme de Dynkin de  $(D_S(M), R, R^\vee)$ .

En utilisant le fait que la topologie fppf (et *a fortiori* étale) est « de descente effective » pour la catégorie fibrés des morphismes constants tordus (X.5.5), il suit que le  $S$ -foncteur  $\underline{\text{Aut}}(\Psi)$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes noté  $\text{Aut}(\Psi)$ , qui est constant tordu<sup>(4)</sup>. De plus, le  $S$ -groupe de Weyl  $W(\Psi)$  est un  $S$ -sous-groupe distingué de  $\text{Aut}(\Psi)$  et le quotient fppf  $\text{Aut}(\Psi)/W(\Psi)$  est représentable par un  $S$ -schéma en groupes noté  $\text{Aut ext}(\Psi)$  qui est constant tordu.

**Lemme 6.1.4.** – Soit  $\Psi = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  un triplet semi-simple.

(1) Le  $S$ -schéma en groupes  $\text{Aut}(\Psi)$  (resp.  $\text{Aut ext}(\Psi)$ ) est fini constant tordu.

(2) On suppose que  $S$  est connexe. Soit  $s \in S$ . Soit  $\Psi_0 = (D_S(M), R, R^\vee)$  le type de  $\Psi$  en  $\bar{s}$ . Il existe un revêtement galoisien  $S' \rightarrow S$  tel que  $\Psi_{0,S'} \xrightarrow{\sim} \Psi_{S'}$ .

*Démonstration.* – (1) La proposition 6.1.3.(1) ramène au cas constant qui est trivial.

(2) Comme  $S$  est connexe, son type est constant en vertu de la proposition 6.1.3.(3). Ainsi  $\Psi_0 = (D_S(M), R_S, R_S^\vee)$  est localement isomorphe pour la topologie étale à  $\Psi$ . On considère le  $S$ -faisceau (étale) principal homogène  $\underline{\text{Isom}}(\Psi_0, \Psi)$  pour le  $S$ -groupe fini constant  $\text{Aut}(\Psi_0)_S$ , il est représentable par un  $\text{Aut}(\Psi_0)$ -revêtement  $S'' \rightarrow S$ . En prenant le point universel de  $S''$ , on obtient un isomorphisme  $\Psi_{0,S''} \xrightarrow{\sim} \Psi_{S''}$ . Soit  $S'$  une composante connexe de  $S'$ , alors  $S'$  est un revêtement galoisien de  $S$  et par restriction, on obtient une trivialisatoin  $\psi : \Psi_{0,S'} \xrightarrow{\sim} \Psi_{S'}$ .  $\square$

Un autre avatar du fait que les données radicielles tordues sont localement constantes pour la topologie étale est que l'on peut associer à un triplet  $\Psi : (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  son triplet dérivé  $\Psi^{\text{dér}}$ , son triplet simplement connexe  $\Psi^{\text{sc}}$  et son triplet adjoint  $\Psi^{\text{ad}}$  à partir du cas classique (XXI.6.5.5).

**Exemples 6.1.5.** – (a) Soit  $\Psi = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  un triplet comme ci-dessus. Soit  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow T$  un  $S$ -cocaractère. On considère le  $S$ -foncteur  $\mathcal{R}(\lambda)$  défini par

$$\mathcal{R}(\lambda)(S') := \left\{ \alpha \in \mathcal{R}(S') \mid \alpha \circ \lambda : \mathbb{G}_{m,S'} \rightarrow \mathbb{G}_{m,S'} \text{ se prolonge en un } S\text{-morphisme } \mathbb{A}_{S'}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{S'}^1 \right\}.$$

Nous affirmons que  $\mathcal{R}(\lambda)$  est représentable par un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\mathcal{R}$ . Cette question étant locale pour la topologie étale, la proposition 6.1.3.(3) permet de supposer que  $T = D_S(M)$  et que la donnée radicielle tordue  $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  est associée

<sup>(4)</sup> Pour la même raison, les  $S$ -faisceaux principaux homogènes sous  $\text{Aut}(\Psi)$  sont représentables.



à une donnée radicielle  $(M, R, M^\vee, R^\vee)$ . Dans ce cas,  $\mathcal{R}(\lambda)$  est représentable par le  $S$ -sous-schéma fermé  $R(\lambda)_S$  qui est bien un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\mathcal{R}$ .

(b) De plus, la même méthode indique que  $\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}(n\lambda)$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

(c) Si  $S$  est connexe, on verra plus loin que ce sont les seuls  $S$ -sous-schémas paraboliques de  $\mathcal{R}$  (Proposition 6.3.2).

## 6.2. Lien avec les schémas en groupes réductifs

**Lemme 6.2.1.** – Soit  $(G, T, M, R)$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs déployé. Alors il y a une correspondance

$$\left\{ S\text{-sous-groupes paraboliques de } G \text{ de type constant contenant } T \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{parties paraboliques de } R \right\}$$

qui associe à un  $S$ -sous-groupe parabolique  $P$  contenant  $T$  les  $S$ -racines de  $P$  relativement à  $T$ .

Rappelons qu'un caractère  $\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$  est une  $S$ -racine  $P$  relativement à  $T$  si pour tout point  $s \in S$ ,  $\alpha_{\bar{s}}$  est une racine de  $P_{\bar{s}}$  par rapport à  $T_{\bar{s}}$ .

*Démonstration.* – On note  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{t}$ ) l'algèbre de Lie de  $G$  (celle de  $T$ ) et on rappelle que par définition (XXII.1.13) on a une décomposition  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$  où les  $\mathfrak{g}^\alpha$  sont libres de rang 1.

On commence par construire la réciproque de la correspondance. Si  $A$  est une partie parabolique de  $R$ , on note  $P_A$  l'unique<sup>(5)</sup> sous-groupe parabolique de  $G$  dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{g}^\alpha$  (XXVI.1.4.(i)). On associe donc à  $A$  ce  $S$ -groupe  $P_A$  et on note que  $A$  est l'ensemble des poids de la représentation adjointe de  $T$  sur  $\mathfrak{g}_A$ .

Il reste à montrer que cette construction produit tous les  $S$ -sous-groupes paraboliques de  $G$  de type constant contenant  $T$ . Soit donc  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $T$  et de type constant. Par construction,  $A_P$  est l'ensemble des poids de la représentation adjointe de  $T$  sur l'algèbre de Lie de  $P$ . Alors l'algèbre de Lie de  $P$  coïncide avec celle de  $P_{A_P}$  donc  $P = P_{A_P}$ .  $\square$

**Proposition 6.2.2.** – Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs muni d'un  $S$ -tore maximal  $T$ . On considère la donnée radicielle tordue (XXII.1.9).  $\Psi(G, T) = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$ .

(1) Le foncteur

$$S' \mapsto \underline{\text{Par}}_T(G)(S') = \left\{ S'\text{-sous-groupes paraboliques de } G \text{ contenant } T \right\}$$

est représentable par un  $S$ -schéma noté  $\text{Par}_T(G)$ . Le schéma  $\text{Par}_T(G)$  est fini étale au-dessus de  $S$ .

<sup>(5)</sup> En effet, les sous-schémas en groupes paraboliques sont des sous-groupes de type  $(R)$  (XXII.5.2.3.(b)), ils sont donc déterminés parmi les sous-groupes de type  $(R)$  contenant  $T$  par leur algèbre de Lie (XXII.5.3.5).

(2) Soit  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $T$ . On note  $\mathcal{Q}_P$  le  $S$ -foncteur des racines de  $P$  par rapport à  $T$  (XIX.3.2). Alors  $\mathcal{Q}_P$  est un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\Psi(G, T)$ .

(3) L'assignation  $P \mapsto \mathcal{Q}_P$  définit un  $S$ -isomorphisme  $\text{Par}_T(G) \xrightarrow{\sim} \text{Par}(\Psi)$ .

(4) Cette correspondance commute au type suivant l'isomorphisme canonique  $\text{Dyn}(\Psi(G, T)) \cong \text{Dyn}(G)$ .

*Démonstration.* – (1) On considère le  $S$ -foncteur  $\underline{\text{PT}}$  tel que  $\underline{\text{PT}}(S')$  est l'ensemble des couples  $(Q, E)$  où  $E$  est un  $S'$ -groupe parabolique de  $G \times_S S'$  et  $E$  un  $S'$ -tore maximal de  $Q$  (XXVI.3.15). D'après le théorème XXVI.3.16,  $\underline{\text{PT}}$  est représentable par un  $S$ -schéma  $\text{PT}$ . En outre on dispose d'un  $S$ -morphisme naturel  $h : \text{PT} \rightarrow \text{Tor}(G)$ ,  $(Q, E) \mapsto E$ , vers le  $S$ -schéma des tores maximaux  $\text{Tor}(G)$  de  $G$ . On note  $t = [T] \in \text{Tor}(G)(S)$  le point défini par le  $S$ -tore maximal  $T$  de  $G$ . Ainsi le  $S$ -foncteur  $\text{Par}_T(G)$  est représentable par le  $S$ -schéma  $h^{-1}(t)$ . Comme  $h$  est fini étale (XXVI.3.16.(iii)), on conclut que  $h^{-1}(t)$  est fini étale sur  $S$ .

(2) Dans le cas où  $G$  est déployé et  $P$  est de type constant, le lemme 6.2.1 indique que  $\mathcal{Q}_P$  est représentable par un  $S$ -schéma fini constant et est un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\Psi$ .

Localement pour la topologie étale sur  $S$ ,  $G$  est déployable relativement à  $T$  (XXII.2.3) et  $P$  est de type constant. Par descente étale, il suit que le  $S$ -foncteur  $\mathcal{Q}_P$  est représentable par un  $S$ -schéma fini étale et que  $\mathcal{Q}_P$  est un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\Psi$ .

(3) L'assignation  $P \mapsto \mathcal{Q}_P$  définit un  $S$ -morphisme  $u : \text{Par}_T(G) \rightarrow \text{Par}(\Psi)$ . Pour montrer que c'est un isomorphisme, on peut raisonner localement pour la topologie étale de sorte que l'on peut supposer  $G$  déployé relativement à  $T$ .

Montrons que  $u$  est un monomorphisme. Soient  $S'$  un  $S$ -schéma et  $P_1, P_2$  des  $S'$ -sous-schémas paraboliques de  $G \times_S S'$  tels que  $u(P_1) = u(P_2) \in \text{Par}(\Psi)(S')$ . Comme les types de  $P_1$  et  $P_2$  sont localement constants, le lemme 6.2.1 montre que  $P_1 = P_2$ . Ceci montre que  $u$  est un monomorphisme. Le même énoncé montre que  $u$  est un morphisme surjectif de faisceaux fppf sur  $S$ , ce qui permet de conclure que  $u$  est un  $S$ -isomorphisme de schémas.

(4) Cela se vérifie également dans le cas déployé. □

**6.3. Indice de Tits.** – Cette partie utilise l'appendice de combinatoire et de cohomologie des groupes.

**Proposition 6.3.1.** – On suppose que  $S$  est connexe. Soit  $\Psi = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  un triplet où  $T$  est un  $S$ -tore et  $(\mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  une donnée radicielle tordue par rapport à  $T$ .

(1) Le faisceau  $\mathcal{R}$  admet un  $S$ -sous-schéma parabolique minimal et les  $S$ -sous-schémas paraboliques minimaux de  $\mathcal{R}$  ont même type dans  $\text{Dyn}(\Psi)(S)$ .

(2) Si  $\mathcal{Q}$  un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\mathcal{R}$ , alors il existe un cocaractère  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow T$  tel que  $\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{Q}$ .

*Démonstration.* – Pour les deux énoncés, on peut remplacer  $\Psi$  par le triplet dérivé  $\Psi^{\text{dér}}$ . En particulier, il est loisible de supposer  $\Psi$  semi-simple.

(1) D'après le lemme 6.1.4.(2), il existe une donnée radicielle constante  $\Phi = (M, R, M^\vee, R^\vee)$   $\Psi_0 = (D_S(M), R_S, R_S^\vee)$ , un revêtement galoisien (connexe)  $S' \rightarrow S$  et un isomorphisme  $\psi : \Psi_{0,S'} \xrightarrow{\sim} \Psi_{S'}$ . On désigne par  $\Gamma$  le groupe de Galois de  $S' \rightarrow S$  et on considère l'homomorphisme  $f : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Phi) = \text{Aut}(\Psi_0)(S')$ ,  $\gamma \mapsto \psi^{-1} \gamma(\psi)$ .

On peut ainsi supposer que la  $S$ -donnée radicielle tordue  $\Psi$  est la tordue de  $\Psi_0$  par le 1-cocycle  $f : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Psi_0)(S)$  relatif au revêtement galoisien  $S' \rightarrow S$  de groupe  $\Gamma$ . Par descente galoisienne, les sous-faisceaux paraboliques de  $\mathcal{R}$  correspondent aux parties paraboliques de  $R$  stables par l'action de  $\Gamma$  suivant  $f$ . Par application de la partie combinatoire §9.4, on obtient ainsi l'existence d'un sous-faisceau parabolique minimal de  $\mathcal{E}$  et l'unicité du type des sous-faisceaux paraboliques minimaux de  $\mathcal{R}$ .

