SPÉCIALISATION DE LA R-ÉQUIVALENCE II. CONSTRUCTION DE VARIÉTÉS DE GROUPES EXCEPTIONNELS NON RATIONNELLES.

P. GILLE

Abstract. Our goal is to construct non rational varieties of exceptional groups.

1. Introduction

Etant donné un groupe algébrique linéaire (connexe) G/k défini sur un corps k a priori non algébriquement clos, nous nous intéressons à la question suivante :

La variété de groupe G/k est-elle rationnelle, i.e. le corps de fonctions $k(G)$ est-il transcendant pur sur k ?

Un objectif très ambitieux demeure la classification birationnelle des groupes algébriques linéaires : celle-ci a été faite pour les groupes semi-simples adjoints de rang ≤ 3, lire l'article de synthèse de Merkurjev [21]. Pour les tores algébriques, on dispose d'un critère simple de stable rationalité mais on ignore si la stable rationalité entraîne la rationalité (conjecture de Voskresenskiĭ [33]). Par ailleurs, l'étude birationnelle des groupes semi-simples pour les corps globaux a été faite par Chernousov-Platonov [6], voir aussi [11] pour les corps géométriques de dimension 2. Dans cet article, nous étudions certains groupes exceptionnels.

Théorème 1.1. *Il existe un corps F et un groupe semi-simple simplement connexe G/F respectivement*

(i) *de type ${}^3D_4$, avec algèbre d'Allen d'indice* 2*,*

(ii) *de type E_6, forme interne avec algèbre de Tits d'indice* 9*,*

(iii) *de type E_7, avec algèbre de Tits triviale,*

(iv) *de type E_8,*

tel que la variété de groupe G/F n'est pas rétracte F–rationnelle.

La rétracte rationalité est une propriété plus faible que la rationalité due à Saltman [26] (voir aussi [10], [17]). Le groupe de type ${}^3D_4$ (resp. E_6) construit est anisotrope; on sait en effet qu'un groupe isotrope de type ${}^3D_4$ (resp. E_6^1) est k-rationnel ([6], proposition 13 et 14). Nos exemples sont fondés sur la spécialisation de la R-équivalence appliquées à des corps de séries formelles itérées F. Cette idée trouve son origine dans la construction par Platonov d'une algèbre simple centrale D/F telle que $SK_1(D) = \mathrm{SL}_1(D)/[D^\times, D^\times]$ est non trivial [24] (voir aussi [30]).

Date: June 10, 2010 and, in revised form, August 22, 2010.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20G05.

Key words and phrases. Galois cohomology, linear algebraic groups.

Un résultat de Voskresenskiĭ montre alors que la variété de groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ est non rétracte rationnelle [32] (voir aussi [33, §18.2] et [34, §6]).

Des exemples de groupes de spineurs ont été construits sur des corps similaires par Monastyrnyĭ-Yanchevskiĭ [22]; pour les groupes adjoints, le cas des groupes projectifs orthogonaux sur des corps $k((t_1))((t_2))...((t_n))$ est discuté dans l'article [15].

Notre propos consiste donc à aborder le cas des groupes exceptionnels, et de tels groupes définis sur des corps de séries formelles sont décrits par la théorie de Bruhat-Tits. Il n'est pas exclus que cette technique donne lieu par la même occasion à des groupes adjoints non rationnels de type E_6 et E_7 (voir remarques 5.3, 5.6). En revanche, nous avons vérifié à la fin qu'elle est inefficace pour les groupes de type F_4 (les groupes de type G_2 sont des variétés rationnelles). Ceci est une évidence en faveur de la stable rationalité des variétés de groupes de type F_4, question toujours ouverte à notre connaissance.

Par ailleurs, pour certains groupes trialitaires, une méthode "générique" permet de construire à peu de frais (à partir des groupes classiques) des groupes simplement connexes/adjoints qui ne sont pas des variétés rétractes rationnelles (cf. Proposition 2.2).

Remerciements: Je remercie Alexander Merkurjev pour m'avoir signalé une erreur dans une version préliminaire. Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène et Boris Kunyavskiĭ pour les discussions bienvenues autour de cet article.

Notations

On note k_s une clôture séparable de k. Soit M un k–groupe de type multiplicatif (cf. [27], exp. X). On note $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(k[t, \frac{1}{t}])$ le tore standard. On dit que M est un k–tore (resp. est fini) si $\widehat{M}$ est un $\mathbf{Z}$–module libre (resp. fini). On note $\widehat{M} = \mathrm{Hom}_{k-gr}(M, \mathbb{G}_m)$ le module galoisien des caractères de M. Si $\chi \in \widehat{M}(k_s)$, on note k_χ/k l'extension galoisienne finie minimale telle que $\chi \in \widehat{M}(k_\chi)$. On définit ensuite l'extension galoisienne finie k_M/k comme le composé des extensions k_χ pour χ parcourant $\widehat{M}(k_s)$ et on note $\Gamma(M) = \mathcal{G}al(k_M/k)$. Si $\Gamma(M) = 1$ (i.e. $\widehat{M}$ est un module galoisien avec action triviale), on dit que M est déployé. Ainsi k_M/k est l'extension minimale déployant M. Pour toute extension séparable finie L/k, le k–groupe $R_{L/k}(M)$ est de type multiplicatif et on note $R^1_{L/k}(M)$ le noyau de la norme $N_{L/k} : R_{L/k}(M) \to M$. On dit qu'un tore T est *quasi–trivial* si T est un produit direct de facteurs $R_{L/k}\mathbb{G}_m$. On dit qu'un tore T est *inversible* s'il est facteur direct d'un tore quasi–trivial. Enfin, on note T_{an} le quotient maximal anisotrope d'un k–tore T.

De plus, si Γ est un groupe fini et A un Γ–module, on rappelle la notation

$$Ш^i_\omega(\Gamma, A) = \ker\Bigl(H^i(\Gamma, A) \to \prod_{\sigma\in\Gamma} H^i(\langle\sigma\rangle, A)\Bigr).$$

2. Groupes superversels

On utilise ici une construction [12, §6] qui est une variante de la construction de Grothendieck de torseurs versels ([13], §I.5).

Fixons un corps de base k, un diagramme de Dynkin connexe Δ, et un sous–groupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$. Un groupe superversel de type (Δ, Γ) est un groupe adjoint semi-simple G défini sur une extension F de type fini de k et de type quasi-déployé (Δ, ϕ_G) satisfaisant

$$\phi_G \in \mathrm{Im}\Big(H^1(F,\Gamma) \to H^1(F, \mathrm{Aut}(\Delta))\Big)$$

et tel qu'il existe une k–variété lisse irréductible X de corps des fonctions F et un schéma en groupes adjoints $\mathfrak{G}/X$ satisfaisant les deux propriétés suivantes:

(1) La fibre de $\mathfrak{G}$ au point générique de X est G.

(2) Pour toute extension E de k, avec E infini, pour tout groupe semi-simple adjoint H/E de type quasi-déployé (Δ, ϕ_H) tel que

$$\phi_H \in \mathrm{Im}\Big(H^1(E,\Gamma) \to H^1(E, \mathrm{Aut}(\Delta))\Big)$$

et toute sous–variété ouverte non vide U de X, il existe $x \in U(E)$ tel que la fibre $\mathfrak{G}_x$ est isomorphe à H.

Les groupes superversels existent et permettent d'étudier la rationalité des formes tordues de G.

