Transformation Groups, Vol. 10, No. 2, 2005, pp. 267–269

ERRATA: TORSEURS SUR LA DROITE AFFINE

P. GILLE

Mathématique,
UMR 8628 du C.N.R.S,
Université Paris–Sud
F–91405 Orsay Cedex, France
gille@math.u-psud.fr

Abstract. We clarify two points of our proof of Raghunathan–Ramanathan's theorem [G].

La borne dans la proposition suivante était inexacte dans le cas d'une forme extérieure. La preuve était "canulée" pour la raison suivante: cela n'a aucun sens d'additionner des points d'un appartement d'un immeuble affine, c'est un espace affine. Cette légère modification n'affecte pas le reste de l'article.

Proposition 2.3. *Soit $\mathfrak{G}/O$ un schéma en groupes semisimples, simplement connexe, tel que $\mathfrak{G}_K$ soit un groupe absolument presque K-simple de type Δ. Notons $\rho_d : H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K})) \to H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}_d))$ la restriction induite par l'extension K_d/K. Si $d_1(\Delta).d_2(\Delta).\sharp\mathrm{Aut}(\Delta)$ divise d, alors*

$$\rho_d\big(H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}))\big) \subset \mathrm{Im}\big(H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{O}_d)) \to H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}_d))\big).$$

Il est commode d'isoler le fait suivant.

Lemme 2.3′. *Les notations sont celles de la proposition. Soit $\widetilde{\mathcal{A}}$ un appartement de l'immeuble $\widetilde{I} = \mathcal{I}(\mathfrak{G}_{\widetilde{K}})$. Soient $x_1, \dots, x_n$ des points de $\widetilde{\mathcal{A}}$ de type 0. Alors le point*

$$\rho_n\big(\mathrm{Barycentre}(x_1, \dots, x_n)\big)$$

est un point de type 0 de l'immeuble $\widetilde{\mathcal{I}}_n = \mathcal{I}(\mathfrak{G}_{\widetilde{K}_n})$.

Démonstration. Soit $T/\widetilde{O}$ le $\widetilde{O}$-tore déployé maximal de $\mathfrak{G}$ défini par l'appartement $\widetilde{A}$. On dispose du diagramme commutatif $(*)$ page 231 de la Section 2.2,

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}} \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{A}}_n \\ \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "\times n"] & \widehat{T}^0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

DOI: 10.1007/s00031-005-1010-z
Received April 23, 2005.

où $\widetilde{\mathcal{A}}_n$ désigne l'appartement de $\widetilde{\mathcal{I}}_n$ associé au tore $T \times_{\widetilde{O}} \widetilde{O}_n$. Les points de $\widetilde{\mathcal{A}}$ de type 0 forment le réseau $\widehat{T}^0$ de $\widetilde{\mathcal{A}}$. Pour des sommets $x_1, \dots, x_n \in \widehat{T}^0$, on a donc

$$\rho_n\big(\text{Barycentre}(x_1, \dots, x_n)\big) = x_1 + \ldots + x_n \ \in \widehat{T}^0 \subset \widetilde{A}_n.$$

Ce point est donc un sommet de type 0 de $\widetilde{\mathcal{I}}_n$. $\square$

Démonstration de la proposition. On pose $d_1 = d_1(\Delta)$, $d_2 = d_2(\Delta)$, $d_3 = \sharp\mathrm{Aut}(\Delta)$. On peut supposer que $d = d_1 d_2 d_3$. Rappelons tout d'abord que le schéma en groupes $\mathfrak{G} \times_O \widetilde{O}$ est déployé, et ainsi le groupe $\mathfrak{G}_{\widetilde{K}}$ est déployé. Soit $\gamma = [z] \in H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}))$. On considère l'immeuble de Bruhat–Tits $\widetilde{\mathcal{I}}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{I}}_d$) du groupe $\mathfrak{G}_{\widetilde{K}}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{I}}_d$) et la restriction naturelle $\rho_d : \widetilde{\mathcal{I}} \to \widetilde{\mathcal{I}}_d$. Ces deux immeubles sont munis de l'action de $\mathcal{G}$, notée $x \mapsto {}^s x$ $(s \in \mathcal{G})$. Le cocycle z induit sur $\widetilde{\mathcal{I}}$ et $\widetilde{\mathcal{I}}_d$ une action tordue définie par