(2) Soit  $\mathcal{Q}$  un  $S$ -sous-schéma parabolique de  $\mathcal{R}$ . Alors  $\psi(\mathcal{Q})$  est une partie parabolique de  $R_{S'}$ . Comme  $S'$  est connexe, on a  $\psi(\mathcal{Q}) = A_{S'}$  pour une unique partie parabolique  $A$  de  $R$ . Il existe une base  $\Delta$  de  $R$  telle que  $A = R_I$  pour un sous-ensemble  $I$  de  $\Delta$ . De plus, l'image de  $f$  est incluse dans le groupe  $\text{Aut}(\Phi, R_I)$ . Le lemme 9.2.2 produit un élément  $\theta \in M^\vee$  qui est  $\text{Aut}(\Phi, R_I)$ -invariant et tel que  $R_I = R(\theta)$ . Alors  $\psi \circ \lambda : \mathbb{G}_{m,S'} \rightarrow D_{S'}(M) \rightarrow T_{S'}$  se descend en un  $S$ -homomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow T$ . Comme  $R_I = R(\theta)$ , on conclut que  $\mathcal{Q} = \mathcal{R}(\lambda)$ .  $\square$

Ceci permet de définir l'indice de Tits  $\Delta^0(\Psi) \subseteq \text{Dyn}(\Psi)(S)$  comme le type d'un sous-schéma parabolique minimal de  $\mathcal{R}$ . Faisons dès à présent le lien avec l'indice de Tits usuel.

**Proposition 6.3.2.** – *On suppose que  $S$  est semi-local connexe. Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs et soit  $\Delta^0(G) \subseteq \text{Dyn}(G)(S)$  l'indice de Tits de  $G$ , i.e. le type d'un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal de  $G$  (XXVI.7). Soit  $T$  un  $S$ -sous-tore maximal de  $G$  et  $u : \text{Dyn}(\Psi(G, T)) \xrightarrow{\sim} \text{Dyn}(G)$  l'isomorphisme canonique associé.*

(1)  $\Delta^0(G) \subseteq u\left(\Delta^0(\Psi(G, T))\right)$ .

(2) On a  $\Delta^0(G) = u\left(\Delta^0(\Psi(G, T))\right)$  si et seulement si le sous  $S$ -tore maximal déployé  $T_{\text{dép}}$  de  $T$  est un  $S$ -tore déployé maximal de  $G$ .

*Démonstration.* – Soit  $\mathcal{A}$  un sous  $S$ -faisceau parabolique de  $\mathcal{R}(G, T)$  de type  $\Delta^0(\Psi(G, T))$ .

(1) Le  $S$ -sous-groupe parabolique  $P_{\mathcal{A}}$  est de type  $u\left(\Delta^0(\Psi(G, T))\right) \subseteq \text{Dyn}(G)(S)$ . Vu que  $\Delta^0(G)$  est le type des  $S$ -sous-groupes paraboliques minimaux de  $G$ , il suit que  $\Delta^0(G) \subseteq u\left(\Delta^0(\Psi(G, T))\right)$ .

(2) Si  $\Delta^0(G) = u\left(\Delta^0(\Psi(G, T))\right)$ , alors  $P_{\mathcal{A}}$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal de  $G$ . Notant  $L$  le sous-groupe de Levi contenant  $T$ , on sait que  $L = \text{Cent}(T_{\text{dép}})$  et que la minimalité de  $P_{\mathcal{A}}$  entraîne la maximalité de  $T_{\text{dép}}$  parmi les sous-tores déployés de  $G$  (XXVI.6.8 et 6.16). Réciproquement, on suppose que  $T_{\text{dép}}$  est un tore maximal déployé de  $G$ . On sait alors que  $L = \text{Cent}(T_{\text{dép}})$  est le sous-groupe de

Levi d'un  $S$ -sous-groupe parabolique minimal  $P$  de  $G$ . Par suite  $\mathcal{R}(P, T)$  est un sous-faisceau parabolique de  $\mathcal{R}(G, T)$  de type  $u^{-1}(\Delta^0(G))$ . Par définition de  $\Delta^0(\Psi(G, T))$ , on a  $\Delta^0(\Psi(G, T)) \subseteq u^{-1}(\Delta^0(G))$ , d'où  $u(\Delta^0(\Psi(G, T))) \subseteq \Delta^0(G)$ . En tenant compte de (1), on conclut que  $u(\Delta^0(\Psi(G, T))) = \Delta^0(G)$ .  $\square$

## 7. Isotropie et irréductibilité

### 7.1. Définition, groupes limites

**Définition 7.1.1.** – Un  $S$ -schéma en groupes réductifs  $H$  est *isotrope* s'il admet un  $S$ -sous-schéma en groupes isomorphe à  $\mathbb{G}_{m,S}$ . On dit que  $H$  est *anisotrope* dans le cas contraire.

L'isotropie est une notion stable par changement de base arbitraire. L'isotropie et la réductibilité sont liées notamment par la construction suivante. Soit  $H$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs. Si  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow H$  désigne un homomorphisme de  $S$ -groupes, on lui associe le  $S$ -schéma en groupes « limite »  $P_H(\lambda)$  [10, §5.2] défini par son foncteur des points

$$P_H(\lambda)(T) = \left\{ h \in H(T) \mid \lambda(t) h_{\mathbb{G}_{m,T}} \lambda(t)^{-1} \in H(\mathbb{G}_{a,T}) \subseteq H(\mathbb{G}_{m,T}) \right\}$$

pour tout  $T \rightarrow S$ . On sait que  $P_H(\lambda)$  est un  $S$ -sous-schéma en groupes paraboliques de  $H$  et que le centralisateur  $\text{Cent}_H(\lambda)$  de  $\lambda$  est un sous-groupe de Levi de  $P_G(\lambda)$ . En outre, si l'on diagonalise l'action adjointe de  $\mathbb{G}_{m,S}$  sur le  $\mathcal{O}_S$ -module  $\text{Lie}(H)$ , on a

$$\text{Lie}(P_H(\lambda)) = \text{Lie}(H)_{\geq 0} \quad \text{et} \quad \text{Lie}(\text{Cent}_H(\lambda)) = \text{Lie}(H)_0.$$

Etant donné un entier  $n \geq 1$ , on a  $P_H(\lambda) \subseteq P_H(n\lambda)$  et  $\text{Lie}(P_H(n\lambda)) = \text{Lie}(P_H(\lambda))$  : la proposition 3.1.1.(2) montre que  $P_H(\lambda) = P_H(n\lambda)$ , d'où  $\text{Cent}_H(\lambda) = \text{Cent}_H(n\lambda)$ . La correspondance 6.2.2.(2) entre sous-schémas en groupes paraboliques et sous-schémas paraboliques admet le complément suivant.

**Lemme 7.1.2.** – Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs muni d'un  $S$ -tore maximal  $T$ . On considère la donnée radicielle tordue  $\Psi(G, T) = (T, \mathcal{R}, \mathcal{R}^\vee)$  (XXII.1.9). Soit  $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow T$  un  $S$ -homomorphisme. Alors dans la correspondance de la proposition 6.2.2.(2), le sous- $S$ -schéma parabolique  $\mathcal{R}(\lambda)$  de  $\mathcal{R}$  correspond au  $S$ -sous-schéma en groupes paraboliques  $P_G(\lambda)$  de  $G$ .

*Démonstration.* – Une nouvelle fois, il suffit de considérer le cas déployé qui est traité en [10, Remark §5.2.6].  $\square$

Ainsi par localisation étale, on a  $P_G(\lambda) = P_G(n\lambda)$  pour tout  $S$ -groupe réductif  $G$ , tout  $S$ -homomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow G$  et tout entier  $n \geq 1$ .

**Exemple 7.2.** – Soit  $G$  un  $S$ -groupe adjoint déployé. On reprend les notations du §5.3 en considérant une partie  $I \subseteq \Delta$  et le couple  $(P_I, L_I)$ . On sait que  $\Delta$  est une base du réseau  $M$  et on note  $(\alpha^*)_{\alpha \in \Delta}$  la base duale. On pose  $\lambda_I = \sum_{\beta \in \Delta \setminus I} \beta^* \in (\hat{T})^0(S)$ . Nous prétendons que

$$(P_I, L_I) = (P_G(\lambda_I), \text{Cent}(\lambda_I)).$$

Comme ces  $S$ -groupes sont déterminés entre eux par leurs algèbres de Lie (XXII.5.3.5), il suffit de montrer que  $P_G(\lambda_I)$  (resp.  $\text{Cent}(\lambda_I)$ ) a même algèbre de Lie que  $P_I$  (resp.  $L_I$ ). Or

$$\text{Lie}(P_G(\lambda_I)) = \mathfrak{g}_{\geq 0} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R \mid \langle \lambda_I, \alpha \rangle \geq 0} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Suivant la remarque 9.2.3, on a  $R(\lambda_I) = R_I$ , d'où  $\text{Lie}(P_G(\lambda_I)) = \text{Lie}(P_I)$ . De même, on a  $\text{Lie}(\text{Cent}_G(\lambda_I)) = \text{Lie}(L_I)$ . Le choix de  $\lambda_I$  n'est pas arbitraire du point de vue du  $S$ -groupe  $\text{Aut}_{\text{gr}, I}(G) = L_I \rtimes \text{Aut ext}_I(G)$ . En effet, le groupe fini  $\text{Aut ext}_I(G)$  agit par permutation sur  $I$  et l'élément  $\lambda_I \in (\hat{T})^0$  est fixé par  $\text{Aut ext}_I(G)$ . En particulier, l'homomorphisme  $\lambda_I : \mathbb{G}_{m, S} \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}, I}(G)$  est central.

**7.3. Caractérisation des groupes limites.** – Si  $S$  est semi-local connexe, suivant XXVI.6.14,  $H$  est isotrope si et seulement si  $H$  est réductible ou  $\text{rad}(H)$  est isotrope ; en particulier si  $H$  est semi-simple,  $H$  est réductible si et seulement si  $H$  est isotrope. En outre, cela implique alors que tous les  $S$ -sous-groupes paraboliques sont des  $S$ -sous-groupes de limites (voir [16, prop. 15.5]). Notre propos est de généraliser ce fait pour une base  $S$  connexe arbitraire.

**Théorème 7.3.1.** – On suppose  $S$  connexe (non vide). Soit  $H$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs.

(1) Soit  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$  muni d'un  $S$ -sous-groupe de Levi  $L$ . Alors il existe un homomorphisme central  $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow L$  tel que  $L = \text{Cent}_H(\lambda)$  et  $P = P_H(\lambda)$ .

(2) Le  $S$ -schéma en groupes  $H$  est isotrope si et seulement si  $H$  est réductible ou  $\text{rad}(H)$  est isotrope (ou de façon équivalente  $\text{corad}(H)$  est isotrope).

*Démonstration.* – Soit  $s \in S$ .

(1) Le Lemme de dévissage 3.2.1.(2) nous amène à supposer d'abord  $H$  semi-simple adjoint. Comme  $S$  est connexe,  $H$  est une  $S$ -forme d'un  $S$ -groupe  $G$  de Chevalley adjoint attaché à une donnée radicielle réduite  $\Phi = (M, R, M^\vee, R^\vee)$ . On utilise librement les notations de la section 5, par exemple une base  $\Delta$  de  $R$ . On note  $\underline{E} = \underline{\text{Isom}}_{\text{gr}}(G, H)$  le  $S$ -faisceau étale principal homogène sous  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  (défini au §2.1). On a alors  $H = G^{\underline{E}}$ , c'est-à-dire  $H$  est le tordu de  $G$  selon  $\underline{E}$ . On note  $I \subseteq \Delta$  le type du parabolique  $P_{\bar{s}}$  et  $I$  est le type de  $P_{\bar{s}'}$  pour tout point  $s' \in S$  par connexité de  $S$ .

Nous prétendons que  $(P, L)$  est localement  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$ -conjugué pour la topologie étale à  $(P_I, L_I)$ . Cet énoncé étant local pour la topologie étale (et étant stable par limite inductive d'anneaux), on peut supposer  $S$  local strictement hensélien.

En particulier  $E$  est trivial et on peut supposer que  $H = G$ . Vu que  $P$  et  $P_I$  ont même type en  $s$ , la proposition XXVI.1.3, (ii)  $\implies$  (i), montre que  $P_I$  et  $P$  sont  $G(S)$ -conjugués. Les  $S$ -sous-groupes de Levi de  $P_I$  (resp.  $P$ ) sont conjugués par  $P_I(S)$  (resp.  $P(S)$ ) en vertu de XXVI.1.8, on conclut que  $(P_I, L_I)$  et  $(P, L)$  sont  $G(S)$ -conjugués et *a fortiori*  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)(S)$ -conjugués.

Nous retournons maintenant au cas d'un schéma de base  $S$  général. Le lemme 2.6.2.(1) montre qu'il existe un  $S$ -espace principal homogène  $\underline{F}$  sous  $\text{Aut}_{\text{gr}, I}(G) = N_{\text{Aut}_{\text{gr}}(G)}(P_I, L_I)$  et un isomorphisme  $q : \underline{F} \wedge^{\text{Aut}_{\text{gr}, I}(G)} \text{Aut}_{\text{gr}}(G) \xrightarrow{\sim} \underline{E}$  tels que l'isomorphisme de  $S$ -groupes  $q_* : \underline{G}^{\underline{F}} \xrightarrow{\sim} \underline{G}^{\underline{E}} = H$  applique le couple  $(P_I^{\underline{F}}, L_I^{\underline{F}})$  sur  $(P, L)$ . Le point est que l'homomorphisme  $\lambda_I : \mathbb{G}_{m, S} \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}, I}(G)$  construit dans l'exemple 7.2 est central, il définit donc un homomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m, S} \rightarrow G^{\underline{F}}$  et par descente il vient  $(P_I^{\underline{F}}, L_I^{\underline{F}}) = (P_{G^{\underline{F}}}(\lambda), \text{Cent}_{G^{\underline{F}}}(\lambda))$ . On conclut que  $(P, L)$  est de la forme souhaitée.