Proposition 2.1. *On suppose k infini. Soit $G/k(X)$ un groupe superversel de type (Δ, Γ).*

(1) Si G est $k(X)$-rationnel (resp. stablement $k(X)$–rationnel, rétracte $k(X)$–rationnel), alors pour tout corps E/k et tout groupe semi-simple adjoint H/E de type quasi-déployé (Δ, ϕ_H) satisfaisant

$$\phi_H \in \mathrm{Im}\Big(H^1(E,\Gamma) \to H^1(E, \mathrm{Aut}(\Delta))\Big)$$

alors le groupe H/E est E–rationnel (resp. stablement E–rationnel, resp. E–rétracte rationnel).

(2) Idem pour G^{sc} et H^{sc}.

Démonstration de la Proposition 2.1. On montre seulement la première assertion, les autres étant analogues. On suppose donc que $\mathfrak{G} \underset{X}{\times} k(X)$ est $k(X)$–rationnel, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $V \subset \mathfrak{G} \underset{X}{\times} k(X)$ $k(X)$–isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_{k(X)}$. Il existe un ouvert non vide $U \subset X$ et un ouvert $W \subset \mathfrak{G} \underset{X}{\times} U$, surjectif sur U, tel que W est U–isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_U$. On se donne un groupe H/E comme dans l'énoncé, il existe alors un point $u \in U(E)$ tel que $H \cong \mathfrak{G} \underset{X}{\times}^u E$. On observe que $W \underset{U}{\times}^u E$ est un ouvert de $\mathfrak{G} \underset{X}{\times}^u E$, il est non vide car surjectif sur $\mathrm{Spec}(F)$. Alors $W \underset{U}{\times}^u F$ est E–isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_F$. On conclut que H/E est une variété E–rationnelle. $\square$.

Ceci nous permet de démontrer à peu de frais que les groupes trialitaires ne sont pas en général des variétés rationnelles.

Proposition 2.2. *Il existe un corps $F/\mathbf{C}$ et un F–groupe trialitaire simplement connexe de type ${}^6D_4$ qui n'est pas une variété rétracte k-rationnelle.*

Démonstration. On applique la proposition précédente à D_4, au groupe $\Gamma = \mathrm{Aut}(D_4)$ et au corps de base $k = \mathbf{C}$. Soit $G/k(X)$ un groupe superversel dans ce contexte. On sait qu'il existe un corps E/k et un groupe E/F simplement connexe de type ${}^2D_4$ qui n'est pas rétracte E–rationnel ([5], exemple 6.10). La proposition 2.1.(2) montre alors que $G^{sc}/k(X)$ n'est pas rétracte $k(X)$–rationnel. $\square$.

Nous montrons plus loin l'énoncé analogue pour les groupes de type ${}^3D_4$ (remarque 6.3).

Remarque 2.3. Dans le cas adjoint, on sait qu'il existe un corps F/k et un groupe adjoint H_{ad}/E de type ${}^1D_4$ qui n'est pas rétracte E–rationnel [15]. La proposition 2.1.(1) montre alors que le groupe superversel $G/k(X)$ pour D_4 et S_3 n'est pas rétracte $k(X)$–rationnel.

3. Spécialisation de la R-équivalence

3.1. **R-équivalence.** On rappelle ici quelques lemmes sur la R-équivalence. On note $\mathcal{O}$ l'anneau semi-local en 0 et 1 de la droite affine $\mathbf{A}^1_k$.

Soit X/k une variété algébrique définie sur un corps k. La R-équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $X(k)$ de X engendrée par la relation élémentaire suivante : deux points x_0 et x_1 de $X(k)$ sont dits directement R–équivalents s'il existe $x \in X(\mathcal{O})$ tel que $x(0) = x_0$ et $x(1) = x_1$. Sur un groupe algébrique, on sait que deux points R-équivalents le sont directement [14, II.1.1].

Lemme 3.1. *Soit H/k un groupe algébrique linéaire. Soit M un k–sous groupe k-résoluble (i.e. admettant une suite de composition centrale à quotients $\mathbb{G}_m$ ou $\mathbb{G}_a$) et distingué dans G. Alors le morphisme $H(k)/R \to (H/M)(k)/R$ est bijectif. En outre, H est R-trivial si et seulement si H/M est R–trivial.*

Démonstration. Par dévissage de M, on est ramené au cas où $M = \mathbb{G}_a$ ou $M = \mathbb{G}_m$. Ainsi $H^1(k, M) = 0$ et on a une suite exacte

$$1 \to M(k) \to H(k) \overset{p_k}{\to} (H/M)(k) \to 1.$$

Par suite, la flèche $H(k)/R \to (H/M)(k)/R$ est sujective. Montrons l'injectivité. Soit $[h]$ un élément du noyau. Alors il existe $h'(t) \in (H/M)(\mathcal{O})$ tel que $h'(0) = 1$ et $h'(0) = p(h)$. Vu que $H^1_{ét}(\mathcal{O}, M) = 0$, la flèche $p_{\mathcal{O}} : H(\mathcal{O}) \to (H/M)(\mathcal{O})$ est surjective. Ainsi $h'(t)$ se relève en un élément $h(t) \in H(\mathcal{O})$ satisfaisant $h(0) = 1$. Alors $p(h(t))(1) = p(h)$ donc $hh(1)^{-1} \in M(k)$. Comme M est R–trivial, h est R-équivalent à $h(1)$ donc à 1. $\square$

Il est commode d'exclure le cas d'un corps de base fini.

Proposition 3.2. *Soit H/k un groupe algébrique linéaire connexe défini sur un corps fini k. Alors H est une variété rétracte k-rationnelle (et même facteur direct d'une variété k-rationnelle) et est R–trivial.*

Notons que le cas des tores est bien connu, voir la remarque 3.5 ci-dessous.

Démonstration. On suppose tout d'abord G réductif.

(1) *H est rétracte k–rationnel.* On sait que G est quasi-déployé (Lang) et la décomposition de Bruhat indique que G est stablement rationnellement équivalent à un tore maximal T d'un sous–groupe de Borel B de G. Le cas des tores permet de conclure que G est facteur direct d'une variété k–rationnelle.

(2) *H est R–trivial.* Il faut montrer que $H(F)/R = 1$ pour tout corps F/k. Si F est infini, c'est une conséquence de [8, cor. de la prop. 11]. Dans le cas F fini, on peut

supposer que $F = k$. Vu que k est parfait, tout élément $h \in H(k)$ est le produit $h = h_s h_u$ où h_s est semi-simple et u est unipotent. En outre u est plongeable dans le radical unipotent d'un k–sous-groupe parabolique de H (Borel-Tits, [1], corollaire 3.7), donc est R-équivalent à 1. Ainsi on est ramené au cas d'un élément semi-simple donc au cas d'un tore. Ce dernier cas est traité par la référence [8, cor. 5 page 201].

Dans le cas général, on note U le radical unipotent de H. C'est un k–groupe résoluble déployé. Alors $H_{red} = H/U$ est réductif et H est birationnellement isomorphe à $U \times H_{red}$. Le groupe H est donc une variété rétracte k–rationnelle et R–triviale suivant le lemme 3.1. □

Lemme 3.3. *Soit H/k un groupe algébrique linéaire connexe. On note $\eta \in H(k(H))$ le point générique de H. Alors H est R-trivial si et seulement si $[\eta] = 1 \in H(k(H))/R$.*

Démonstration. Si k est un corps fini, cela résulte de la proposition 3.2. On suppose donc k infini. Le sens direct étant trivial, supposons que $[\eta] = 1 \in H(k(H))/R$. Il existe alors un ouvert $V \subset \mathbf{A}^1_k \times_k G$ tel que $U_0 = (\{0\} \times_k G) \cap V$ (resp. $U_1 = (\{1\} \times_k G) \cap V$) est non vide et un morphisme $f : V \to G \times_k G$, qui commute avec la seconde projection sur G, et tel que $f_{|U_0}$ s'identifie à la composée $U_1 \to G \overset{1, id_G}{\to} G \times_k G$, $f_{|U_1}$ s'identifie au plongement diagonal $U_1 \subset G \to G \times_k G$. On pose $U = U_0 \cap U_1$. Alors si $g \in U(k)$, g est R–trivial suivant l'élément f_{V_g} qui relie 1 et g. Ainsi $U(k)/R = 1$ et la proposition 11 de [8] indique que $G(k)/R = 1$. On conclut que G est R–trivial. □

Dans le cas des tores algébriques, on a suivant Colliot-Thélène et Sansuc [8] un critère de rétracte rationalité.

