

## Raport științific privind implementarea proiectului în perioada noiembrie 2013-decembrie 2014

*Philippe Gille*

În perioada noiembrie-decembrie 2013, am început implemen-  
-tarea proiectului pe cele trei direcții de cercetare prevăzute

- (1) Spații omogene aritmetice;
- (2) R-echivalența pe spații omogene;
- (3) Aplicarea torsorilor în teoria Lie în dimensiune infinită.

Principala activitate a fost cea de documentare. Concret, am început să studiem mai mult articole recente, direct legate de primul termen. Cei doi membri ai proiectului s-au întâlnit de două ori pe săptămână, cum era planificat.

În perioada ianuarie 2014-decembrie 2014, implementarea proiectului nostru (etapa a II-a) a continuat cu succes. Pe cele trei teme de cercetare cuprinse în proiect, activitatea a fost intensă și fructuoasă. Toate obiectivele stabilite au fost îndeplinite și sunt prezentate acum.

### Rezultatele obținute

*Tema 1: Spații omogene aritmetice:* În cadrul acestei teme principale a proiectului a fost publicat articolul *Sur la classification des schémas en groupes semi-simples* ([2] în lista lucrărilor). Lucrarea prezintă o extindere a unor anumite rezultate clasice din teoria Demazure-Grothendieck despre scheme grup reductive și spații omogene  $G/P$  proiective pe o bază generală. Rezultatul cel mai semnificativ este faptul că subgrupurile parabolice ale unei scheme grup reductive  $G$  peste un inel apar ca subgrupuri “limită” pentru cocaractere (teorema 7.3). Acest fapt este bine cunoscut pentru grupurile algebrice, mai puțin pentru cazul unui inel local. Este remarcabil că se globalizează și are aplicații, de exemplu, în tema a treia.

Pe de altă parte, articolul pre-publicat [4] studiază torurile maximale ale grupurilor algebrice de tip  $G_2$  și spațiile omogene legate. A fost scris de membrii proiectului împreună cu T.Y. Lee (EPFL, Lausanne). În mod neașteptat,

---

*Situl proiectului [http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/gille/idei\\_pg.html](http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/gille/idei_pg.html) da un rezumat al activității, linkuri spre articole și detalii ale expunerilor și conferințelor prezentate.*

s-a arătat că există un astfel de spațiu omogen care nu are nici un punct rațional dar are un punct pătratic și un punct cubic. Este cel mai simplu exemplu de acest gen.

Acest lucru nu se poate întâmpla pe un corp de numere; în acest caz, am arătat că spațiile omogene relevante satisfac principiul Hasse.

*Tema 2: R-echivalența pe spații omogene:* Este tema cărții în pregătire [5]. E vorba de spații omogene pe un corp de dimensiune coomologică  $\leq 2$  sau un corp de numere. Prima etapă este cazul spațiilor principale omogene care este legat bineînțeles de coomologia Galois. Această parte este bine avansată cu metode diferite față de literatura existentă.

*Tema 3: Aplicarea torsorilor în teoria Lie în dimensiune infinită:* Această temă continuă o colaborare fructuoasă cu V. Chernousov și A. Pianzola (Edmonton, Canada).

În 2013, la cea de-a treia direcție de cercetare, am obținut rezultatele despre generația unor grupuri care sunt importante în teoria algebrei Kac-Moody legate cu algebrele Lie pe un inel de polinoame Laurent. E vorba de lucrarea [1] în colaborare cu V. Chernousov și A. Pianzola. Metodele sunt destul de clasice, adică sunt bazate pe o studiere fină a acțiunii grupului pe un imobil Bruhat-Tits potrivit. Din această cauză, ne-am limitat la cazul cu un singur parametru și avem anumite idei despre cazul general, care arată mult mai complicat.

Articolul publicat [3] prezintă o generalizare a algebrei Onsager  $\mathfrak{sl}_2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t^{\pm 1}, \frac{1}{t-1}]$ , adică un fel de algebre de tip Kac-Moody unde inelul de polinoame Laurent este înlocuit cu inelul funcțiilor regulate algebrice peste sfera Riemann minus trei puncte. Teoria Grothendieck “Dessins d’enfants” (desene de copii) descrie acoperirile (finite) ale sferei Riemann minus trei puncte și permite clasificarea acestei clase de algebre Lie. În tip trialitar  $D_4$ , apare o algebră Lie foarte specială există o familie infinită de subalgebre maximale diagonalizabile neconjugate.

## Lucrări ale membrilor echipei în cadrul proiectului

### Publicații

[1] V. Chernousov, P. Gille și A. Pianzola, *Whitehead groups of loop group schemes of nullity one*, Journal of the Ramanujan Mathematical Society 29 (2014), 1-26.

[2] P. Gille, Sur la classification des schémas en groupes semi-simples, acceptat în volumul “Autour des Schémas en groupes, III”, Panoramas et Synthèses, SMF, 81 pagini.

[3] V. Chernousov, P. Gille și A. Pianzola, *Three-point Lie algebras and Grothendieck’s dessins d’enfants*, acceptat în Mathematical Research Letters, 16 pagini.

#### *Pre-publicații*

[4] N. Beli, P. Gille și T.-Y. Lee, *Maximal tori of algebraic groups of type  $G_2$* , supus în noiembrie, 28 pagini.

#### *Carte în lucru*

[5] P. Gille, *Groupes algébriques semi-simples sur un corps de dimension cohomologique séparable  $\leq 2$* , trei capitole.

### **Schimburii academice**

Deschiderea financiară a proiectului pentru 2014 a avut loc doar la sfârșitul lunii octombrie, în consecință au fost anulate majoritatea schimburilor prevăzute în aprilie în cadrul mini-conferinței despre *Aproximația tare în grupuri algebrice*.

Singurul invitat a fost Rony Bitan din Universitatea Bar-Ilan (Tel Aviv, Israel) pentru o săptămână din aprilie. A expus rezultatele lui în seminarul de teoria numerelor. Am avut discuții foarte interesante cu el pe tema principală a proiectului, spații omogene aritmetice.

Pe de altă parte, în martie 2014, P. Gille a fost invitat la Montréal (CRM) în cadrul semestrului *Nouvelles avenues en théorie de Lie*. A dat o conferință specializată pe tema a treia și a început o colaborare cu E. Neher (Ottawa) pe spații omogene aritmetice pentru scheme grup de tip  $G_2$ . Acest lucru este legat de lucrarea [4].

Așa cum era prevăzut în proiect în martie 2014, s-a răspuns și invitației lui Gopal Prasad (Ann Arbor, Universitatea Michigan) unde s-a început o altă colaborare și cu B. Conrad despre compactificările Gabber ale grupurilor algebrice și spațiilor omogene.

În decembrie 2014, P. Gille a fost invitat la Edmonton (Canada) pentru a continua colaborarea cu V. Chernousov și A. Pianzola pe tema algebrelor Lie de dimensiune infinită în legătură cu scheme grup pe un inel de polinome Laurent.

P. Gille  
—