On considère maintenant le cas où  $H$  est semi-simple. On note  $(P', L')$  l'image de  $(P, L)$  par le quotient adjoint  $p : H \rightarrow H' = H^{\text{ad}}$  (Lemme 3.2.1.(2)). Suivant le premier cas, il existe  $\lambda' : \mathbb{G}_{m, S} \rightarrow H'$  tel que  $P' = P_{H'}(\lambda')$  et  $L' = \text{Cent}_{H'}(\lambda')$ . On pose  $J = p^{-1}(\text{rad}(L))$ , c'est un  $S$ -groupe de type multiplicatif extension de  $\text{rad}(L)$  par  $\ker(p)$ . Soit  $n$  un entier strictement positif annulant le  $S$ -groupe fini de type multiplicatif  $\text{Ker}(p)$ . Nous prétendons que le cocaractère  $n\lambda' : \mathbb{G}_{m, S} \rightarrow \text{rad}(L')$  se relève de façon unique en un cocaractère  $\lambda : \mathbb{G}_{m, S} \rightarrow J$ . En effet, par descente fidèlement plate, il suffit de le vérifier dans le cas où  $J$  est diagonalisable, ce qui est alors immédiat. L'isogénie  $p$  induit des homomorphismes  $P_H(\lambda) \rightarrow P_{H'}(n\lambda') = P_{H'}(\lambda') = P'$ ,  $\text{Cent}_H(\lambda) \rightarrow \text{Cent}_{H'}(n\lambda') = \text{Cent}_{H'}(\lambda') = L'$ ; ils sont surjectifs et plats [10, prop. 4.1.10.(2)]. Or  $\text{Cent}_H(\lambda)$  contient  $\ker(p)$ , on obtient que  $P_H(\lambda) = p^{-1}(P')$  (resp.  $\text{Cent}_H(\lambda) = p^{-1}(L')$ ). La correspondance du lemme 3.2.1.(2) permet de conclure que  $P_H(\lambda) = P$  et  $\text{Cent}_H(\lambda) = L$ .

Pour le cas général on utilise le  $S$ -sous-groupe dérivé  $i : H^b = DH \rightarrow H$ . La trace de  $(P, L)$  sur  $H^b$  définit un couple  $(P^b, L^b)$  pour  $H^b$  (XXVI.1.19). Suivant le cas précédent, il existe un  $S$ -homomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m, S} \rightarrow H^b$  tel que  $(P^b, L^b) = (P_{H^b}(\lambda), \text{Cent}_{H^b}(\lambda))$ . Or la trace sur  $H^b$  du couple  $(P_H(\lambda), \text{Cent}_H(\lambda))$  est la même que celle de  $(P, L)$ , d'où l'on conclut par XXVI.1.19 que  $(P, L) = (P_H(\lambda), \text{Cent}_H(\lambda))$ .

(2) Traitons tout de suite le dernier point, à savoir l'équivalence entre l'isotropie de  $\text{rad}(H)$  et celle de  $\text{corad}(H)$ . On a une suite exacte de  $S$ -tores  $1 \rightarrow \mu \rightarrow \text{rad}(H) \rightarrow \text{corad}(H) \rightarrow 1$  où  $\mu$  est un  $S$ -groupe fini de type multiplicatif (XXII.6.2.1). Comme  $S$  est connexe, il existe un groupe abélien fini  $A$  tel que  $\mu$  soit localement isomorphe pour la topologie étale à  $D_S(A)$ . La suite exacte des  $S$ -faisceaux de caractères  $0 \rightarrow \text{corad}(H) \rightarrow \text{rad}(H) \rightarrow \widehat{\mu}(S) \rightarrow 0$  induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \widehat{\text{corad}(H)}(S) \rightarrow \widehat{\text{rad}(H)}(S) \rightarrow \widehat{\mu}(S).$$

Comme le groupe abélien  $\widehat{\mu}(S)$  est de torsion (il est annihilé par le cardinal de  $A$ ) et puisque  $\widehat{\text{corad}(H)}(S)$  et  $\widehat{\text{rad}(H)}(S)$  sont des groupes abéliens libres, il suit

que  $\widehat{\text{corad}}(H)(S) \neq 0$  si et seulement si  $\widehat{\text{rad}}(H)(S) \neq 0$ . Ainsi  $\text{rad}(H)$  isotrope équivaut à  $\text{corad}(H)$  isotrope.

Montrons le sens direct de (2). On suppose que  $H$  est isotrope. On dispose alors d'un  $S$ -monomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow H$  et on considère l'homomorphisme de  $S$ -groupes

$$\text{int} \circ \lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(H), \quad t \mapsto \text{int}(\lambda(t)).$$

Si  $\text{int} \circ \lambda$  est trivial, alors  $\text{int} \circ \lambda$  factorise par  $\text{rad}(H)$  et  $\text{rad}(H)$  est isotrope. Si  $\text{int} \circ \lambda$  est non trivial, il est partout non trivial par rigidité (IX.5.3). Par suite, le  $S$ -groupe  $P_H(\lambda)$  est alors un  $S$ -sous-groupe parabolique muni du  $S$ -sous-groupe de Levi  $\text{Cent}_H(\lambda)$  qui est partout propre dans  $H$ . Ainsi  $H$  est réductible.

Montrons la réciproque. On suppose que  $H$  est réductible ou que  $\text{rad}(H)$  est isotrope. Si  $\text{rad}(H)$  est isotrope, alors  $H$  est isotrope et il n'y a rien à faire. On se place donc dans le cas  $H$  admet un couple  $(P, L)$  où  $P$  est un  $S$ -sous-groupe parabolique partout propre de  $H$ ,  $L$  étant un sous-groupe de Levi de  $P$ . D'après le (1), il existe un homomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow H$  tel que  $(P, L) = (P_H(\lambda), \text{Cent}_H(\lambda))$ . Cet homomorphisme est partout non central, donc partout non nul. Comme  $S$  est connexe, son noyau  $\ker(\lambda)$  est donc un sous-groupe diagonalisable  $\mu_n$  de  $\mathbb{G}_m$  (IX.2.11) et par passage au quotient, on obtient un monomorphisme  $\lambda' : \mathbb{G}_m \rightarrow H$  partout non trivial. C'est une immersion fermée (IX.6.8), donc  $H$  est isotrope.  $\square$

**Corollaire 7.3.2.** – *On suppose  $S$  affine. Soit  $H$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs.*

(1) *Soit  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $H$ . Alors il existe un homomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow H$  tel que  $P = P_H(\lambda)$ .*

(2) *Le schéma en groupes  $H$  est isotrope si et seulement si  $H$  admet un  $S$ -sous-groupe parabolique partout propre ou  $\text{rad}(H)$  est isotrope (ou de façon équivalente  $\text{corad}(H)$  est isotrope).*

*Démonstration.* – (1) On pose  $S = \text{Spec}(A)$  que l'on peut supposer non vide. On sait que  $P$  admet un sous-groupe de Levi  $L$  (XXVI.3.2). Si  $S$  est connexe, le théorème 7.3.1 montre que  $P$  est un  $S$ -groupe limite. Ceci vaut de façon plus générale si  $S$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, en particulier si  $A$  est noethérien. Pour passer au cas général, on écrit  $A = \varinjlim_{\alpha \in I} A_\alpha$  comme limite inductive de ses sous-algèbres

de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . On pose  $S_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha)$  pour tout  $\alpha \in I$ .

Comme  $H$  est un  $S$ -schéma en groupes  $S$ -affine de présentation finie, il existe un indice  $\alpha$  et un  $S_\alpha$ -schéma en groupes  $H_\alpha$  tel que  $H_\alpha \times_S S_\alpha \xrightarrow{\sim} H$  [18, IV<sub>4</sub>.8.8.3]. De plus, il existe alors un indice  $\beta \geq \alpha$  tel que  $H_\beta := H_\alpha \times_{S_\alpha} S_\beta$  est  $S$ -réductif [10, cor. 3.1.11]. En particulier on a un isomorphisme  $\text{Par}(H_\beta) \times_{S_\beta} S \xrightarrow{\sim} \text{Par}(H)$ . Comme le  $S_\beta$ -schéma  $\text{Par}(H_\beta)$  est de présentation finie, on a  $\text{Par}(H)(A) \xleftarrow{\sim} \text{Par}(H_\beta)(A) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\gamma \geq \beta} \text{Par}(H_\beta)(A_\gamma)$ . En appliquant ce fait au  $A$ -point  $[Q] \in \text{Par}(H)(A)$ , il suit qu'il existe  $\gamma \geq \beta$  et un  $S_\gamma$ -parabolique  $P$  de  $H_\gamma := H_\beta \times_{S_\beta} S_\gamma$  tel que  $P \times_{S_\gamma} S \xrightarrow{\sim} Q$  dans  $H$ . Alors  $P$  est un  $S$ -groupe limite de  $H_\gamma$  et on conclut que  $Q$  est un  $S$ -groupe limite de  $H$ .  $\square$



L'assertion (2) se démontre de la même façon à partir de (1) que pour le Théorème 7.3.2.

**Corollaire 7.3.3.** – *On suppose  $S$  connexe et soit  $s \in S$ . Soit  $H$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $H$  est réductible ;
- (2)  $H$  admet un  $S$ -tore déployé  $T$  tel que  $T_x$  est non central dans  $H_x$  pour tout  $x \in S$  ;
- (3)  $H$  admet un  $S$ -tore déployé  $T$  tel que  $T_s$  est non central dans  $H_s$ .

*Démonstration.* – (1)  $\implies$  (2) : On suppose que  $H$  admet un  $S$ -sous-groupe parabolique propre  $P$  muni d'un sous-groupe de Levi  $L$ . D'après le Théorème 7.3.1, il existe un  $S$ -homomorphisme  $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow H$  tel que  $P = P_H(\lambda)$ . Quitte à quotienter par  $\ker(\lambda)$ , on peut supposer que  $\lambda$  est un monomorphisme. Pour tout  $x \in S$ ,  $P_x$  est propre dans  $H_x$  donc  $\lambda_x$  est non central.

(2)  $\implies$  (3) : Évident.

(3)  $\implies$  (1) : Soit  $i : T \rightarrow G$  un  $S$ -tore déployé de  $H$  tel que  $T_s$  est non central dans  $H_s$ . Il existe un cocaractère  $\lambda : \mathbb{G}_m \rightarrow T$  tel que  $\lambda_s$  soit non central. Par suite, le  $S$ -groupe  $P_H(\lambda)$  « limite associé à  $\lambda$  » est alors un  $S$ -sous-groupe parabolique muni du  $S$ -sous-groupe de Levi  $\text{Cent}_H(\lambda)$ . Comme  $\text{Cent}_H(\lambda)_s$  est propre dans  $H_s$ ,  $P_s$  est propre dans  $H_s$  et  $P$  est partout propre dans  $H$  puisque  $S$  est connexe. On conclut que  $H$  est réductible.  $\square$

#### 7.4. Lien avec les sous-tores déployés maximaux

**Proposition 7.4.1.** – *On suppose que  $S$  est connexe. Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes réductifs. Soient  $T_0$  un  $S$ -sous-tore déployé de  $G$  et  $P$  un  $S$ -sous-groupe parabolique de  $G$  ayant  $\text{Cent}_G(T_0)$  comme sous-groupe de Levi (ceci existe d'après XXVI.6.2). On considère les assertions suivantes :*

- (1)  $T_0$  est un sous-tore déployé maximal de  $G$  ;
  - (2)  $T_0$  est un sous-tore déployé maximal de  $\text{Cent}_G(T_0)$  ;
  - (3) Le  $S$ -groupe réductif  $\text{Cent}_G(T_0)/T_0$  est anisotrope ;
  - (4) Le  $S$ -groupe réductif  $\text{Cent}_G(T_0)/T_0$  est irréductible ;
  - (4') Le  $S$ -groupe réductif  $\text{Cent}_G(T_0)$  est irréductible ;
  - (5)  $P$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $G$ .
- (a) On a les implications (1)  $\iff$  (2)  $\iff$  (3)  $\implies$  (4)  $\iff$  (4')  $\iff$  (5).
- (b) Si  $S$  est localement noethérien et géométriquement unibranche, alors on a l'équivalence (2)  $\iff$  (3).

*Démonstration.* – (a) On observe tout d'abord que l'équivalence (4)  $\iff$  (4') est un cas particulier du lemme 3.2.1.(1), celui du quotient central  $\text{Cent}_G(T_0) \rightarrow \text{Cent}_G(T_0)/T_0$ .

(1)  $\implies$  (2) : Cette implication est triviale.

(2)  $\implies$  (1) : Soit  $T_1$  un sous-tore déployé de  $G$  contenant  $T_0$ . On a alors  $T_0 \subseteq T_1 \subseteq \text{Cent}_G(T_0)$ , d'où  $T_0 = T_1$ .