Théorème 3.4. *Soit T/k un tore algébrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) T est rétracte k-rationnel,

(2) Si $1 \to S \to E \to T \to 1$ désigne une résolution flasque de T, le tore flasque S est facteur direct d'un tore quasi–trivial. En outre, $T \times S$ est birationnel à E.

(3) T est R–trivial, i.e. $T(F)/R = 1$ pour tout k–corps F.

Remarque 3.5. En particulier, si le tore T est déployé par une extension métacyclique, on sait que T est R–trivial. Ceci est toujours le cas dans le cas d'un corps fini k.

La façon la plus simple d'exhiber des tores non rétractes k–rationnels est l'utilisation de l'invariant $Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T})$ qui, en caractéristique nulle, s'identifie au groupe de Brauer non–ramifié du k–tore T ([9], proposition 9.5). Calculons cet invariant pour des tores remarquables.

Lemme 3.6. *Soit l un nombre premier inversible dans k. Soient $a_1, ..., a_n \in k^\times$. On pose $k_i = k[u]/(u^l - a_i)$ et $M = k_1 \otimes_k ... \otimes_k k_n$ et $T_{r,M} \subset \mathbb{G}_m \times R_{M/k}(\mathbb{G}_m)$ le tore d'équation $x^{l^r} = N_{M/k}(y)$. On suppose que M est un corps et on pose $\Gamma = \mathcal{G}al(T_{r,M}) = \mathcal{G}al(k(\sqrt[l]{a}_1, \cdots, \sqrt[l]{a}_n)/k)$. Alors*

$$Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{r,M}) \overset{\sim}{\longrightarrow} Ш^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z}).$$

Démonstration. Le module des caractères $\widehat{T}_{r,M}$ s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathbf{Z}[\Gamma] & = & \mathbf{Z}[\Gamma] & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{l^r \oplus -N} & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[\Gamma] & \longrightarrow & \widehat{T}_{r,M} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \xrightarrow{l^r} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z} & \longrightarrow & 0. \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Vu que $\mathbf{Z}[\Gamma]$ est un module acyclique, il vient $H^2(\Gamma, \widehat{T}_{r,M}) \cong H^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z})$ et $Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{r,M}) \cong Ш^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/l^r\mathbf{Z})$. □

3.2. **Composante connexe rigide des groupes irréductibles.** Le fait suivant est un avatar de la notion de résidu spécial [14] pour les isogénies de groupes semi-simples.

Proposition 3.7. *Soit G/k un groupe réductif. On considère l'isogénie* $\mathrm{rad}(G) \to \mathrm{corad}(G)$ *entre le tore radical de G et le tore coradical de G. Si G est irréductible (i.e. n'admet aucun k-sous-groupe parabolique propre muni d'un sous-groupe de Levi), alors le morphisme* $(\widehat{\mathrm{rad}(G)})^0(k) \to (\widehat{\mathrm{corad}(G)})^0(k)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. On pose $G' = G/\mathrm{rad}(G)$ et $\mu = DG \cap \mathrm{rad}(G)$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & D(G) & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{rad}(G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & 1. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{corad}(G) & = & \mathrm{corad}(G) & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & & &
\end{array}$$

L'application du foncteur $\mathrm{Hom}_{k_s-gp}(\mathbb{G}_m, .)$ produit une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to (\widehat{\mathrm{rad}(G)})^0 \to (\widehat{\mathrm{corad}(G)})^0 \to \mu(-1) \to 0$$

où $\mu(-1) = \mathrm{Hom}_{k-gp}(\mu_n, \mu)$ pour n annulant μ. En prenant les invariants sous Galois, il vient la suite exacte

$$0 \to (\widehat{\mathrm{rad}(G)})^0(k) \to (\widehat{\mathrm{corad}(G)})^0(k) \to \mu(-1)(k) \to H^1(k, \widehat{\mathrm{rad}(G)}) \to \cdots$$

On va relier cette suite exacte à la cohomologie plate du corps valué $K = k((t))$ d'anneau d'entiers $O = k[[t]]$. En effet, on a le diagramme commutatif de résidus [14, app. A]

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{rad}(G)(O) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{corad}(G)(O) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{fppf}(O, \mu) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
1 \arrow[r] & \mathrm{rad}(G)(K) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & \mathrm{corad}(G)(K) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & H^1_{fppf}(K, \mu) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & (\widehat{\mathrm{rad}(G)})^0(k) \arrow[r] \arrow[d] & (\widehat{\mathrm{corad}(G)}^{\,0})(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mu(-1)(k) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

On considère alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{rad}(G)(K) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & G(K) \arrow[d] \\
\mathrm{corad}(G)(K) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & \mathrm{corad}(G)(K) \arrow[d] \\
H^1_{fppf}(K, \mu) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K, DG) \arrow[d] \\
H_{fppf}(K, \mathrm{rad}(G)) \arrow[r] & H^1(K, G).
\end{tikzcd}$$

Soit $\lambda \in (\widehat{\mathrm{corad}(G)})^0(k)$. Alors $\lambda(t) \in \mathrm{corad}(G)(K)$ et on sait que son image dans $H^1_{fppf}(K, \mu)$ est de résidu nul puisque G_{ad} est anisotrope [14, IV.3.2]. On conclut que $(\widehat{\mathrm{corad}(G)})^0)(k) \to \mu(-1)(k)$ est nul. $\square$

Corollaire 3.8. *On pose $O = k[[t]]$ et $K = k((t))$. Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.7, on a*

$$G(K) = G(O)\,.\,\mathrm{rad}(G)(K).$$

Démonstration. Le diagramme dans la preuve ci-dessus montre que $G(K) = \ker\bigl(G(K) \to \mathrm{corad}(G)(K)/\mathrm{corad}(G)(O)\bigr)\,.\,\mathrm{rad}(G)(K)$. Vu que la flèche $H^1(k, G) \cong$

$H^1(O, DG) \to H^1(K, DG)$ a un noyau trivial [4, lemme 2], le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(K) & \longrightarrow & \mathrm{corad}(G)(K) \\ \uparrow & & \uparrow \\ G(O) & \longrightarrow & \mathrm{corad}(G)(O) \end{array}$$

est carthésien. Ainsi $\ker\big(G(K) \to \mathrm{corad}(G)(K)/\mathrm{corad}(G)(O)\big) = D(G)(K).G(O)$. Mais $D(G)$ est semi-simple et anisotrope, donc $D(G)(O) = D(G)(K)$. On conclut que $G(K) = G(O)\,.\,\mathrm{rad}(G)(K)$. □

3.3. **Spécialisation de la R-équivalence.** Soit O un anneau de valuation discrète hensélien de corps résiduel k et de corps des fractions K. On note π une uniformisante de O, $\widetilde{K}/K$ l'extension maximale non ramifiée de K et $\omega : \widetilde{K}^\times \to \mathbf{Z}$ la valuation. On commence par le cas particulier suivant.