$$x \to z_s.{}^s x \ \ (s \in \mathcal{G}),$$

compatible au morphisme ρ_d. D'après le théorème de point fixe de Bruhat–Tits ([BrT1, §3.2]), il existe un point x de $\widetilde{\mathcal{I}}$ fixe par $\mathcal{G}$ pour l'action tordue. Le groupe $\mathcal{G}$ stabilise la facette F_x de $\widetilde{\mathcal{I}}$. Si $\mathfrak{G}/O$ est une forme intérieure, tous les sommets de F_x sont fixes sous $\mathcal{G}$ et la preuve originale fonctionne avec la borne $d_1 d_2$. Dans le cas général, on doit tenir compte de la $*$-action de $\mathcal{G}$ sur Δ. On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les sommets de F_x, ils sont permutés par $\mathcal{G}$ (pour l'action tordue) et appartiennent à un même appartement $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\widetilde{I}$. Quitte à considérer une sous–facette de F_x, il est loisible de supposer que $\mathcal{G}$ agit transitivement sur les x_i. On a $n = \mathrm{Aut}(\Delta)/\mathrm{Aut}(\Delta)_{x_1}$, donc n divise d_3. L'appartement $\widetilde{\mathcal{A}}$ est un espace affine, on peut former le barycentre $x := \text{Barycentre}(x_1, \dots, x_n)$. Alors x est un point fixe pour l'action tordue de $\mathcal{G}$. Le lemme 2.2 montre que les sommets $\rho_{d_1 d_2}(x_i)$ sont des sommets de type 0 de $\widetilde{\mathcal{I}}_{d_1 d_2}$ appartenant à l'appartement $\rho_{d_1 d_2}(\widetilde{\mathcal{A}})$. Le Lemme 2.3′ appliqué à $\mathfrak{G}_{O_{d_1 d_2}}$ montre que $\rho_d(x) = \rho_{d_3}(\rho_{d_1 d_2}(x))$ est un sommet de type 0. En d'autres mots, le point $y := \rho_d(x)$ est un sommet de type 0 de $\widetilde{\mathcal{I}}_d$ invariant par $\mathcal{G}$. Le reste de la preuve est inchangé. Il existe $g \in \mathfrak{G}(K_d)$ tel que $y = g.c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d}$. On a $z_s.{}^s y = y$ pour tout $s \in \mathcal{G}$, donc si $z'_s = g^{-1} z_s {}^s g$, vu que ${}^s c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d} = c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d}$, on obtient

$$z'_s.c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d} = c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d} \ \ (s \in \mathcal{G}).$$

Par suite $z'_s \in \mathrm{Stab}_{\mathfrak{G}(\widetilde{K}_d)}(c_{\widetilde{\mathcal{I}}_d}) = \mathfrak{G}(\widetilde{O}_d)$ pour tout $s \in \mathcal{G}$. Il résulte que $\rho_d([z]) = [z'] \in \mathrm{Im}\big(H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{O}_d)) \to H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{G}(\widetilde{K}_d))\big)$. $\square$

L'occasion nous est donnée de justifier aussi un point de la démonstration du lemme suivant.

Lemme 3.12. *Soit $\gamma \in H^1(\mathbb{P}^1_k, G)$ tel que $ev_\infty(\gamma) = 1$. Alors $\gamma_{/\mathbb{A}^1_k} = 1$ et $\gamma_{/\mathbb{P}^1_k \setminus \{0\}} = 1$.*

Démonstration. Soit $E/\mathbb{P}^1_k$ un G-torseur représentant la classe γ. On considère la fibre générique $\gamma_\eta =\in H^1(k(t), G)$. Si γ_η est anisotrope, le Théorème 3.7 montre que $\gamma = 1$ et on a fini. On peut donc supposer la classe γ_η isotrope. Soit I le type d'un sous-groupe parabolique minimal de $E(G)_{k(t)}$. Nous affirmons que G admet un sous-groupe parabolique de type I. En effet, soit X_I/k la variété des k-sous-groupes paraboliques de type I ([SGA3, XXVI.3]). Alors $E(X_I)/\mathbf{P}^1_k$ est le schéma des $\mathbf{P}^1_k$-sous-schémas en groupes paraboliques de type I du groupe $E(G)$. Celui-ci admet un $k(t)$-point est le critère valuatif de propreté montre que $E(X_I)(\mathbf{P}^1_k) \neq \varnothing$. Mais la fibre de E à l'infini est triviale, donc $X_I(k) \neq \emptyset$ par spécialisation. Le reste de la preuve est inchangé. Il existe donc un k-sous-groupe parabolique $j : Q/k = Z_G(S_0).R_uQ \subset G/k$ (avec $S_0 \subset S$) tel que $\gamma_\eta = j_*(\beta) \in \mathrm{Im}\big(H^1(k(t), Q)_{an} \to H^1(k(t), G)\big)$. Alors E admet une réduction à Q, i.e., il existe un torseur F sous Q tel que $j_*F \xrightarrow{\sim} E$ et dont la classe de la fibre est β. Or l'application $G(k) \to (G/Q)(k)$ est surjective ([BoT, Th. 4.13.a]), d'où l'application $H^1(k, Q) \to H^1(k, G)$ un noyau trivial et on a donc $ev_\infty(\beta) = 1$.

On considère les projections $\pi : Q \to Q_{red} \approx Z_G(S_0)$ et $p : Z_G(S_0) \to Z_G(S_0)/S_0$. Alors $p_*\pi_*F$ est un $\mathbb{P}^1_k$-torseur sous le groupe semisimple $Z_G(S_0)/S_0$, dont la fibre à l'infini triviale et dont la fibre générique est anisotrope. Le Théorème 3.6 montre donc que $p_*\pi_*F$ est isomorphe au torseur trivial. Il résulte que $[\pi_*F]$ provient de $H^1(\mathbb{P}^1, S)$. Ceci montre que $\pi_*F_{/\mathbb{A}^1_k}$ est trivial. Comme $H^1(\mathbb{A}^1_k, R_uQ) = 1$, le torseur $F_{/\mathbb{A}^1_k}$ (et a fortiori $E_{/\mathbb{A}^1_k}$) est trivial. De même, on voit que $E_{/\mathbb{P}^1_k \setminus \{0\}} = 1$. □

Remerciements. Je remercie vivement Vladimir Chernousov de m'avoir signalé ces précisions sur l'article.

Références

[BoT] A. Borel, J. Tits, *Groupes réductifs*, Pub. Math. IHES **27** (1965), 55–152.

[BrT1] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local I*, Publ. Math. IHES **41** (1972), 13–234.

[G] P. Gille, *Torseurs sur la droite affine*, Transform. Groups **7** (2002), 231–245.

[SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S.,* 1963–1964*, Schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. **151**–**153**, Springer-Verlag, Berlin, New York (1970).