(3)  $\implies$  (2) : On suppose que  $T_0$  n'est pas un  $S$ -tore déployé maximal, de  $\text{Cent}_G(T_0)$ . En d'autres mots, il existe un sous-tore déployé  $T_1$  de  $\text{Cent}_G(T_0)$  contenant strictement  $T_0$ . Le monomorphisme de  $S$ -groupes diagonalisables  $T_1 = D_S(M_1) \rightarrow T_0 = D_S(M_0)$  est adjoint par dualité de Cartier à un morphisme surjectif  $M_0 \rightarrow M_1$  de groupes abéliens libres de type finis. On a  $T_1/T_0 = D_S(\ker(M_0 \rightarrow M_1))$ , c'est un  $S$ -tore déployé non trivial. Ainsi  $T_1/T_0$  est un tore déployé non trivial du schéma en groupes  $\text{Cent}_G(T_0)/T_0$  qui est donc isotrope.

(3)  $\implies$  (4). Si  $\text{Cent}_G(T_0)/T_0$  est anisotrope, il est *a fortiori* irréductible d'après le Théorème 7.3.1.(2).

(4)  $\iff$  (5). Suivant XXVI.1.20, on dispose d'une bijection

$$\left\{ \text{paraboliques } Q \text{ de } G \text{ inclus dans } P \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{paraboliques } M \text{ de } \text{Cent}_G(T_0) \right\}.$$

L'ensemble de gauche est réduit à un élément si et seulement si l'ensemble de droite est réduit à un élément. Ceci montre que les assertions (4) et (5) sont équivalentes.

(b) (2)  $\implies$  (3) : Soit  $T_1$  un sous-tore déployé de  $\text{Cent}_G(T_0)/T_0$ . Alors sa préimage dans  $\text{Cent}_G(T_0)$  est un sous-tore  $E$  de  $\text{Cent}_G(T_0)$  qui est une extension de  $T_0$  par  $T_1$ . L'hypothèse sur la base  $S$  intervient ici. En effet, on sait que alors que  $E$  est isotrivial (X.5.15). Ainsi  $\widehat{E}$  est un faisceau constant et  $E$  est un  $S$ -tore déployé. Vu que  $E$  contient  $T_0$ , il suit que  $T_0 = E$ . Par suite  $T_1$  est trivial et on conclut que  $\text{Cent}_G(T_0)/T_0$  est anisotrope.  $\square$

## 8. Invariants cohomologiques des groupes semi-simples

Selon XXIV.1, la classification des schémas en groupes semi-simples sur une base  $S$  se réduit essentiellement à celle des schémas en groupes semi-simples adjoints (ou de façon équivalente simplement connexe). En d'autres mots, cela passe par l'ensemble pointé

$$H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G)).$$

où  $G$  est toujours supposé  $S$ -déployé, épinglé, et adjoint. On note comme précédemment  $E$  le  $S$ -groupe constant des automorphismes de  $G$  qui préserve l'épinglage ainsi que  $h : \text{Aut}_{\text{gr}}(G) \rightarrow \text{Aut ext}(G)$  définie par  $E$ .

On associe à une  $S$ -forme  $G'$  de  $G$  la classe du  $S$ -faisceau  $\underline{\text{Isom}}_{\text{gr}}(G, G')$  (défini au §2.1) qui est principal homogène sous  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$ . Vu que  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  est affine au-dessus de  $S$ , il est représentable par un  $S$ -torseur sous  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  que l'on note  $\underline{\text{Isom}}_{\text{gr}}(G, G')$ . Suivant XXIV.1.10, on note  $\underline{\text{Isom}}_{\text{ext gr}}(G, G') = \underline{\text{Isom}}_{\text{gr}}(G, G')/G^{\text{ad}} =$

$\text{Isom ext}_{\text{gr}}(G, G') \wedge^{\text{Aut}_{\text{gr}}(G)} \text{Aut ext}(G)$  le  $\text{Aut ext}(G)$ -espace principal homogène obtenu par le changement de groupes  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G) \rightarrow \text{Aut ext}(G)$ . Il est représentable par un  $S$ -torseur sous  $\text{Aut ext}(G)$  noté  $\text{Isom ext}(G, G')$ .

**8.1. Une décomposition.** – Si  $S'$  est un  $E$ -torseur au-dessus de  $S$ , le théorème XXIV.3.11 associe le  $S$ -schéma en groupes quasi-épinglé  $\text{qép}(S')$  qui est le tordu de  $G$  par le  $E$ -torseur  $S'$  suivant le changement de groupes  $E \rightarrow \text{Aut}_{\text{gr}}(G)$ . Notons que  $\text{Aut}_{\text{gr}}(\text{qép}(S')) = \text{qép}(S') \rtimes E^{S'} \xrightarrow{\sim} \text{qép}(S') \rtimes \text{Aut ext}(\text{qép}(S'))$ . On définit alors la flèche

$$H^1(S, \text{qép}(S')) \rightarrow H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(\text{qép}(S'))) \xrightarrow{\theta} H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G))$$

où  $\theta$  désigne la bijection de torsion pour le  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$ -torseur  $S' \wedge^E \text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  [17, III.2.6]. De plus, le groupe fini  $\text{Aut ext}(\text{qép}(S'))(S)$  agit à droite sur  $H^1(S, \text{qép}(S'))$ , [17, III.3.3]. Par application du lemme 2.6.3, on obtient la décomposition suivante.

**Proposition 8.1.1.** – *Les flèches précédentes induisent une bijection*

$$\bigsqcup_{S'|S} H^1(S, \text{qép}(S')) / \text{Aut ext}(\text{qép}(S'))(S) \xrightarrow{\sim} H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G))$$

où  $S'$  parcourt les classes d'isomorphie de  $E$ -torseurs au-dessus de  $S$ .

Le premier invariant des  $S$ -formes de  $G$  est donc défini par l'application

$$H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G)) \xrightarrow{p_*} H^1(S, \text{Aut ext}(G)).$$

En termes de toreseurs, elle applique une  $S$ -forme  $G'$  sur  $\text{Isom ext}(G, G')$ .

Puisque  $\text{Aut ext}(G) = \text{Aut}(\text{Dyn}(G)) = \text{Aut}(\Delta)_S$ , cet invariant est aussi donné par la classe d'isomorphie du  $S$ -schéma de Dynkin  $\text{Dyn}(G')$  de  $G'$ , voir XXIV.3.6.

On considère maintenant le  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$ -torseur  $h_* \text{Dyn}(G')$  au-dessus de  $S$  dont la  $S$ -forme tordue correspondante est notée

$$G'_{q, \text{ép}} := G^{h_* \text{Isom ext}(G, G')}.$$

Sa classe d'isomorphisme ne dépend pas bien sûr du choix de l'épinglage pris sur  $G$ .

Comme dans le cas des corps (voir [23, Prop. 31.6]), nous avons le fait suivant dont la démonstration est semblable.

**Lemme 8.1.2.** – *On note  $F' = \text{Isom}_{\text{gr}}(G', G'_{q, \text{ép}})$ . Alors le  $S$ -torseur  $F'$  sous  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G')$  admet une réduction à  $G'$ . En d'autres mots, il existe un  $G'$ -torseur  $D'$  au-dessus de  $S$  tel que  $G_{q, \text{ép}} \xrightarrow{\sim} G'^{F'} = G'^{\text{int}_*(D')}$ . De plus, la classe de  $[D']$  constitue la fibre de l'application*

$$\text{int}_* : H^1(S, G') \rightarrow H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G'))$$

en  $[G_{q, \text{ép}}]$ .

*Démonstration.* – On a vu que le  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G'_{q,\text{ép}})$ -torseur  $\text{Isom}_{\text{gr}}(G'_{q,\text{ép}}, G')$  admet une réduction à  $G'_{q,\text{ép}}$ . En considérant les toiseurs opposés, on obtient que le  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G')$ -torseur  $F'$  au-dessus de  $S$  admet une réduction à  $G'$  et on note  $D'$  une telle réduction.

La fibre de  $H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G')) \rightarrow H^1(S, \text{Aut ext}(G'))$  en  $[F']$  est décrite par le diagramme exact d'ensemble pointés [17, III.3.3.4]

$$\begin{array}{ccccc}
 H^1(S, G') & \xrightarrow{\text{int}_*} & H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G')) & \xrightarrow{p_*} & H^1(S, \text{Aut ext}(G')) \\
 & & \tau_{D'} \uparrow \wr & & \tau_{F'} \uparrow \wr \\
 H^1(S, G'^{D'}) & \longrightarrow & H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G')^{D'}) & \longrightarrow & H^1(S, \text{Aut ext}(G'^{F'})) \\
 \wr \uparrow & & \wr \uparrow & & \wr \uparrow \\
 H^1(S, G'_{q,\text{ép}}) & \longrightarrow & H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G'_{q,\text{ép}})) & & H^1(S, \text{Aut ext}(G'_{q,\text{ép}})),
 \end{array}$$

où les applications verticales du haut sont les bijections « de torsion ». On en tire une bijection

$$\ker\left(H^1(S, G'_{q,\text{ép}}) \rightarrow H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G'_{q,\text{ép}}))\right) \xrightarrow{\sim} p_*^{-1}([F']).$$

Vu que  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G'_{q,\text{ép}}) = q\text{ép}(G'_{q,\text{ép}}) \rtimes \text{Aut ext}(G'_{q,\text{ép}})$ , il suit que l'application

$$H^0(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G'_{q,\text{ép}})) \rightarrow H^0(S, \text{Aut ext}(G'_{q,\text{ép}}))$$

est surjective. Ainsi  $\ker\left(H^1(S, G'_{q,\text{ép}}) \rightarrow H^1(S, \text{Aut}_{\text{gr}}(G'_{q,\text{ép}}))\right) = \{1\}$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**8.2. Classe de Tits.** – On note alors  $\nu_{G'} = [D'] \in H^1(S, G')$  cette classe remarquable qui va donner lieu à la classe de Tits de  $G'$ . On note

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow \widetilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

le revêtement universel de  $G$ . Le  $S$ -groupe  $\text{Aut}_{\text{gr}}(G)$  agit sur cette suite ce qui permet de la tordre par le  $\text{Aut}(G)$ -torseur  $\text{Isom}_{\text{gr}}(G, G')$  pour obtenir la suite exacte de  $S$ -groupes

$$1 \rightarrow \mu' \rightarrow \widetilde{G}' \rightarrow G' \rightarrow 1.$$

Vu que  $G$  agit trivialement sur  $\mu$ , il suit que  $\mu'$  est le tordu de  $\mu$  par le  $\text{Aut ext}(G)$ -torseur  $\text{Isom ext}(G, G')$ ; notons que  $\mu'$  dépend seulement du schéma de Dynkin de  $G'$ . En particulier,  $\mu'$  est un  $S$ -schéma en groupes de type multiplicatif déployé par  $S'$ . On considère le bord de cohomologie plate [17, IV.4.2]

$$\partial_{G'} : H^1(S, G) = H_{\text{fppf}}^1(S, G) \rightarrow H_{\text{fppf}}^2(S', \mu').$$

La classe de Tits de  $G'$  est définie par la formule suivante

$$t_{G'} = -\partial_{G'}(\nu_{G'}) \in H_{\text{fppf}}^2(S, \mu').$$

C'est le second invariant cohomologique de  $G'$ . On considère maintenant le  $G'_{q,\text{ép}}$ -torseur au-dessus de  $S$  opposé  $D'^{\text{op}}$  à  $D'$ . Puisque  $G_{q,\text{ép}} \xrightarrow{\sim} G'^{F'} = G'^{\text{int}_*(D')}$ , on a un

isomorphisme  $G_{q,\text{ép}}^{\text{int},*(D'^{\text{op}})} \xrightarrow{\sim} G$ . Suivant la compatibilité du bord avec la bijection de torsion  $\tau_{D'}$  [17, IV.4.2]

$$\begin{array}{ccc} H^1(S, G') & \xrightarrow{\partial_{G'}} & H_{\text{fppf}}^2(S, \mu') \\ \wr \downarrow \tau_{D'} & & \wr \downarrow \text{id} - \partial_{G'}([D']) \\ H^1(S, G'_{q,\text{ép}}) & \xrightarrow{\partial_{G'}} & H_{\text{fppf}}^2(S, \mu'), \end{array}$$

on tire que

$$(\star) \quad \partial_{G'_{q,\text{ép}}}([D'^{\text{op}}]) = 0 + \partial_{G'_{q,\text{ép}}}([D'^{\text{op}}]) = -\partial_{G'}([D']) = t_{G'}.$$

Sous une hypothèse d'annulation cohomologique, les deux invariants permettent de classier les schémas en groupes.

**Proposition 8.2.1.** – *Supposons que  $H^1(S, \widetilde{G}') = 1$ .*

1. *Le bord  $H^1(S, G') \rightarrow H_{\text{fppf}}^2(S, \mu')$  a un noyau trivial.*
2. *Soit  $G''$  une  $S$ -forme de  $G$  telle qu'il existe  $u \in \text{Isom ext}(G', G'')(S)$ . Alors les  $S$ -schémas en groupes  $G'$  et  $G''$  sont isomorphes si et seulement si  $u_*(t_{G'}) = t_{G''}$ .*

Dans (2), l'hypothèse  $\text{Isom ext}(G', G'')(S) \neq \emptyset$  signifie que  $G''$  est une forme intérieure de  $G'$  (remarque XXIV.1.11). Notant  $\mu''$  le tordu de  $\mu$  par  $\text{Aut ext}(G, G'')$ , l'élément  $u$  définit un isomorphisme  $u_* : \mu' \rightarrow \mu''$  de  $S$ -groupes.