Proposition 3.9. *Soit G/K un groupe algébrique affine. Soit $\mathfrak{G}/O$ un modèle de G plat et de type fini. On suppose que $\mathfrak{G}(O) = G(K)$. Alors la flèche de spécialisation $\mathfrak{G}(O) \to \overline{\mathfrak{G}}(k)$ induit un morphisme $sp : \mathfrak{G}(K)/R \to \overline{\mathfrak{G}}(k)/R$.*

Démonstration. On définit le O-schéma en groupes $\mathfrak{G}'$ par

$$O[\mathfrak{G}'] = \Big\{ f \in K[G] \ \mid \ f(\mathfrak{G}(O)) \subset O \Big\}.$$

On a une inclusion $O[\mathfrak{G}] \subset O[\mathfrak{G}']$ et un isomorphisme $O[\mathfrak{G}'] \otimes_O K \cong K[\mathfrak{G}]$. En outre, vu les inclusions $\mathfrak{G}(O \subset \mathfrak{G}(O \subset G(K)$, le morphisme $\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ induit un isomorphisme $\mathfrak{G}(O) \cong \mathfrak{G}'(O)$. Ainsi $\mathfrak{G}'$ est étoffé [3, §1.7.3.f], c'est-à-dire plat et satisfaisant

$$O[\mathfrak{G}'] = \Big\{ f \in K[G] \ \mid \ f(\mathfrak{G}'(O)) \subset O \Big\}.$$

Quitte à remplacer $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{G}'$, on peut donc supposer que $\mathfrak{G}$ est étoffé. Il faut montrer qu'un point $g \in \mathfrak{G}(O) = G(K)$ est directement R-équivalent à e, alors son image $\overline{g} \in \overline{\mathfrak{G}}(k)$ est R-équivalent à $e \in \overline{\mathfrak{G}}(k)$. Il existe un ouvert affine $U \subset \mathbf{A}^1_K$ contenant 0 et 1 et un morphisme $h : U \to G$ tel que $h(0) = 0$ et $h(1) = g$. On note $\mathfrak{U} \subset \mathbf{A}^1_K$ l'adhérence schématique de U. C'est un schéma affine et plat sur O qui contient les points $0, 1$ de $\mathbf{A}^1(O)$. Vu que $h\big(\mathfrak{U}(O)\big) \subset \mathfrak{G}(O) = G(K)$ et que $\mathfrak{G}$ est étoffé, le morphisme h se prolonge en un morphisme $\mathfrak{h} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{G}$ [3, §1.7]. Il suit que g est R-équivalent à 1 dans $\overline{\mathfrak{G}}(k)$. □

Soit G/K un K–groupe semi-simple. On suppose que $G \times_K \widetilde{K}$ est déployé. On note $\mathcal{I}(G)$ l'immeuble de Bruhat-Tits de G/K. Si x est un point de $\mathcal{I}(G)$, on peut lui associer le O–schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}_x$ tel que $\mathfrak{G}_x(\widetilde{O}) = \mathrm{Stab}_{G(\widetilde{K})}(x)$. On note $\overline{\mathfrak{G}}_x/k$ la fibre spéciale [3, §5].

Théorème 3.10. *Soit $x \in \mathcal{I}(G)$.*

1. *Si $G(K)/R = 1$, alors $\overline{\mathfrak{G}_x}^0(k)/R = 1$;*
2. *Si $\mathfrak{G}$ est R-trivial, alors $\overline{\mathfrak{G}_x}^0$ est R-trivial.*

Soit S/K un tore maximal déployé de G. Le tore S définit un appartement $\mathcal{A}$ de $\mathcal{I}(G)$. On note $Z = Z_G(S)$ le centralisateur de S. Il lui est associé un modèle lisse $\mathfrak{Z}/O$ [3, §5.2.1].

Lemme 3.11. $Z(K) = S(K) \,.\, \mathfrak{Z}(O)$.

Démonstration: On note $T = \mathrm{corad}(Z)$, ce tore est déployé par $\widetilde{K}/K$. on dispose d'un morphisme [3, §5.1.22]

$$\nu : Z(K) \to T(K) = \bigl(\widehat{T} \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{K}^\times \bigr)^{\mathcal{G}al(\tilde{K}/K})} \xrightarrow{\omega_*} (\widehat{T})^0(K).$$

et on sait (*ibid*, 5.2.1) que

$$\mathfrak{Z}(O) = \ker(\nu).$$

Soit $x_0 \in \mathcal{A}$. On sait que l'immeuble élargi $\mathcal{I}^e(Z)$ s'identifie à $\mathcal{A}$ [25, §2.4.9]. L'action d'un élément $g \in Z(K)$ sur $\mathcal{A} = x_0 + (\widehat{S})^0 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \cong (\widehat{T})^0 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ est donnée par translation par $-\nu(g) \in (\widehat{T})^0(K)$ [3, §4.2.16]. Le lemme 3.7 appliqué à Z/K indique que $\nu(g)$ appartient à l'image de $(\widehat{S})^0(K)$. Il existe donc $s \in S(K)$ tel que $\nu(s) = \nu(g)$, d'où $gs^{-1} \in \ker(\nu) = \mathfrak{Z}(O)$, d'où la décomposition souhaitée. $\square$

Démonstration du théorème 3.10. On peut supposer que $x \in \mathcal{A}$.
(1) On considère le quotient $\mathfrak{H} := Z_{\mathfrak{G}_x}(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ [27, VIII.5] de fibre générique H/K. Suivant [16, §1.7], on a les isomorphismes suivants

$$\begin{array}{ccc} Z_G(S)(K)/R & \xrightarrow{\sim} & G(K)/R \\ \wr\downarrow & & \\ H(K)/R, & & \end{array}$$

Ainsi notre hypothèse entraîne que $H(K)/R = 1$. Puisque $H^1_{ét}(O, \mathfrak{S}) = 1$, le morphisme $Z_{\mathfrak{G}_x}(\mathfrak{S})(O) \to \mathfrak{H}(O)$ est surjectif. Combiné avec la décomposition du lemme 3.11, on obtient l'identité $\mathfrak{H}(O) = H(K)$. La lissité de $\mathfrak{H}/O$ implique que la spécialisation $\mathfrak{H}(O) \to \overline{\mathfrak{H}}(k)$ est surjective. La proposition 3.9 s'applique et montre que $\overline{\mathfrak{H}}(k)/R = 1$. Le lemme 3.1 indique que $\overline{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}_x}(\mathfrak{S})}(k)/R = 1$. Vu que $\overline{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}_x}(\mathfrak{S})}^0 = Z_{\overline{\mathfrak{G}}^0_x}(\overline{\mathfrak{S}})$, on en déduit que $Z_{\overline{\mathfrak{G}}^0_x}(\mathfrak{S})(k)/R = 1$, d'où la trivialité de $\overline{\mathfrak{G}}^0_x(k)/R$ suivant l'isomorphisme $\overline{\mathfrak{Z}_{\mathfrak{G}^0_x}(S)}(k)/R \cong \overline{\mathfrak{G}}^0_x(k)/R$.
(2) On suppose que le K–groupe $\mathfrak{G} \times_O K$ est R-trivial. Soit k'/k une extension séparable de type fini de k. Il existe une extension O'/O d'anneaux locaux tel que π est une uniformisante de O et telle que O' est un anneau de valuation discrète de corps résiduel k'. Alors $\mathfrak{G} \times_O O'$ est un schéma en groupes de Bruhat-Tits et $G^0(k')/R = 1$ d'après (1). En appliquant ceci à $k' = k(G^0)$, le lemme 3.3 permet de conclure que G^0 est R-trivial. $\square$

4. Autour de la construction de Platonov

Nous allons montrer que la non rationalité de certains groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ construits par Platonov [24] peut se comprendre par le principe de spécialisation.

Par commodité, on s'intéresse à des algèbres l–primaires, l étant un nombre premier tel que k contienne une racine primitive l–ième de l'unité ζ. Si D/k est une algèbre simple centrale de degré l^n, M/k une algèbre étale, et r un entier, on définit le k-groupe

$$\mathrm{G}_{r,M}(D)/k = \Bigl\{ N_{M/k}\bigl(\mathrm{Nrd}_M(d)\bigr) = x^{l^r} \Bigr\} \;\subset\; R_{M/k}(\mathrm{GL}_1(D)) \underset{k}{\times} \mathbb{G}_m.$$

On dispose du cocaractère

$$\lambda : \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{G}_{r,M}(D), \quad x \mapsto (x, x^{l^{n-r}\,[M:k]})$$

et on pose

$$\mathrm{PG}_{r,M}(G) := \mathrm{G}_{r,k}(D)/\mathbb{G}_m.$$

C'est un groupe semi-simple et dans le cas $M = k$, on observe que

$$\mathrm{PG}_{r,k}(D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_1(D)/\mu_{l^{n-r}}.$$

On pose $K = k((X))$ et $O = k[[X]]$.

Lemme 4.1. *Soient M/k une algèbre étale et r un entier. Soit*

$$D_n/K = (D_{n-1})_K \otimes A_\zeta(a, X)$$

où D_{n-1} désigne une k–algèbre simple centrale de degré l^{n-1} et $a \in k^\times$. On note $k_a = k[u]/(u^l - a)$.

(1) Il existe un O–schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}$ de fibre générique $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D_n)$ et dont la fibre fermée est extension de $\mathrm{PG}_{r,M}(D_{n-1})$ par un k–groupe unipotent déployé.

(2) Si $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D_n)/K$ est R-trivial, alors $\mathrm{PG}_{r,M}(D_{n-1})$ est R-trivial.

Démonstration. (1) On pose $D = D_n$. La valuation de K s'étend de façon unique à D, on note O_D son anneau de valuation. On définit le O–schéma en groupe $\mathrm{GL}_1(O_D)/\mathrm{Spec}(O) \subset O_D \xrightarrow{\sim} (\mathbf{A}_O)^{l^n}$ par l'ouvert $\mathrm{Nrd} \neq 0$. La fibre générique de $\mathrm{GL}_1(O_D)$ est $\mathrm{GL}_1(D)/K$, sa fibre spéciale réductive est donnée par l'ouvert (cf. [30], §1)

$$\Big\{ N_{k_a/k}\big(\mathrm{Nrd}_{k_a}(d)\big) \neq 0 \Big\} \ \subset \ R_{k_a/k}\big(\mathrm{GL}_1(D_{n-1})\big).$$

De la même façon, on définit le O–schéma en groupes

$$\mathrm{G}_{r,O\otimes_k M}(O_D) = \Big\{ N_{M/k}(\mathrm{Nrd}_M(d)) = x^{l^r} \Big\} \subset R_{M/k}(\mathrm{GL}_1(D)) \underset{O}{\times} \mathbb{G}_m.$$

de fibre générique $\mathrm{G}_{r,K\otimes_k M}(D)$ et de fibre spéciale réductive

$$\mathrm{G}_{r,M\otimes_k k_a}(D_{n-1}) = \Big\{ N_{M\otimes k_a/k}(\mathrm{Nrd}_{M\otimes_{k_a}}(d)) = x^{l^r} \Big\} \subset R_{k_a}\big(\mathrm{GL}_1(D_{n-1})\big) \underset{k}{\times} \mathbb{G}_m.$$

En passant au quotient par $\mathbb{G}_m$, on voit alors que $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D)$ admet un modèle de fibre spéciale réductive $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D)$.

(2) On applique le théorème 3.10. □

L'itération du processus conduit à la :

Proposition 4.2. *Soient r, n des entiers positifs et $a_1, .., a_n \in k^\times$. On pose $F = k((X_1))...((X_n))$, $k_i = k[u]/(u^l - a_i)$, $M = k_1 \otimes_k ... \otimes_k k_n$,*

$$D/F = A_\zeta(X_1, a_1) \otimes_F A_\zeta(X_2, a_2) \otimes_F \cdots \otimes_F A_\zeta(X_n, a_n).$$

et $T_{r,M} \subset \mathbb{G}_m \times R_{M/k}(\mathbb{G}_m)$ le tore d'équation $x^{l^r} = N_{M/k}(y)$.

Si $\mathrm{PG}_{r,F}(D)/F$ est R-trivial, alors $T_{r,M}$ est R-trivial.

Démonstration: On suit l'induction en posant $M_i = k_1 \otimes_k \dots \otimes_k k_{a_{n-i}}$, $F_i = k((X_1))...((X_i))$, $D_i/F_i = A_\zeta(X_1, a_1) \otimes_{F_i} A_\zeta(X_2, a_2) \otimes_F \cdots \otimes_{F_i} A_\zeta(X_i, a_i)$. Alors on a la suite d'inclusions de schémas

$$\mathrm{PG}_{r, F_n \otimes_k M_n}(D_n) \supset \mathrm{PG}_{r, F_{n-1} \otimes_k M_{n-1}}(D_{n-1}) \supset \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \supset G_{r, F_1 \otimes_k M_1}(D_1) \supset \mathrm{PG}_{r,k}(k\text{–algèbre triviale}) = T_{r,M}$$

et le lemme 4.1 entraîne la proposition. □

On analyse maintenant le cas particulier $r = n$.

Corollaire 4.3. *On garde les notations de la proposition précédente. Si* $\mathrm{SL}_1(D)/F$ *est R-trivial, alors le tore* $R^1_{M/k}\mathbb{G}_m$ *est R-trivial.*

Démonstration. On a $\mathrm{PG}_{0,F}(D) = \mathrm{SL}_1(D)$ et $T_{0,M} = R^1_{M/k}\mathbb{G}_m$. □

4.1. **Le contre-exemple de Platonov.** On prend $r = n = 2$ dans la proposition. Alors le tore $T_{r,M}$ n'est pas autre chose que le tore normique $R^1_{M/k}\mathbb{G}_m$ pour l'extension bicyclique $k(\sqrt[l]{a_1}, \sqrt[l]{a_2})$. On connait de exemples de tels tores normiques qui ne sont pas R-trivaux. Par exemple, si k est un corps p–adique et si $[k(\sqrt[l]{a_1}, \sqrt[l]{a_2}) : k] = l^2$, alors le tore $R^1_{M/k}(\mathbb{G}_m)$ ne satisfait pas à l'approximation faible ([8], §6, corollaire 1). On a produit ainsi sur le corps $k((X_1))((X_2))$ un groupe $\mathrm{SL}_1(D)$ qui n'est pas R-trivial.

5. Exemples de groupes exceptionnels non rationnels

Dans cette section, nous utilisons librement la construction de groupes sur des corps de séries de Laurent issues de la théorie de Bruhat-Tits ([31], §2).