*Démonstration.* – (1) C'est une conséquence immédiate de la suite exacte d'ensembles pointés [17, §IV.4]

$$1 \rightarrow \mu'(S) \rightarrow \widetilde{G}'(S) \rightarrow G'(S) \xrightarrow{\varphi_{G'}} \dots$$

$$H_{\text{fppf}}^1(S, \mu') \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(S', \widetilde{G}') \rightarrow H_{\text{fppf}}^2(S, G') \xrightarrow{\partial_{G'}} H_{\text{fppf}}^2(S, \mu').$$

(2) L'élément  $u$  induit un isomorphisme  $u_* : \text{Isom ext}(G, G') \xrightarrow{\sim} \text{Isom ext}(G, G'')$  et partant un isomorphisme  $u_* : G'_{q,\text{ép}} \xrightarrow{\sim} G''_{q,\text{ép}}$ . Si  $G'$  et  $G''$  sont  $S$ -isomorphes, alors les classes  $\nu_{G'}$  et  $\nu_{G''}$  se correspondent suivant la bijection  $H^1(S, G'_{q,\text{ép}}) \xrightarrow{\sim} H^1(S, G''_{q,\text{ép}})$  d'où aussitôt l'identité  $u_*(t_{G'}) = t_{G''}$ . Réciproquement, on suppose que  $u_*(t_{G'}) = t_{G''}$ . On écrit alors  $G' = (G'_{q,\text{ép}})^{D'}$  (resp.  $G'' = (G'_{q,\text{ép}})^{D''}$ ) où  $D'$  est un  $G'_{q,\text{ép}}$ -torseur (resp.  $D''$  est un  $G''_{q,\text{ép}}$ -torseur). En vertu de la compatibilité  $(\star)$  ci-dessus, l'hypothèse  $u_*(t_{G'}) = t_{G''}$  s'exprime alors par

$$u_* \left( \delta_{G'_{q,\text{ép}}}([D']) \right) = \delta_{G''_{q,\text{ép}}}([D'']) \in H_{\text{fppf}}^2(S, \mu'').$$

On introduit alors le  $G'_{q,\text{ép}}$ -torseur  $E' = u_*^{-1}(D'')$ . Alors  $\delta_{G'_{q,\text{ép}}}([D']) = \delta_{G'_{q,\text{ép}}}([E'])$ . On utilise de nouveau le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(S, G') & \xrightarrow{\partial_{G'}} & H^2_{\text{fppf}}(S, \mu') \\ \downarrow \wr \tau_{D'} & & \downarrow \wr ? - \partial_{G'}([D']) \\ H^1(S, G'_{q,\text{ép}}) & \xrightarrow{\partial_{G'}} & H^2_{\text{fppf}}(S, \mu'). \end{array}$$

La classe  $\tau_{D'}^{-1}([E'])$  appartient au noyau de  $\partial_{G'}$  donc est triviale suivant (1). On conclut que  $[E'] = [D']$ , d'où  $u_*[D'] = [D'']$ . Les schémas en groupes  $G'$  et  $G''$  sont  $S$ -isomorphes.  $\square$

## 9. Appendice : cohomologie des groupes à valeurs dans des groupes de Weyl

Cet appendice est de nature combinatoire et immobilière, il apparaît comme un préliminaire pour les sections 6 et 7.

On se donne une donnée radicielle  $\Phi = (M, R, M^\vee, R^\vee)$  munie de l'action d'un groupe fini  $\Gamma$ . Le but est d'exprimer la 1-cohomologie du groupe  $\Gamma$  à valeurs dans le groupe de Weyl (resp. des automorphismes) de cette donnée radicielle. Le lien avec nos préoccupations précédentes se voit par exemple si l'on prend pour groupe  $\Gamma$  le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie  $L$  d'un corps  $k$ . On sait alors que la cohomologie galoisienne des groupes de Weyl est un sujet d'étude en soi [15, VII], [14]).

**9.1. Données radicielles.** – Soit  $\Phi = (M, R, M^\vee, R^\vee)$  une donnée radicielle. Soit  $W = W(\Phi)$  son groupe de Weyl et  $\text{Aut}(\Phi)$  son groupe d'automorphismes (XXI.6.7). Soit  $\Delta$  une base de  $R$ . On désigne par  $\text{Aut}(\Phi, \Delta)$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(\Phi)$  formé des automorphismes  $f$  de  $\Phi$  satisfaisant  $f(\Delta) \subseteq \Delta$ . Comme  $W$  agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl, on a une décomposition en produit semi-direct  $\text{Aut}(\Phi) = W \rtimes \text{Aut}(\Phi, \Delta)$ .

Si  $I$  est une partie de  $\Delta$ , on note  $W_I$  le sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions  $s_\alpha$  pour  $\alpha \in I$ . On dit qu'un sous-groupe de  $W$  est *parabolique* s'il est conjugué à un  $W_I$ .

On rappelle qu'une partie  $A$  de  $R$  est *parabolique* si elle est close et si  $R = A \cup (-A)$  [5, VI.1.7].

Si  $I$  est une partie de  $\Delta$ , on note  $R_I = R^+ \cup -[I]$  où  $[I]$  désigne les racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers d'éléments de  $I$ . Alors  $R_I$  est une partie parabolique de  $R$  et toute partie parabolique  $A$  de  $R$  est  $W$ -conjuguée à un unique  $R_I$  en vertu des propositions 20 et 21 de [5, VI.1]. Le sous-ensemble  $I(A)$  attaché à  $A$  est appelé le *type* de  $A$ .

Si  $\lambda \in M^\vee$ , l'ensemble

$$R(\lambda) := \left\{ \alpha \in R \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \right\}$$

est une partie parabolique de  $R$ . En effet, on a  $R = R(\lambda) \cup -R(\lambda)$ , il est clos puisque stable par addition et satisfaisant  $\mathbb{N}.R(\lambda) \cap R \subseteq R(\lambda)$  (XXI.3.1.3). En outre, il est bien connu que les  $R(\lambda)$  pour  $\lambda$  parcourant  $M^\vee$  fournissent tous les sous-ensembles paraboliques de  $R$  [25, 11.1]; nous reprenons d'ailleurs cette preuve dans le cas d'un  $R_I$  plus loin (Lemme 9.2.2).

**9.2. Immeuble d'une donnée radicielle.** – On pose  $V = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . On note  $\Phi^{\text{dér}} = (M^{\text{dér}}, R, (M^{\text{dér}})^\vee, R^\vee)$  la donnée radicielle dérivée associée (XXI.6.5), on a un morphisme de données radicielles  $u : \Phi \rightarrow \Phi^{\text{dér}}$ . Alors  $V^{\text{dér}} = M^{\text{dér}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  est un quotient de  $V$ . La base  $(\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  de  $R$  est une base du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $M^{\text{dér}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et on note  $(\alpha^*)_{\alpha \in \Delta}$  la base duale de  $(M^{\text{dér}})^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  associée.

Chaque racine  $\alpha \in R$  définit l'hyperplan  $H_\alpha = \ker(\alpha)$  de  $V^\vee$  et on note  $\Sigma$  le complexe cellulaire de Coxeter défini par l'arrangement d'hyperplans  $(H_\alpha)_{\alpha \in R}$  ([37, §2] ou [1, §1.5]). On a un isomorphisme  $\Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma^{\text{dér}}$  qui nous permet de nous ramener le cas échéant au cas d'une donnée radicielle semi-simple. Si  $F$  est une telle cellule (ou facette), on note  $\text{Supp}(F)$  son support. Rappelons que

$$\text{Supp}(F) = \bigcap_{\alpha(F)=0} H_\alpha$$

pour  $\alpha$  parcourant  $R$ ; c'est aussi le sous-espace vectoriel de  $V^\vee$  engendré par  $F$ . On rappelle qu'il y a une correspondance bijective [25, prop. 15.9]

$$\{\text{Parties paraboliques de } R\} \longleftrightarrow \{\text{Facettes de } V^\vee\}.$$

Dans un sens, on associe à une partie parabolique  $A \subseteq R$  la facette  $F(A)$  qui est l'intérieur du cône dual

$$D^\vee(A) = \{\phi \in V^\vee \mid \langle \phi, \alpha \rangle \geq 0 \ \forall \alpha \in A\}.$$

Dans l'autre sens, on associe à une facette  $F$  la partie parabolique

$$R(F) = \{\alpha \in R \mid \langle \phi, \alpha \rangle \geq 0 \ \forall \phi \in F\}.$$

Cette correspondance permet de définir le type d'une facette comme le type de la partie parabolique correspondante (§9.1).

Soit  $I$  une partie de  $\Delta$ . On note  $F_I := F(R_I)$ ; on a

$$F_I = \bigcap_{i \in I} H_{\alpha_i} \cap \bigcap_{i \in \Delta \setminus I} \alpha_i^{-1}(\mathbb{Q}_{>0}).$$

On a  $\text{Supp}(F_I) = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$ . On note  $C = F_\emptyset$  la chambre de Weyl de  $V^\vee$  associée à  $\Delta$ . Toute facette  $F$  de  $\Sigma$  est  $W$ -conjugée à une unique facette  $F_J$  pour un unique  $J \subseteq \Delta$  qui le type de  $F$ . On considère le fixateur (resp. le stabilisateur) de  $F_I$  pour l'action de  $W$  sur  $V$  définis par

$$\text{Fix}_W(F_I) = \{w \in W \mid w.x = x \ \forall x \in F_I\},$$



$$\text{Stab}_W(F_I) = \{w \in W \mid w \cdot F_I = F_I\}.$$

On a les inclusions évidentes  $W_I \subseteq \text{Fix}_W(F_I) \subseteq \text{Stab}_W(F_I)$  et on sait (en se ramenant au cas semi-simple) que

$$W_I = \text{Fix}_W(F_I) = \text{Stab}_W(F_I),$$

voir [5, résumé, 19)] ou [25, prop. 15.10]. Ces faits font le lien entre parties paraboliques et sous-groupes paraboliques. De plus, on a une décomposition en produit semi-direct  $N_W(W_I) = W_I \rtimes \mathcal{W}_I$  où

$$\mathcal{W}_I = \{w \in W \mid w \cdot \alpha = \alpha \ \forall \alpha \in I\},$$

voir [26, §5.1] ou [21, cor. 3 page 63].

On considère un groupe « intermédiaire »  $\widehat{W}$ , i.e. satisfaisant  $W \subseteq \widehat{W} \subseteq \text{Aut}(\Phi)$ ; un tel sous-groupe s'écrit  $\widehat{W} = W \rtimes E$  où  $E \subseteq \text{Aut}(\Phi, \Delta)$ .

Les sous-groupes paraboliques de  $W$  étant les stabilisateurs des facettes, on étend de cette façon la définition des sous-groupes paraboliques à  $\widehat{W}$ . On désigne par  $\widehat{W}_I = \text{Stab}_{\widehat{W}}(F_I)$  le stabilisateur de  $F_I$  pour l'action de  $\widehat{F}$  sur  $V^\vee$ , on l'appelle le sous-groupe parabolique « standard » de  $\widehat{W}$  attaché à  $I$ . Par la correspondance paraboliques/facettes, ce sous-groupe de  $\widehat{W}$  est aussi le stabilisateur de  $R_I$ .

Le lemme suivant est une variante du lemme 5.1.2 où  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, I)$  (resp.  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, F_I)$ ) désigne le sous-groupe des automorphismes  $f$  de  $\Phi$  satisfaisant  $f(\Delta) = \Delta$  et  $f(I) = I$  (resp.  $f(F_I) = F_I$ ).

**Lemme 9.2.1.** – (1)  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, I) = \text{Aut}(\Phi, \Delta, F_I)$ .

$$(1) \ \widehat{W}_I = W_I \rtimes (E \cap \text{Aut}(\Phi, \Delta, I));$$

*Démonstration.* – (1) L'inclusion  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, I) \subseteq \text{Aut}(\Phi, \Delta, F_I)$  est évidente. Réciproquement si  $h \in \text{Aut}(\Phi, \Delta, F_I)$ , alors  $h(F_I) = F_{h(I)} = F_I$ . Or  $h(I) \subseteq \Delta$ , d'où  $h(I) = I$  par définition des  $F_I$ .

(2) Il suffit de traiter le cas  $\widehat{W} = \text{Aut}(\Phi)$ . Suivant la correspondance parties paraboliques/facettes, on a  $\text{Stab}_{\text{Aut}(\Phi)}(F_I) = \text{Stab}_{\text{Aut}(\Phi)}(R_I)$ . Le groupe  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, I)$  normalise  $W_I$ , on peut former le morphisme  $W_I \rtimes \text{Aut}(\Phi, \Delta, I) \rightarrow \widehat{W}_I$ ; il est injectif puisque  $W \cap \text{Aut}(\Phi, \Delta) = 1$ . Pour la surjectivité, on se donne  $h \in \text{Stab}_{\text{Aut}(\Phi)}(R_I)$ . On écrit  $h = w f^{-1}$  avec  $w \in W$  et  $f \in \text{Aut}(\Phi, \Delta)$ . Comme  $h(R_I) = R_I$ , on a  $w(R_I) = f(R_I) = R_{f(I)}$ . Par unicité du type d'une partie parabolique, on a  $I = f(I)$ . Par suite,  $f \in \text{Aut}(\Phi, \Delta, R_I)$  et  $w \in W_I = \text{Stab}_W(R_I)$ .  $\square$

**Lemme 9.2.2.** – Soit  $I \subseteq \Delta$ . On pose

$$\lambda_I = \sum_{\beta \in \Delta \setminus I} \beta^* \in (M^{\text{dér}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^\vee \subseteq M^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

(1)  $\lambda_I$  est fixé par le sous-groupe  $\text{Aut}(\Phi, R_I)$  formé des automorphismes  $f$  de  $\Phi$  satisfaisant  $f(R_I) = R_I$ .