5.1. **Type** E_6**.** On note $H = (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mu_3$ (resp. $\overline{H} = (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mathrm{Ker}(\mu_3^3 \to \mu_3)$) le groupe maximal de type $A_2.A_2.A_2$ du groupe déployé simplement connexe (resp. adjoint) de type E_6. L'image du bord

$$H^1(k, \overline{H}) \to \mathrm{Ker}\big(H^2(k, \mu_3)^3 \to H^2(k, \mu_3)\big)$$

est formée des classes d'algèbres D_1, D_2, D_3 (de degré 3) satisfaisant

$$[D_1] + [D_2] + [D_3] = 0 \in \mathrm{Br}(k).$$

Soit $z \in H^1(k, \overline{H})$ et D_i les algèbres correspondantes. Alors

$${}_zH = \Big(\mathrm{SL}_1(D_1) \times \mathrm{SL}_1(D_2) \times \mathrm{SL}_1(D_3)\Big)/\mu_3.$$

Proposition 5.1. *On pose* $F = k((X))((Y))$. *Soient* $a_1, a_2, a_3 \in k^\times$ *satisfaisant* $a_1a_2a_3 = 1$. *On note* $k_i = k[u]/(u^3 - a_i)$. *On pose*

$D_1/k((X)) = A_\zeta(a_1, X)$, $D_2/k((X)) = A_\zeta(a_2, X)$, $D_3/k((X)) = A_\zeta(a_3, X)/k((X))$.

et on note $\mathfrak{G}/k((X))[[Y]]$ *le schéma en groupe de Bruhat-Tits simplement connexe de type* E_6 *de fibre spéciale réductive*

$$H/k((X)) = \Big(\mathrm{SL}_1(D_1) \times \mathrm{SL}_1(D_2) \times \mathrm{SL}_1(D_3)\Big)/\mu_3.$$

Si $\mathfrak{G} \times_{k((X))[[Y]]} F$ *est R-trivial, alors le* k*–tore des normes communes*

$$N_{k_1/k}(y_1) = N_{k_2/k}(y_2) \neq 0$$

est R-trivial.

Démonstration. On suppose que $\mathfrak{G} \times_{k((X))[[Y]]} F$ est R-trivial. Le théorème 3.10 montre le groupe $H/k((X))$ est R-trivial. Le $k((X))$–groupe H admet un $k[[X]]$–modèle lisse de fibre spéciale réductive

$$T := \Big(R^1_{k_1/k}(\mathbb{G}_m) \times R^1_{k_2/k}(\mathbb{G}_m) \times R^1_{k_3/k}(\mathbb{G}_m)\Big)/\mu_3.$$

Ainsi ce tore est R-trivial. La suite exacte longue de cohomologie

$$1 \to \mu_3 \to \prod_i \big(R_{k_i/k}\mathbb{G}_m\big)(k) \to T(k) \to k^\times/(k^\times)^3 \to \prod_i k^\times/N_{k_i/k}(k_i^\times)$$

fournit une surjection

$$T(k) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \Big(\bigcap_{i=1,..,3} N_{k_i/k}(k_i^\times)\Big)/(k^\times)^3.$$

Ainsi, le tore des normes communes est R-trivial. □

Exemple 5.2. Le §2 de [19] exhibe des tores des normes communes non R-trivial. Joint à la proposition, on obtient bien ainsi un groupe semi-simple simplement connexe de type E_6 sur $k((X))((Y))$ qui n'est pas R-trivial.

Remarque 5.3. Dans le cas adjoint, la même démonstration montre que si $\mathfrak{G}_{ad}/F$ est R-trivial, alors le k–tore du tore $N_{k_1/k}(y_1)N_{k_2/k}(y_2)N_{k_3/k}(y_3) = 1$ est R-trivial. On ignore si un tel tore est en général R-trivial ou non.

5.2. **Type** E_7**.** On note $H = \mathrm{SL}_8/\mu_2$ (resp. $\overline{H} = \mathrm{SL}_8/\mu_4$) le groupe maximal de type A_8 du groupe déployé simplement connexe (resp. adjoint) de type E_7. L'image du bord $H^1(k, \overline{H}) \to H^2(k, \mu_2)$ est formée des classes d'algèbres D (de degré 8) satisfaisant

$$4[D_3] = 0 \in \mathrm{Br}(k).$$

Soit $z \in H^1(k, \overline{H})$ et D l'algèbre correspondante. Alors ${}_zH = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_2$.

Proposition 5.4. *On pose $F = k((X))((Y))((Z))((T))$. Soient $a_1, a_2, a_3 \in k^\times$ et $M = k_1 \otimes k_2 \otimes k_3$. On note $k_i = k[u]/(u^2 - a_i)$ et on considère le produit tensoriel d'algèbres de quaternions*

$$D/k((X))((Y))((Z)) = (a_1, X) \otimes (a_2, Y) \otimes (a_3, Z).$$

On note alors $\mathfrak{G}/k((X))((Y))((Z))[[T]]$ le schéma en groupe de Bruhat-Tits simplement connexe de type E_7 de fibre spéciale réductive

$$H/k((X))((Y))((Z)) = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_2.$$

Si $\mathfrak{G}_{gen}/F$ (resp. $\mathfrak{G}_{ad,gen}/F$) est R-trivial, alors le k–tore $T_{2,M}$ (resp. $T_{1,M}$) est R-trivial.

Démonstration. On suppose que $\mathfrak{G}_{gen}/F$ est R-trivial. Alors le théorème 3.10 indique que $H/k((X))((Y))((Z))$ est R-trivial. La proposition 4.2 montre alors que le tore $T_{2,M}$ est R-trivial. Pour le groupe adjoint, la démonstration est analogue. □

Exemple 5.5. Soit k un corps p-adique admettant une extension $M = k(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})$ de degré 8 (cela existe, e.g. [23], theorem 7.5.8). Suivant [8] (corollaire 5), on a

$$T_{2,M}(k)/rat = Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{2,M})^\vee = Ш^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^\vee,$$

la seconde égalité venant du lemme 3.6. Vu que $Ш^2_\omega(C_2 \times C_2, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) = H^3(C_2 \times C_2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, on a $T_{2,M}(k)/rat \neq 0$. La proposition montre alors que le groupe $G/k((X))((Y))((Z))((T))$ construit n'est pas R-trivial.

Remarque 5.6. Dans le cas adjoint, la même démonstration montre que si l'équivalence rationnelle est triviale sur $\mathfrak{G}_{ad}(F)$, alors la R–équivalence rationnelle est triviale sur les k-points rationnels du tore $T_{1,M}$. On ignore si un tel tore est en général R-trivial ou non, cependant $Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{1,M}) = Ш^2_\omega(\Gamma, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$.

5.3. **Type E_8.** On note $H = \mathrm{SL}_9/\mu_3$ le groupe maximal de type A_8 du groupe déployé de type E_8. L'image d'une classe $[z] \in H^1(k,H)$ par le bord $H^1(k,H) \to H^2(k,\mu_3) \subset {}_3\mathrm{Br}(k)$ est une algèbre D de degré 9 et d'exposant 3. La forme tordue correspondante est ${}_zH = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_3$, c'est la fibre spéciale d'un schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}/A$ de fibre générique de type E_8.

Proposition 5.7. *On pose $F = k((X))((Y))((Z))$. Soient $a_1, a_2 \in k^\times$. On note $k_i = k(\sqrt[3]{a_i})$. On pose*

$$D/k((X))((Y)) = A_\zeta(a_1, X) \otimes A_\zeta(a_2, Y).$$

On note $\mathfrak{G}/k((X))((Y))[[Z]]$ le schéma en groupe de Bruhat-Tits simplement connexe de type E_8 de fibre spéciale réductive

$$H/k((X))((Y)) = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_3.$$

Si $\mathfrak{G}_{gen}/F$ est R-trivial, alors le k–tore $T_{3,k_1\otimes k_2}$ est R-trivial.

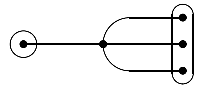
Démonstration. On suppose que $\mathfrak{G}_{gen}/F$ est R-trivial. Alors $H/k((X))((Y))$ est R-trivial (3.10). La proposition 4.2 montre alors que le k–tore $T_{3,k_1\otimes k_2}$ est R-trivial. $\square$

Exemple 5.8. Dans le cas où k est un corps p-adique et où $k(\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2})$ est un corps, alors on sait que le défaut de R–équivalence sur $T_{3,k_1\otimes k_2}(k)$ est le groupe $Ш^2_\omega(\mathcal{G}al(k(\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2})/k), \widehat{T}_{3,k_1\otimes k_2})$ ([8], corollaire 5.(ii)). Le lemme 3.6 montre que ce groupe est isomorphe à $Ш^2(C_3 \times C_3, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^\vee = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ (cf. [GS], Lemma 6.7.2). La proposition produit donc dans ce cas un groupe de type E_8 sur le corps $F = k((X))((Y))((Z))$ qui n'est pas R-trivial.

6. Retour sur les groupes trialitaires

On s'intéresse maintenant au cas laissé en suspens, celui des groupes de type ${}^3D_4$. On rappelle qu'à un tel groupe trialitaire G/k est attaché une extension séparable cubique L/k et une algèbre simple centrale A/L de degré 8, l'algèbre d'Allen de G; on sait que $\mathrm{Cor}^L_k([A]) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$.

On travaille sur $K = k((t))$ et on considère le cas d'une extension cubique $K' = L((T))$ pour une extension cubique L/k. Etant donné un $k[[T]]$-schéma $\mathfrak{G}$ en groupes de Bruhat-Tits $\mathfrak{G}$ de type ${}^{3,6}D_4$, on sait que le type quasi-déployé de la fibre spéciale réductive H/k de $\mathfrak{G}$ est donné par un sous–diagramme du diagrame de Dynkin complété



Pour le cas intéressant oú $\mathfrak{G}$ n'est pas semi-simple et H est semi-simple, il n'y a alors qu'une possibilité de type, i.e. le type quasi-déployé de la fibre spéciale réductive

H/k est isogène à $\mathrm{SL}_2 \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_2)$. En fait, le groupe H/k est une forme interne de

$$\Big(\mathrm{SL}_2 \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_2)\Big)/\mu_2.$$

le μ_2 étant envoyé diagonalement. De façon plus précise, il s'agit du torsion intérieure relative au groupe

$$\Big(\mathrm{SL}_2 \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_2)\Big)/\mu,$$

où $\mu := \ker\big(\mu_2 \times R_{L/k}(\mu_2) \overset{id+N_{k'/k}}{\longrightarrow} \mu_2\big)$. On voit alors facilement qu'il existe des algèbres de quaternions A/k, B/L satisfaisant

$$H \cong \Big(\mathrm{SL}_1(A) \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_1(B))\Big)/\mu_2$$

et soumises à la relation $[D] = \mathrm{cor}_k^L([B])$ dans le groupe $\mathrm{Br}(k)$. La classe de l'algèbre d'Allen du groupe $\mathfrak{G}/k((t))$ est alors $[B] - \mathrm{Res}_k^L([D]) \in \mathrm{Br}(L)$. Le groupe H est stablement k–rationnel à

$$M := \Big\{(x,y) \in \mathrm{SL}_1(A) \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_1(B)) \mid \ \mathrm{Nrd}_A(x) = \mathrm{Nrd}_B(y)\Big\}.$$

Le lemme suivant va permettre de construire un exemple explicite de tel groupe M qui n'est pas k-rationnel. On note σ un générateur de $\mathcal{G}al(L/k)$.

Lemme 6.1. *Soit $b \in L^\times$. On pose $a = N_{L/k}(b)$. On définit les algèbres de quaternions suivantes*

$$A/k((X)) := (X, a), \quad B/L((X)) = (X, b).$$

et le groupe

$$M/k((X)) := \Big\{(x,y) \in \mathrm{SL}_1(A) \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_1(B)) \mid \ \mathrm{Nrd}_A(x) = \mathrm{Nrd}_B(y)\Big\}.$$

On note T'/k le sous k–tore de $R_{k(\sqrt{a})/k}(\mathbb{G}_m) \times R_{L(\sqrt{b})/k}(\mathbb{G}_m)$ défini par

$$N_{k(\sqrt{a})/k}(x) = N_{L(\sqrt{b})/L}(y)$$

Si $M/k((X)))$ est R-trivial, alors le k–tore T est R-trivial.

Démonstration. Analogue à celle de la Proposition 4.2. □

On choisit maintenant k, L, et $b \in L^\times$ de sorte que $[L(\sqrt{b}, \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}) : L] = 8$ où $b_i = \sigma^i(b)$ pour $i = 1, 2$ sont les conjugués de b sous $\mathcal{G}al(L/k)$. On remarque que T_L n'est pas autre chose que le tore des normes communes

$$N_{L(\sqrt{a})/L}(x) = N_{L(\sqrt{b_0})/L}(y_0) = N_{L(\sqrt{b_1})/L}(y_1) = N_{L(\sqrt{b_2})/L}(y_2) \neq 0.$$

qui est stablement rationnel au tore

$$N_{L(\sqrt{b_0})/L}(y_0) = N_{L(\sqrt{b_1})/L}(y_1) = N_{L(\sqrt{b_2})/L}(y_2) \neq 0.$$

On sait que les résultats de [28] sur les extensions triquadratiques montrent en particulier qu'il existe des tores des normes communes pour des extensions triquadratiques qui ne sont pas R–triviaux ([14], §3). Le critère de stable rationalité des tores 3.4 montre qu'un tel tore n'est pas R-trivial. En particulier, T_L n'est pas R–trivial et a fortiori T n'est pas R–trivial. Le groupe $M/k((X))$ n'est pas R-trivial. Il résulte que le groupe $\mathfrak{G}/k((X))((T))$ simplement connexe de type ${}^3D_4$ n'est pas R-trivial.

Notons que cet exemple produit un groupe $\mathfrak{G}/L((X))((T))$ simplement connexe de type ${}^1D_4$ qui n'est pas R-trivial.

Remarque 6.2. Pour la rationalité du groupe adjoint $(\mathfrak{G}/R^1_{L/k}(\mu_2))/k((t))$, on a affaire au groupe $\overline{H} := H/\mu$ qui est stablement k–rationnel équivalent à

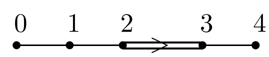
$$M^\sharp := \Big\{(x,y)\ \ \mathrm{SL}_1(A) \times R_{L/k}(\mathrm{SL}_1(B)) \mid \ \mathrm{Nrd}_A(x) = N_{L/k}(\mathrm{Nrd}_B(y))\Big\}.$$

La condition $[D] = \mathrm{cor}_k^L([B])$ implique $N_{L/k}(\mathrm{Nrd}_B(B^\times)) \subset \mathrm{Nrd}(A^\times)$. Le même raisonnement qu'au lemme 7.1 montre que $M^\sharp$ est R-trivial. On ne peut donc pas conclure sur la R-trivialité de $(\mathfrak{G}/R^1_{L/k}(\mu_2))/k((t))$.

Remarque 6.3. Un argument similaire à celui de la proposition 2.2 montre qu'un groupes trialitaire simplement connexe superversel de type ${}^3D_4$ n'est pas variété rétracte k–rationnelles.