(2) Pour tout entier  $n \geq 1$  satisfaisant  $n\lambda_I \in (M^{\text{dér}})^\vee \subseteq M^\vee$ , on a  $R_I = R(n\lambda_I)$ .

*Démonstration.* – (1) D'après le lemme 9.2.1.(2), le sous-groupe  $\text{Aut}(\Phi, R_I)$  de  $\text{Aut}(\Phi)$  est engendré par  $W_I$  et par  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, I)$ . Le groupe  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, I)$  permute  $\Delta \setminus I$  et fixe donc  $\lambda_I$ . Il reste à voir que  $W_I$  fixe  $\lambda_I$ , ce qui est équivalent au fait que chaque  $s_\alpha$  ( $\alpha \in I$ ) fixe  $\lambda_I$ . On peut supposer que  $\Phi$  est semi-simple, et alors  $\lambda_I$  est caractérisé par la propriété  $\langle \lambda_I, \gamma \rangle = 0$  si  $\gamma \in I$  et 1 si  $\gamma \in \Delta \setminus I$ . On se donne donc  $\alpha \in I$ ,  $\gamma \in \Delta$  et on considère  $\langle s_\alpha \lambda_I, \gamma \rangle = \langle \lambda_I, s_\alpha \gamma \rangle$ . Si  $\gamma \in I$ , alors  $s_\alpha \gamma \in [I]$  et  $\langle \lambda_I, s_\alpha \gamma \rangle = 0 = \langle \lambda_I, \gamma \rangle$ . Si  $\gamma \in \Delta \setminus I$ , on écrit  $s_\alpha \gamma = \gamma - n_{\alpha, \gamma} \alpha$ . Alors  $\langle \lambda_I, s_\alpha \gamma \rangle = \langle \lambda_I, \gamma \rangle$  aussi dans ce cas. On conclut que  $\lambda_I = s_\alpha \lambda_I$ .

(2) Sans perte de généralité, on peut supposer  $\Phi$  semi-simple. L'ensemble  $R(n\lambda_I)$  est une partie parabolique de  $R$  contenant  $R_+$ . On note  $J$  l'ensemble des racines  $\alpha$  de  $\Delta$  telles que  $-\alpha \in R(n\lambda_I)$ . D'après [5, §VI.1.7, lemme 3 et proposition 20], on a  $R(n\lambda_I) = R^+ \cup -[J] = R_J$ . Il reste à déterminer  $J$ . Si  $\alpha \in \Delta$ , on a

$$\langle n\lambda_I, \alpha \rangle = n \sum_{\beta \in \Delta \setminus I} \langle \beta^*, \alpha \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in I \\ n & \text{si } \alpha \notin I. \end{cases}$$

Ainsi  $-\alpha \in R(n\lambda_I)$  si et seulement si  $\alpha \in I$ . On conclut que  $I = J$ .  $\square$

**Remarque 9.2.3.** – L'expression de  $\lambda_I$  est la même que dans l'exemple 7.2. Si  $\Phi$  est une donnée radicielle adjointe, on peut prendre  $n = 1$  dans l'assertion (2).

**Lemme 9.2.4.** – Soit  $I$  une partie de  $\Delta$ .

(1)  $N_{\widehat{W}}(\widehat{W}_I) = \text{Stab}_{\widehat{W}}(\text{Supp}(F_I))$ .

(2) On pose  $\widehat{\mathcal{W}}_I = \{h \in \widehat{W} \mid h(I) = I\}$ . Le morphisme

$$W_I \rtimes \widehat{\mathcal{W}}_I \rightarrow N_{\widehat{W}}(W_I), (w, g) \mapsto w g$$

est un isomorphisme. En outre, on a  $N_{\widehat{W}}(\widehat{W}_I) = N_{\widehat{W}}(W_I)$ .

*Démonstration.* – (1) Il suffit de montrer que l'inclusion  $N_{\widehat{W}}(W_I) \subseteq \text{Stab}_{\widehat{W}}(\text{Supp}(F_I))$  est une égalité. Si  $h \in \text{Stab}_{\widehat{W}}(\text{Supp}(F_I))$ , on a  $h W_I h^{-1} = h \text{Stab}_W(\text{Supp}(F_I)) h^{-1} = \text{Fix}_W(h \cdot \text{Supp}(F_I)) = W_I$ , donc  $h \in N_{\widehat{W}}(W_I)$ .

(2) Le groupe  $\widehat{\mathcal{W}}_I$  stabilise  $\text{Supp}(F_I)$  donc d'après (1) normalise  $N_{\widehat{W}}(W_I)$ . Le morphisme  $W_I \rtimes \widehat{\mathcal{W}}_I \rightarrow N_{\widehat{W}}(W_I)$  est donc bien défini. On observe en premier lieu que  $W_I \cap \widehat{\mathcal{W}}_I = 1$ , l'inclusion  $W_I \rtimes \widehat{\mathcal{W}}_I \subseteq N_{\widehat{W}}(W_I)$  est évidente. Pour établir l'inclusion inverse, on se donne un élément  $h \in N_{\widehat{W}}(W_I)$ . Alors  $h$  normalise  $\text{Supp}(F_I)$  et le système de racines  $R \cap \text{Supp}(F_I)$ . De plus,  $I$  est une base de  $R \cap \text{Supp}(F_I)$  et le groupe de Weyl de  $R \cap \text{Supp}(F_I)$  est  $W_I$ . Alors  $h(I)$  est une base de  $R \cap \text{Supp}(F_I)$  donc il existe un unique  $w \in W_I$  tel que  $h(I) = w(I)$ . Ainsi  $h = w w^{-1} h$  avec  $w^{-1} h \in \widehat{\mathcal{W}}_I$ . On a bien établi que  $W_I \rtimes \widehat{\mathcal{W}}_I \xrightarrow{\sim} N_{\widehat{W}}(W_I)$ .

De plus, on a une inclusion évidente  $N_{\widehat{W}}(\widehat{W}_I) \subset N_{\widehat{W}}(W_I) = W_I \rtimes \widehat{\mathcal{W}}_I$ . Si  $g \in \widehat{\mathcal{W}}_I$ , alors  $g(I) = I$  donc  $g(F_I) = F_I$ , d'où  $g \in N_{\widehat{W}}(\widehat{W}_I) = N_{\widehat{W}}(\text{Stab}_{\widehat{W}}(F_I))$ . Ainsi  $\widehat{\mathcal{W}}_I \subseteq N_{\widehat{W}}(\widehat{W}_I)$  et on conclut que  $N_{\widehat{W}}(\widehat{W}_I) = W_I \rtimes \widehat{\mathcal{W}}_I$ .  $\square$

**Lemme 9.2.5.** – Soient  $A, B$  des facettes de  $\Sigma$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $\text{Aut}(\Phi, A) = \text{Aut}(\Phi, B)$  ;
- (b)  $W_A = W_B$  ;
- (c)  $\text{Supp}(A) = \text{Supp}(B)$ .

*Démonstration.* – L'implication (a)  $\implies$  (b) est évidente. Pour montrer (b)  $\implies$  (c), on utilise la projection  $D = \text{proj}_A(B)$  de  $A$  sur  $B$  [37, 2.30] ; elle contient  $A$  dans son adhérence. De plus,  $W_A \cap W_B = W_D$  (*ibid*, prop. 12.5) d'où  $W_D = W_A = W_B$  avec notre hypothèse. Or  $A = \text{proj}_A(B)$  équivaut à  $\text{Supp}(B) \subseteq \text{Supp}(A)$  [1, 1.41.(1)]. De même,  $\text{Supp}(A) \subseteq \text{Supp}(B)$ , d'où l'on conclut que  $\text{Supp}(B) = \text{Supp}(A)$ .

Montrons (c)  $\implies$  (a) ; par symétrie, il suffit d'établir une inclusion entre les groupes  $\text{Aut}(\Phi, A)$  et  $\text{Aut}(\Phi, B)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $A = F_I$  de stabilisateur  $\text{Aut}(\Phi, F_I) = W_I \rtimes \text{Aut}(\Phi, \Delta, I)$ . Vu que  $W_I = \text{Fix}_W(\text{Supp}(F_I)) = \text{Fix}_W(\text{Supp}(F_I)) \subseteq \text{Fix}_W(B)$ , on est ramené à montrer que  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, I)$  stabilise  $B$ . Or la facette  $B \subseteq V^\vee$  est définie par des équations

$$\alpha(\varphi) = 0 \quad \forall \alpha \in I \quad \text{et} \quad \epsilon_\alpha \alpha(\varphi) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta \setminus I,$$

où les  $\epsilon_\alpha$  sont des signes. Un élément de  $\text{Aut}(\Phi, \Delta, I)$  préserve ces équations, donc préserve  $B$ . On conclut que  $\text{Aut}(\Phi, A) \subseteq \text{Aut}(\Phi, B)$ .  $\square$

**9.3. Données radicielles tordues sous une action de groupes.** – Soit  $\Gamma$  un groupe fini. Soit  $f : \Gamma \rightarrow \widehat{W}$  un morphisme de groupes ou autrement dit une action de  $\Gamma$  sur la donnée radicielle  $\Phi = (M, R, M^\vee, R^\vee)$  factorisant par le sous-groupe  $\widehat{W} \subseteq \text{Aut}(\Phi)$ . Une telle donnée est appelée une donnée radicielle tordue. On note  $W_f, R_f, \Sigma_f$ , etc. pour distinguer ces objets de ceux avec action triviale ; le groupe  $W_f$  est alors un  $\Gamma$ -groupe. On dit qu'un sous-groupe de  $\widehat{W}_f$  est *parabolique* s'il est le stabilisateur dans  $\widehat{W}$  d'une partie parabolique de  $R$  préservée par l'action  $f$ .

Etant donné une partie  $I \subseteq \Delta$ , on dit que  $f$  est *I-réductible* si  $R$  admet une partie parabolique  $A$  de type  $I$  qui est  $\Gamma$ -stable suivant l'action  $f$ .

On dit que  $f$  est *réductible* s'il existe une partie  $I$  propre de  $\Delta$  tel que  $f$  est *I-réductible*.

**Lemme 9.3.1.** – (1) Soit  $I$  une partie de  $\Delta$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $f$  est *I-réductible* ;
- (b)  $(\Sigma_f)^\Gamma$  contient une facette de type  $I$ .

(2) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (c)  $f$  est *réductible* ;
- (d)  $(\Sigma_f)^\Gamma \neq \{0\}$ .

*Démonstration.* – (1) (a)  $\implies$  (b) : Par définition, il existe une partie parabolique  $A$  de  $R$  qui  $\Gamma$ -stable pour l'action  $f$  et de type  $I$ . Alors la facette  $F(A)$  est aussi  $\Gamma$ -stable pour l'action  $f$  et est de type  $I$ .

(b)  $\implies$  (a) : Etant donné une facette  $F$  stable par  $\Gamma$  agissant par  $f$ , alors la partie parabolique  $R(F)$  de  $R$  est  $\Gamma$ -stable pour l'action  $f$  et de type  $I$ , c'est-à-dire  $f$  est  $I$ -réductible.

(2) Chaque assertion s'obtient du (1) en ajoutant le quantificateur « il existe une partie propre  $I$  de  $\Delta$  telle que ».  $\square$

**Lemme 9.3.2.** – (1) *Toutes les facettes de  $\Sigma_f$   $\Gamma$ -invariantes et maximales pour cette propriété ont même support, même dimension et même stabilisateur dans  $\text{Aut}(\Phi)$ .*

(2) *Soient  $A, B$  des facettes de  $\Sigma_f$   $\Gamma$ -invariantes. On suppose  $A$  maximale pour cette propriété. Si  $W_A = W_B$ , alors  $B$  est aussi maximale.*

*Démonstration.* – On peut supposer que  $\Phi$  est semi-simple pour la démonstration.

(1) Soient  $A, B$  des facettes de  $(\Sigma_f)^\Gamma$  maximales. On considère la projection  $\text{proj}_A(B)$  [37, 2.30] de  $A$  sur  $B$ , elle appartient à  $(\Sigma_f)^\Gamma$  et contient  $A$  dans son adhérence, donc  $A = \text{proj}_A(B)$  par maximalité de  $A$ . Or  $A = \text{proj}_A(B)$  équivaut à  $\text{Supp}(B) \subseteq \text{Supp}(A)$  [1, 1.41.(1)]. Par symétrie, il vient  $\text{Supp}(A) = \text{Supp}(B)$ . Ainsi  $A$  et  $B$  ont même dimension et le lemme 9.2.5 montre que  $\text{Aut}(\Phi, A) = \text{Aut}(\Phi, B)$ .

(2) Le lemme 9.2.5 montre que  $\text{Supp}(A) = \text{Supp}(B)$ . Le (1) permet de conclure que  $B$  est maximale dans  $(\Sigma_f)^\Gamma$ .  $\square$

Le lemme 9.3.2.(1) associe donc à l'action  $f$  un sous-groupe parabolique canonique  $P_{\min}$  de  $W_f$  (resp.  $\widehat{P}_{\min}$  de  $\widehat{W}_f$ ) qui est le stabilisateur d'une facette maximale (arbitraire) de  $(\Sigma_f)^\Gamma$ ; c'est aussi le stabilisateur de  $(\Sigma_f)^\Gamma$  dans  $\Sigma_f$ . La notation se justifie par le fait que ce groupe joue le rôle d'un sous-groupe parabolique minimal dans la théorie de Borel-Tits.

Cet invariant satisfait de façon évidente la compatibilité suivante lorsque l'on remplace l'action  $f$  par un conjugué  $f' = h f h^{-1}$  pour  $h \in \text{Aut}(\Phi)$ ,  $\widehat{W} : P'_{\min} = h P_{\min} h^{-1}$  (resp.  $\widehat{P}'_{\min} = h \widehat{P}_{\min} h^{-1}$ ).

**Remarque 9.3.3.** – L'analogie avec l'immeuble sphérique d'un groupe réductif est dangereuse ici. En effet, si le stabilisateur d'une facette de  $(\Sigma_f)^\Gamma$  donne lieu à un sous-groupe parabolique de  $\widehat{W}_f$ , il n'est pas vrai en général que les sous-groupes paraboliques de  $\widehat{W}$  stables par  $f$  proviennent tous de cette façon. Donnons l'exemple de la donnée radicielle de  $\text{PGL}_4$  de groupe de Weyl  $W = S_4$  où l'on considère l'action de  $\Gamma = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  donnée par la conjugaison par le cycle (1324). Alors  $(\Sigma_f)^\Gamma = 0$ , c'est-à-dire l'action est irréductible mais  $S_2 \times S_2$  est un parabolique de  $S_4$  qui est préservé par l'action.

Etant donné un 1-cocycle  $z : \Gamma \rightarrow \widehat{W}$  (pour l'action  $f$ ) on dispose de l'action tordue par  $z$  définie par  $({}_z f)(\gamma) \cdot v = z_\gamma \cdot (f(\gamma)(v))$  ( $\gamma \in \Gamma, v \in V$ ); cela définit la donnée radicielle tordue associé à  ${}_z f$ .

**Remarque 9.3.4.** – Remplaçons  $z$  par un 1-cocycle cohomologue  $z'$ , i.e. il existe  $h \in \widehat{W}$  satisfaisant

$$z'_\gamma = h^{-1} z_\gamma (f(\gamma) h f(\gamma)^{-1}).$$

Alors

$$(z'f)(\gamma) = z'_\gamma f(\gamma) = h^{-1} z_\gamma (f(\gamma) h f(\gamma)^{-1}) f(\gamma) = h^{-1} (zf)(\gamma) h.$$

En d'autres mots, les deux actions  $zf$  et  $z'f$  de  $\Gamma$  sur  $V$  sont conjuguées.

**Définition 9.3.5.** – Soit  $\widehat{P}_f$  un sous-groupe parabolique de  $\widehat{W}_f$ . Étant donnée une classe  $\gamma \in H^1(\Gamma, \widehat{P}_f)$ , on dit que  $\gamma$  est *réductible* s'il existe un sous-groupe parabolique  $\widehat{Q}_f$  de  $\widehat{W}_f$  tel que  $\widehat{Q}_f \subsetneq \widehat{P}_f$  et  $\gamma \in \text{Im}(H^1(\Gamma, \widehat{Q}_f) \rightarrow H^1(\Gamma, \widehat{P}_f))$ . On dit que  $\gamma$  est *irréductible* dans le cas contraire. On définit le sous-ensemble des classes de cohomologie irréductibles  $H^1(\Gamma, \widehat{P}_f)_{\text{irr}} \subseteq H^1(\Gamma, \widehat{P}_f)$ .

**Lemme 9.3.6.** – Soit  $F \in (\Sigma_f)^\Gamma$  et  $\widehat{P}_f = \text{Stab}_{\widehat{W}_f}(F)$  le sous-groupe parabolique de  $\widehat{W}_f$  associé. Soit  $[z] \in H^1(\Gamma, \widehat{W})$ .

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a)  $[z]$  admet une réduction à  $\widehat{P}_f$  ;

(b) l'action  $zf$  stabilise une partie parabolique de  $R$  qui est  $\widehat{W}$ -conjuguée à  $R(F)$  ;

(c) le sous-groupe parabolique  $\widehat{P}_{\min}$  de  $\widehat{W}$  relatif à l'action  $zf$  est  $\widehat{W}$ -conjugué à un sous-groupe parabolique de  $\widehat{P}_f$ .

(2) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a')  $[z]$  appartient à l'image de  $H^1(\Gamma, \widehat{P}_f)_{\text{irr}} \rightarrow H^1(\Gamma, \widehat{W}_f)$ ,

(b') le sous-groupe parabolique  $\widehat{P}_{\min}$  de  $\widehat{W}_f$  relatif à l'action  $zf$  est  $\widehat{W}$ -conjugué à  $\widehat{P}_f$ .

(c') L'action  $zf$  stabilise une partie parabolique  $\widehat{W}$ -conjuguée à  $R(F)$  et celle-ci est minimale parmi les parties paraboliques  $\Gamma$ -stables de  $R$  relativement à l'action  $zf$ .

**Démonstration.** – On a  $\widehat{P}_f = \text{Stab}_{\widehat{W}}(F) = \text{Stab}_{\widehat{W}}(R_F)$ .

(1) (a)  $\implies$  (b) : On suppose que  $[z]$  admet une réduction à  $\widehat{P}_f$ . Il existe un 1-cocycle  $z'$  cohomologue à  $z$  à valeurs dans  $\widehat{P}_f$ , i.e. il existe  $h \in \widehat{W}$  tel que

$$z'_\gamma = h^{-1} z_\gamma f_\gamma h f_\gamma^{-1} \in \widehat{P}_f.$$

L'action  $z'f$  stabilise donc  $R(F)$ . Suivant la remarque 9.3.4, on a  $z'f = h^{-1} zf h$ , donc l'action  $zf$  stabilise la partie parabolique  $h^{-1} R(F)$ .

(b)  $\implies$  (c) : On se donne une partie parabolique  $A$  stabilisée par  $zf$  telle qu'il existe  $h \in \widehat{W}$  satisfaisant  $A = h^{-1} \cdot R(F)$ . Alors l'homomorphisme  $zf$  est à valeurs dans  $\text{Stab}_{\widehat{W}}(A) = h \text{Stab}_{\widehat{W}}(R_F) h^{-1} = h \widehat{P}_f h^{-1}$ . Il suit que  $\widehat{P}_{\min} \subseteq h \widehat{P}_f h^{-1}$  où  $\widehat{P}_{\min}$  est relatif à l'action  $zf$ .

(c)  $\implies$  (a) : Commençons par le cas particulier où  $z$  est à valeurs dans  $\widehat{P}_f = \text{Stab}(F)$ . Alors la facette  $F$  est stabilisée par  $zf$ , d'où  $\widehat{P}_{\min} \subseteq \widehat{P}_f$ . Dans le cas général,

il existe un 1-cocycle  $z'$  cohomologue à  $z$  à valeurs dans  $\widehat{P}_f$  où  $h \in \widehat{W}$ . Il existe  $h \in \widehat{W}$  tel que

$$z'_\gamma = h^{-1} z_\gamma f_\gamma h f_\gamma^{-1} \in \widehat{P}_f.$$

Suivant la remarque 9.3.4, on a  $z'f = h^{-1} zfh$ , d'où  $\widehat{P}_{\min} = h \widehat{P}'_{\min} h^{-1}$ . Ainsi  $\widehat{P}_{\min}$  contient  $h \widehat{P}_f h^{-1}$  par le premier cas.

(2) Cela correspond au cas d'égalité dans (1).  $\square$

**9.4. Indice de Tits.** – On définit l'*indice de Tits*  $\Delta^0(f) \subseteq \Delta$  d'un homomorphisme  $f : \Gamma \rightarrow \widehat{W}$  comme le type d'une facette  $\Gamma$ -invariante maximale de  $\Sigma_f$  ou de façon équivalente comme le type d'une partie parabolique invariante par  $\Gamma$  (agissant par  $f$ ) de  $R$  et minimale pour cette propriété.

Pour tout  $h \in \widehat{W}$ , on a  $\Delta^0(hfh^{-1}) = h \cdot \Delta^0(f)$ . En particulier, vu que  $\Delta^0(f)$  ne dépend que de l'image de  $f$ , on note que  $\Delta^0(f)$  est stabilisé par le groupe  $N_{\text{Aut}(\Phi)}(\text{Im}(\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Phi)))$ .

**9.5. Décompositions de Tits.** – On commence par le cas de l'action triviale. Dans ce cas, pour tout groupe  $H$ , on a une bijection  $\text{Hom}(\Gamma, H)/H = Z^1(\Gamma, H)/H \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma, H)$ .

Si  $\widehat{P}$  est un sous-groupe parabolique de  $\widehat{W}$ , on dit qu'un homomorphisme  $u : \Gamma \rightarrow \widehat{P}$  est *réductible* s'il existe un sous-groupe parabolique  $\widehat{Q}$  de  $\widehat{W}$  tel que  $\text{Im}(u) \subseteq \widehat{Q} \subsetneq \widehat{P}$ . On dit que  $u$  est *irréductible* dans le cas contraire et on note  $\text{Hom}_{\text{irr}}(\Gamma, \widehat{P})$  l'ensemble des morphismes de groupes irréductibles de  $\Gamma$  dans  $\widehat{P}$ .

**Lemme 9.5.1.** – (1) Soient  $\widehat{P}$  un sous-groupe parabolique de  $\widehat{W}$  et  $u : \Gamma \rightarrow \widehat{P}$  un homomorphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(a)  $u : \Gamma \rightarrow \widehat{P}$  est un morphisme réductible ;

(b)  $[u] \in H^1(\Gamma, \widehat{P})$  est réductible.

(c)  $\widehat{P}_{\min}(u) \subsetneq \widehat{P}$ .

(2) Soient  $\widehat{W}_{I_1}, \dots, \widehat{W}_{I_l}$  un ensemble de représentants des classes de  $\widehat{W}$ -conjugaison de sous-groupes paraboliques de  $\widehat{W}$ . Alors on a la décomposition

$$\bigsqcup_{j=1, \dots, l} \text{Hom}_{\text{irr}}(\Gamma, \widehat{W}_{I_j}) / \widehat{N}_{I_j} \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma, \widehat{W}),$$

où  $\widehat{N}_{I_j} = N_{\widehat{W}}(\widehat{W}_{I_j})$  pour chaque  $j$ .

La structure des groupes  $\widehat{N}_I$  intervenant dans (2) est décrite au §9.2.4.

*Démonstration.* – (1) (a)  $\implies$  (b) : Si le morphisme  $u$  est réductible, il factorise à travers un sous-groupe parabolique  $\widehat{Q} \subsetneq \widehat{P}$  et  $[u] \in H^1(\Gamma, \widehat{P})$  provient de  $H^1(\Gamma, \widehat{Q})$ . Ainsi  $[u]$  est une classe réductible.

(b)  $\implies$  (c) : On suppose que  $[u] \in H^1(\Gamma, \widehat{P})$  provient d'une classe  $[v] \in H^1(\Gamma, \widehat{Q})$  pour un sous-groupe parabolique  $\widehat{Q}$  de  $\widehat{W}$  qui est un sous-groupe strict de  $\widehat{P}$ . Alors il existe  $h \in \widehat{P}$  tel que  $v = hu h^{-1}$ . Quitte à remplacer  $\widehat{Q}$  par  $h\widehat{Q}h^{-1}$ , on peut supposer que  $u$  est à valeurs dans  $\widehat{Q}$ . Soit  $E$  une facette stabilisée par  $\widehat{Q}$ . Ainsi  $u(\Gamma) \subseteq \widehat{Q}$  et  $E \in (\Sigma)^{u(\Gamma)}$ . Soit  $E'$  une facette contenant  $E$ , stabilisée par  $u(\Gamma)$  et maximale pour cette propriété. Alors on a  $\widehat{P}_{\min}(u) = \text{Stab}_{\widehat{W}}(E')$  et ce groupe est un sous-groupe de  $\widehat{Q}$  et donc *a fortiori* un sous-groupe strict de  $\widehat{P}$ .

(c)  $\implies$  (a) : Soit  $E$  une facette stabilisée par  $u(\Gamma)$  et maximale pour cette propriété. Par définition, on a  $\widehat{P}_{\min}(u) = \text{Stab}_{\widehat{W}}(E)$  et on a  $u(\Gamma) \subseteq \widehat{P}_{\min}(u)$ . Par hypothèse, on a  $\widehat{P}_{\min}(u) \subsetneq \widehat{P}$ , donc le morphisme  $u : \Gamma \rightarrow \widehat{P}$  est réductible.