7. Groupes de type F_4

Dans cette section, nous tentons d'appliquer la méthode précédente aux groupes de type F_4. Rappelons le diagramme de Dynkin étendu sous-jacent



La théorie de Bruhat-Tits permet donc de construire des groupes de type F_4 sur $k((T))$ qui dégénèrent en des groupes semi-simples des types suivants

$$A_1 \times C_3, \ \ A_2 \times A_2, \ \ A_3 \times A_1, \ \ B_4$$

qui sont respectivement des formes *internes* des groupes suivants

$$\Big(\mathrm{SL}_1 \times \mathrm{Sp}_6\Big)/\mu_2, \ \ \Big(\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3\Big)/\mu_3, \ \ \Big(\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_1\Big)/\mu_2, \ \ \mathrm{Spin}_8.$$

Dans le premier cas, c'est un k–groupe

$$\Big(\mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{Sp}(D,h)\Big)/\mu_2,$$

où D est une algèbre de quaternions et h une forme hermitienne non dégénérée sur D^3. Ce groupe est stablement k–birationnel à

$$H := \{(x,y) \in \mathrm{GL}_1(D) \times \mathrm{GSp}_1(D,h) \ \ | \ \ \mathrm{Nrd}(x) = \mu(y)\},$$

où $\mu : \mathrm{GSp}_1(D,h) \to \mathbb{G}_m$ désigne le multiplicateur.

Lemme 7.1. *Le groupe H/k est stablement k–rationnel.*

Démonstration. Le groupe H s'insère dans une suite exacte

$$1 \to \mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{Sp}_1(D,h) \to H \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_m \to 1.$$

Les groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ et $\mathrm{Sp}_1(D,h)$ sont k–rationnels. Vu que Sp_6 est de type C_3, le lemme 3 de [20] indique que $\mu(\mathrm{GSp}_1(D,h)(F)) = \mathrm{Nrd}((D \otimes_k F)^\times) = \alpha(H(F))$ pour tout F/k. Ainsi les images de $\alpha : H(F) \to F^\times$ et $\mathrm{Nrd} : D^\times \to F^\times$ coïncident pour tout F/k. La proposition 3 de [20] permet de conclure que le groupe H est stablement k–rationnel à $\mathrm{GL}_1(D)$, donc rationnel. $\square$

Dans le second cas, il s'agit d'un groupe

$$\Big(\mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{SL}_1(D)\Big)/\mu_3$$

pour une algèbre simple centrale D de degré 3 et un tel groupe est stablement k–rationnel puisque il est stablement birationnel au k–groupe

$$\{(x,y) \in \mathrm{GL}_1(D) \times \mathrm{GL}_1(D) \quad | \quad \mathrm{Nrd}(x) = \mathrm{Nrd}(y)\}$$

lui-même stablement k–rationnel. Dans le troisième cas, on a affaire à un groupe

$$\Big(\mathrm{SL}_2(D) \times \mathrm{SL}_1(D)\Big)/\mu_2$$

pour une algèbre de quaternions D et un tel groupe est de même une variété stablement k–rationnelle. Dans le dernier cas, on tombe sur le groupe des spineurs $\mathrm{Spin}(q)$ d'une 3–forme de Pfister q. Il est alors connu que le groupe $\mathrm{Spin}(q)$ est k-rationnel (Chernousov-Merkurjev-Rost [21], Theorem 8.6). En conclusion, notre méthode ne permet pas de construire de variétés de groupe de type F_4 non rationnelles.

Références

[1] A. Borel et J. Tits, *Eléments unipotents et sous-groupes paraboliques des groupes réductifs*, Invent. Math. **12** (1971), 95-104.

[2] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées.*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **41** (1972), 5–251.

[3] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **60** (1984), 197–376.

[4] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. III. Complémente et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math. **34** (1987), 671-698.

[5] V.I. Chernousov et A. A. Merkurjev, *R-equivalence in spinor groups*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 509–534.

[6] V.I. Chernousov et V. P. Platonov, *The rationality problem for semisimple group varieties*, J. Reine Angew. Math. **504** (1998), 1–28.

[7] C. Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tôhoku Math. J. **7** (1955), 14–66.

[8] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc, *La R–équivalence sur les tores*, Ann. Scient. ENS, vol. **10** (1977), 175–230.

[9] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc, *Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori: Applications*, Journal of algebra **106** (1987), 148–205.

[10] J.–L. Colliot–Thélène et J.–J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, Algebraic groups and homogeneous spaces, 113–186, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.

[11] J.–L. Colliot–Thélène, P. Gille et R. Parimala, *Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields*, Duke Math. J. **121** (2004), 285–341.

[12] S. Garibaldi et P. Gille, *Algebraic groups with few subgroups*, Journal of London Math. Soc. **80** (2009), 405-430.

[13] R.S. Garibaldi, J. P. Serre et A.A. Merkurjev, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, American Mathematical Society University Lecture Series, volume 28.

[14] P. Gille, *La* R*-équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global*, Publ. Math. I.H.E.S. **86** (1997), 199–235.

[15] P. Gille, *Examples of Non-rational Varieties of Adjoint Groups*, Journal of Algebra **193** (1997), 728–747.

[16] P. Gille, *Spécialisation de la* R*-équivalence pour les groupes réductifs*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 4465–4474.

[17] P. Gille, *Le problème de Kneser-Tits*, séminaire Bourbaki n^0 983, Astérisque **326** (2009), 39-81.

[GS] P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **101** (2006), Cambridge University Press.

[18] Y. Manin, *Cubic forms*, 2-nde édition, North–Holland (1986).

[19] A. A. Merkurjev, *Certain K–cohomology groups*, Jacob, Bill (ed.) et al., K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras, Santa Barbara, Proc. Symp. Pure Math. **58** (1995), Part 2, 319-331.

[20] A. A. Merkurjev, *R-equivalence and rationality problem for semisimple adjoint classical algebraic groups*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **84**(1996), 189–213.

[21] A. A. Merkurjev, *K-theory and algebraic groups*, European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996), 43–72, Progr. Math., **169**, Birkhäuser, Basel, 1998.

[22] A. P. Monastyrnyĭ et V. I. Yanchevskiĭ, *Whitehead groups of spinor groups* (en russe) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), 60–96, 221; tranduction anglaise dans M ath. USSR-Izv. **36** (1991), 61–100.

[23] J. Neukirch, A. Schmidt et K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 323 (2000), Springer-Verlag.

[24] V. Platonov, *The Tannaka-Artin problem, and groups of projective conorms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **222** (1975), 1299–1302.

[25] G. Rousseau, *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, Thèse de doctorat, Publications Mathématiques d'Orsay, No. 221-77.68. U.E.R. Mathématique, Université Paris XI, Orsay, 1977.

[26] D. Saltman, *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Israel J. Math. **47** (1984), 165–215.

[27] *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963-1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 151-153. Springer (1970).

[28] D. Shapiro, J.–P. Tignol and A. Wadsworth, *Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions. II*, J. of Algebra **78** (1982), 58–90.

[29] R. Steinberg, *Variations on a theme of Chevalley*, Pacific J. Math. **9** (1959), 875-891.

[30] A. A. Suslin, *SK_1 of division algebras and Galois cohomology*, Algebraic K-theory, 75–99, Adv. Soviet Math., **4** (1991), Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[31] J. Tits, *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups*, Journal of Algebra **131** (1990), 648–677.

[32] V.E. Voskresenskiĭ, *The reduced Whitehead group of a simple algebra*, Uspehi Mat. Nauk **32** (1977), no. 6 (198), 247–248.

[33] V.E. Voskresenskiĭ, *Algebraic groups and their birational invariants*, Trans. of Math. of Monographs, vol **179** (1998), AMS.

[34] A. Wadsworth, *Valuation theory on finite dimensional division algebras*, Valuation theory and its applications, Vol. I (Saskatoon, SK, 1999), 385–449, Fields Inst. Commun. **32** (2002), Amer. Math. Soc.

Département de Mathématiques et Applications, UMR 8553 du CNRS, Ecole normale supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75005 Paris, France.