(2) Montrons d'abord la surjectivité. Soit  $u : \Gamma \rightarrow \widehat{W}$  un homomorphisme. On note  $F$  une facette maximale de  $(\Sigma_u)^\Gamma$ . Alors  $F = w.F_I$  pour  $w \in W$  et un unique ensemble  $I \subseteq \Delta$ . Quitte à remplacer  $u$  par son conjugué par  $w^{-1}$ , on peut supposer que  $F_I$  est une facette maximale de  $(\Sigma_u)^\Gamma$ . En particulier,  $\text{Im}(u) \subseteq \widehat{W}_I$ , en d'autres mots,  $u$  est à valeurs dans  $\widehat{W}_I$ . Soit  $j$  l'unique indice tel que  $\widehat{W}_I$  soit  $\widehat{W}$ -conjugué à  $\widehat{W}_{I_j}$ , i.e.  $\widehat{W}_I = h\widehat{W}_{I_j}h^{-1}$  pour  $h \in \widehat{W}$ . Ainsi  $u' = h^{-1}uh$  est à valeurs dans  $\widehat{W}_{I_j}$ . Alors  $F_{I_j}$  est une facette maximale de  $(\Sigma_{u'})^\Gamma$  et la maximalité de  $F_{I_j}$  entraîne l'irréductibilité de  $u' : \Gamma \rightarrow \widehat{W}_{I_j}$ . Ceci montre la surjectivité.

L'indice  $I_j$  précédent est unique, ceci établit que les images des  $\text{Hom}_{\text{irr}}(\Gamma, \widehat{W}_I)_{\text{irr}} \rightarrow H^1(\Gamma, \widehat{W})$  sont disjointes. Pour l'injectivité, il reste donc à voir que  $\text{Hom}_{\text{irr}}(\Gamma, \widehat{W}_{I_j})/\widehat{N}_{I_j} \rightarrow H^1(\Gamma, \widehat{W})$  est injective pour  $j = 1, \dots, l$ . Soient  $u, v \in \text{Hom}_{\text{irr}}(\Gamma, \widehat{W}_{I_j})$  tels que  $u = hv h^{-1}$  pour  $h \in \widehat{W}$ . Alors  $F_{I_j}$  et  $h.F_{I_j}$  sont des facettes de dimension maximale de  $(\Sigma_u)^\Gamma$ . Le lemme 9.3.2.(1) indique que

$$\widehat{W}_{F_{I_j}} = \widehat{W}_{h.F_{I_j}} = h\widehat{W}_{F_{I_j}}h^{-1}$$

donc  $h \in \widehat{N}_{I_j}$ . □

Plus généralement, on considère le cas tordu par une action extérieure en analogie avec le cas quasi-déployé pour les groupes algébriques semi-simples.

**Proposition 9.5.2.** – *On suppose que  $f : \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\Phi)$  est à valeurs dans  $\text{Aut}(\Phi, \Delta)$ .*

(1) *Si  $I \subseteq \Delta$  est stable par  $\text{Im}(f)$ , alors  $W_I$  et  $\mathcal{W}_I$  le sont aussi et  $N_{W_f}(W_{I,f}) = W_{I,f} \rtimes \mathcal{W}_{I,f}$ .*

(2) *Soient  $I_1, \dots, I_l$  les parties stables de  $\Delta$  par  $\text{Im}(f)$ . Alors on a la décomposition*

$$\bigsqcup_{j=1, \dots, l} H^1(\Gamma, W_{I_j,f})_{\text{irr}}/H^0(\Gamma, \mathcal{W}_{I_j,f}) \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma, W_f).$$

L'action à droite  $H^0(\Gamma, \mathcal{W}_{I_j,f})$  sur  $H^1(\Gamma, W_{I_j,f})_{\text{irr}}$  est celle définie en [33, §I.5.5].



*Démonstration.* – Montrons la surjectivité de cette application. Soit  $z : \Gamma \rightarrow W_f$  un 1-cocycle. Soit  $F$  une facette de  $\Sigma$  stable pour l'action tordue par  ${}_zf$  et maximale pour cette propriété. On a  $z_\gamma f_\gamma \in \text{Aut}(\Phi, F)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Il existe une unique partie  $I$  de  $\Delta$  telle que  $F = wF_I$ . On considère le 1-cocycle cohomologue  $z'_\gamma = w^{-1} z_\gamma f_\gamma w f_\gamma^{-1}$  et on vérifie que

$$(*) \quad z'_\gamma f_\gamma(F_I) = w^{-1} z_\gamma f_\gamma w(F_I) = w^{-1} z_\gamma f_\gamma(F) = w^{-1}(F) = F_I,$$

c'est-à-dire  $z'_\gamma f_\gamma \in \text{Aut}(\Phi, F_I)$ . Ainsi quitte à remplacer  $z$  par un cocycle cohomologue, on peut supposer que  $F_I$  est une facette maximale de  $(\Sigma_{zf})^\Gamma$ .

Nous affirmons alors que  $f_\gamma \in \text{Aut}(\Phi, I)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . En effet, puisque  $z_\gamma \in W$ , la facette  $f_\gamma(F_I) = F_{f_\gamma(I)}$  est de même type que  $I$  et  $f_\gamma(I) \subseteq R$  donc  $f_\gamma(I) = I$ . Ainsi  $I$  est bien stable par  $\text{Im}(f)$  et  $z_\gamma \in W_{I,f}$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . La maximalité de  $F_I$  entraîne que le cocycle  $z : \Gamma \rightarrow W_{I,f}$  est irréductible. Ceci montre la surjectivité.

L'indice  $I$  précédent est unique, ceci établit que les images des  $H^1(\Gamma, W_{I_j,f})_{\text{irr}} \rightarrow H^1(\Gamma, W_f)$  sont disjointes. Pour l'injectivité, il reste donc à voir que l'application  $H^1(\Gamma, W_{I,f})_{\text{irr}}/H^0(\Gamma, W_{I,f}) \rightarrow H^1(\Gamma, W_f)$  est injective pour chaque partie  $I \subseteq \Delta$  stable par  $\text{Im}(f)$ . Soient  $z, t \in Z^1(\Gamma, W_{I,f})_{\text{irr}}$  et supposons qu'il existe  $w \in W$  tel que

$$(**) \quad t_\gamma = w^{-1} z_\gamma f_\gamma w f_\gamma^{-1}$$

pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Le calcul (\*) ci-dessus indique que  $w.F_I$  est une facette de dimension maximale de  $(\Sigma_{zf})^\Gamma$ . Le lemme 9.3.2.(1) montre alors que

$$W_{F_I} = W_{w.F_I} = wW_{F_I}w^{-1},$$

d'où  $w \in N_W(W_I)$ . On écrit  $w = w_2 w_1^{-1}$  avec  $w_1 \in W_I$ ,  $w_2 \in \mathcal{W}_I$ . On définit le cocycle cohomologue  $t'_\gamma = w_1^{-1} t_\gamma f_\gamma w_1 f_\gamma^{-1}$  de  $t$ . Alors en remplaçant dans (\*\*), il vient

$$t'_\gamma = w_1^{-1} (w^{-1} z_\gamma f_\gamma w f_\gamma^{-1}) f_\gamma w_1 f_\gamma^{-1} = w_2^{-1} z_\gamma f_\gamma w_2 f_\gamma^{-1}.$$

Il est donc loisible de supposer que  $w = w_2 \in \mathcal{W}_I$ . On note  $\bar{w}$  l'image de  $w$  dans le quotient  $N_W(W_I)/W_I \subseteq \text{Aut}(\Phi, F_I)/W_I$ ; l'identité (\*\*) devient  $1 = \bar{w}^{-1} \bar{f}_\gamma \bar{w} \bar{f}_\gamma^{-1}$ , d'où  $\bar{w} \in H^0(\Gamma, N_{W_f}(W_{I,f})/W_{I,f})$ . Or  $\mathcal{W}_{I,f} \cong N_{W_f}(W_{I,f})/W_{I,f}$  d'après (1) donc  $w_2 \in H^0(\Gamma, \mathcal{W}_{I,f})$ . Il résulte que  $[t] = [z].w_2$ .  $\square$

## Références

- [1] P. ABRAMENKO & K. S. BROWN – *Buildings*, Graduate Texts in Math., vol. 248, Springer, New York, 2008.
- [2] M. ARTIN – « Versal deformations and algebraic stacks », *Invent. Math.* **27** (1974), p. 165–189.
- [3] A. BOREL & J. TITS – « Groupes réductifs », *Publ. Math. IHÉS* **27** (1965), p. 55–150.
- [4] N. BOURBAKI – *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 8 et 9*, Springer, Berlin, 2006.
- [5] ———, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de lie. Chapitres 4–6*, Springer, Berlin, 2006.

- [6] S. BROCHARD – « Topologies de Grothendieck, descente, quotients », *Panoramas et synthèses* **42–43** (2014), p. 1–62.
- [7] F. BRUHAT & J. TITS – « Groupes algébriques sur un corps local II. Existence d’une donnée radicielle valuée », *Publ. Math. IHÉS* **60** (1984), p. 5–184.
- [8] ———, « Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **34** (1987), p. 671–698.
- [9] B. CALMÈS & J. FASEL – « Groupes classiques », ce volume.
- [10] B. CONRAD – « Reductive group schemes », *Panoramas et synthèses* **42–43** (2014), p. 93–444.
- [11] C. DEMARCHE – « Méthodes cohomologiques pour l’étude des points rationnels sur les espaces homogènes », thèse de doctorat, Université d’Orsay, 2009.
- [12] M. DEMAZURE & P. GABRIEL – *Groupes algébriques*, Masson, Paris, 1970.
- [13] M. DEMAZURE & A. GROTHENDIECK – *Schémas en groupes I, II, III*, Lecture Notes in Math., vol. 151, 152, 153, Springer, 1970, et réédition : *Documents Mathématiques* **7, 8**, Société Mathématique de France, 2011.
- [14] J. DUCOAT – « Cohomological invariants of the finite Coxeter groups », prépublication arXiv:1112.6283.
- [15] S. GARIBALDI, A. MERKURJEV & J.-P. SERRE – *Cohomological invariants in Galois cohomology*, University Lecture Series, vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [16] P. GILLE & A. PIANZOLA – « Torsors, reductive group schemes and extended affine Lie algebras », *Mem. Amer. Math. Soc.* **226** (2013), p. 112.
- [17] J. GIRAUD – *Cohomologie non abélienne*, Grundle Math. Wiss., vol. 179, Springer, Berlin-New York, 1971.
- [18] A. GROTHENDIECK – *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. IHÉS, vol. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960–1967.
- [19] ———, *Séminaire de géométrie algébrique I*, Lecture Notes in Math., vol. 224, Springer, 1971, et réédition : *Documents Mathématiques* **3**, Société Mathématique de France, 2011.
- [20] ———, *Séminaire de géométrie algébrique IV*, Lecture Notes in Math., vol. 224, Springer, 1971, et réédition : *Documents Mathématiques* **3**, Société Mathématique de France, 2011.
- [21] R. B. HOWLETT – « Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups », *J. London Math. Soc.* **21** (1980), p. 62–80.
- [22] J. E. HUMPHREYS – *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Math., vol. 21, Springer, New York-Heidelberg, 1975.
- [23] M.-A. KNUS, A. MERKURJEV, M. ROST & J.-P. TIGNOL – *The book of involutions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [24] G. LAUMON & L. MORET-BAILLY – *Champs algébriques*, *Ergebn. Math. Grenz.*, vol. 39, Springer, Berlin, 2000.
- [25] O. LOOS & E. NEHER – « Locally finite root systems », *Mem. Amer. Math. Soc.* **171** (2004).
- [26] G. LUSZTIG – « Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius », *Invent. Math.* **38** (1976/77), p. 101–159.

- [27] B. MARGAUX – « Passage to the limit in non-abelian Čech cohomology », *J. Lie Theory* **17** (2007), p. 591–596.
- [28] J. S. MILNE – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1980.
- [29] J. OESTERLÉ – « Groupes de type multiplicatif et sous-tores des schémas en groupes », ce volume.
- [30] V. PETROV & A. STAVROVA – « The Tits indices over semilocal rings », *Transform. Groups* **16** (2011), p. 193–217.
- [31] V. P. PLATONOV – « A proof of the finiteness hypothesis for solvable subgroups of algebraic groups », *Sibirsk. Mat. Ž.* **10** (1969), p. 1084–1090.
- [32] M. RAYNAUD – *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Math., vol. 119, Springer, Berlin-New York, 1970.
- [33] J-P. SERRE – *Cohomologie galoisienne*, 5<sup>e</sup> éd., Springer, 1997.
- [34] T. A. SPRINGER – *Linear algebraic groups*, second éd., Progress in Math., vol. 9, Birkhäuser, 1998.
- [35] T. SZAMUELY – *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 117, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [36] J. TITS – « Classification of algebraic semisimple groups », in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, 1966, p. 33–62.
- [37] ———, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math., vol. 386, Springer, Berlin-New York, 1974.
- [38] A. VISTOLI – « Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory », in *Fundamental algebraic geometry*, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, p. 1–104.
- [39] C. WENZEL – « Classification of all parabolic subgroup-schemes of a reductive linear algebraic group over an algebraically closed field », *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), p. 211–218.

---

PHILIPPE GILLE, UMR 5208 du CNRS - Institut Camille Jordan - Université Claude Bernard  
 Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex - France.  
 Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Calea Grivitei 21,  
 RO-010702 Bucarest, Roumanie. • E-mail : gille@math.univ-lyon1.fr