Conférence Lyon/Ottawa
Algèbre et théorie des nombres,
Titres et résumés des exposés.

Cours I : Pierre GUILLOT, *Dessins d'enfants.*

Résumé : On va donner une présentation de la théorie des dessins d'enfants. L'énoncé principal de celle-ci est l'équivalence de nombreuses catégories, comme par exemple celle des graphes plongés sur une surface, et celle des algèbres étales avec une condition de ramification appropriée. On observe alors que la groupe de Galois absolu du corps des rationnels agit sur les objets (à isomorphisme près) de ces catégories, et ce de manière fidèle. Ces considérations mènent naturellement au groupe de Grothendieck-Teichmüller, un groupe profini explicite qui contient le groupe de Galois en question. On présentera dans le cours des méthodes de calcul concrètes.

Cours II : Éric GAUDRON et Gaël RÉMOND :

Espaces adéliques rigides.

Résumé : En géométrie des nombres, le premier théorème de Minkowski garantit l'existence d'un petit vecteur (non nul) d'un réseau relativement au volume du réseau. Ce type d'énoncé s'étend aux corps de nombres et même au corps K des nombres algébriques, en remplaçant les norme et volume par des hauteurs adéquates. Dans ce cours, nous présenterons la notion de corps de Siegel et le cadre des espaces adéliques rigides dans laquelle elle s'inscrit. Ces corps sont ceux dans lesquels on peut énoncer un avatar du théorème de Minkowski (parfois appelé « lemme de Siegel »). En guise d'applications, nous expliquerons comment calculer les constantes d'Hermite de K et comment trouver (théoriquement) des petites solutions à des équations quadratiques.

Seidon ALSAODY, *Lie Bialgebras and Belavin-Drinfeld Cohomology via Quaternion Algebras and Hilbert's 17th Problem.*

Résumé : Through the work of Etingof and Kazhdan, the study of quantum groups was related to that of Lie bialgebras over certain algebraically non-closed fields. Over algebraically closed fields, Lie bialgebra structures on simple finite-dimensional Lie algebras were classified by Belavin and Drinfeld. This was extended by Stolin and co-authors to the split case over non-closed fields, by introducing a certain type of cohomology. Recent work by Pianzola and Stolin relates this to Galois cohomology of certain algebraic groups.

After an introduction, I will talk about a recent joint work with A. Stolin, where we consider the non-split case in type A. Our results are particularly detailed over fields of cohomological dimension at most two, and over function fields in at most two indeterminates over real closed fields. Connections to Pfister forms and quaternion algebras appear naturally along the way.

Daniel BARRERA SALAZAR, *Overconvergent Eichler-Shimura isomorphisms for Shimura curves.*

Résumé : We will discuss the p-adic variation of the Eichler-Shimura isomorphism in the context of Shimura curves over totally real number fields. In particular, we describe the finite slope part of the space of overconvergent modular symbols in terms of the finite slope part of the space of overconvergent modular forms. This is joint work with Shan Gao.

Yuly BILLIG, *Indecomposable weight modules for the Lie algebra of divergence zero vector fields on a torus.*

Résumé :

Laura CAPUANO, *Unlikely Intersections in certain families of abelian varieties and the polynomial Pell equation.*

Résumé : Given n independent points on the Legendre family of elliptic curves of equation $Y^2 = X(X-1)(X-c)$ with coordinates algebraic over $\mathbb{Q}(c)$, we will see that there are at most finitely many specializations of c such that two independent relations hold between the n points on the specialized curve. This result fits in the framework of the so-called Unlikely Intersections. We will see analogues of this result in certain families of abelian varieties and explain how they apply to the problem of studying the solvability of

the almost-Pell equation in polynomials. This is joint work with Fabrizio Barroero.

David CORWIN, *Beyond the Étale-Brauer Obstruction.*

Résumé : For a variety X over a number field, the Brauer-Manin obstruction defines a subset of the adelic points of X containing the rational points, known as the Brauer set. Similar obstructions include the finite descent set, which is based on étale covers, and the étale Brauer-Manin obstruction, which combines the two. However, there exist varieties without rational points with nonempty étale Brauer set. In this talk, we explain how one can refine these obstructions by taking Zariski open covers to get an obstruction that necessarily detects whether or not there is a rational point. More specifically, over totally real and quadratic imaginary fields, we show unconditionally that this works for the finite abelian descent obstruction, which is weaker than Brauer-Manin or finite descent. We also show that this works for the finite descent obstruction over all number fields if we assume the section conjecture.

Alsessandra FRABETTI, *Loop of formal diffeomorphisms*

Résumé : Formal diffeomorphisms in one variable form a proalgebraic group represented by the so-called Faà di Bruno Hopf algebra, which is commutative and not cocommutative. This algebra, and some variations generated by trees and Feynman graphs, encode very efficiently the renormalization of Green's functions in perturbative quantum field theory.

A model for QED renormalization makes use of a non-commutative version of the FaÃ di Bruno Hopf algebra, which of course can not represent a proalgebraic group. However, formal series with matrix (non-commutative) coefficients make plainly sense in the physical context, and do form a loop. In a joint work with Ivan P. Shestakov (Sao Paulo), we show how this loop can be represented by the non-commutative Faà di Bruno Hopf algebra, and the relationship with its infinitesimal counterpart, which is a Sabinin algebra.

Stéphane GAUSSENT, *Masures and Iwahori-Hecke algebras.*

Résumé :

Luca GHIDELLI, *Lower bounds for the multiplicity of vanishing of the resultant.*

Résumé : The resultant attached to a multiprojective variety and a sequence of multihomogeneous polynomials is a polynomial form in the coefficients of

the polynomials, which vanishes if and only if the polynomials have a common zero on the variety. A result of Roy in the homogeneous case says that the resultant vanishes with order at least N if the polynomials share N isolated common zeros, counted with multiplicity. We show how this generalizes in multihomogeneous setting and, by considering more generally the multiplicity of vanishing along a prime ideal, we provide a connection with an arithmetic statement due to Chardin.

Kenji IOHARA, *Elliptic root system and their Weyl group invariants.*

Résumé : In this talk, I will present an overview of what is called a (marked) elliptic root system, its Weyl group, and an associated Lie algebra. Some known facts about the Weyl group invariants will be also given. The aim of this talk is to explain its geometric aspects that motivated the introduction of such root systems by K. Saito in 1980's.

Michel LAURENT, *Densité d'orbites de matrices.*

Résumé : On commencera par énoncer un théorème dû à Dani et à Raghavan qui fournit un critère de densité pour l'orbite d'une matrice rectangulaire sous l'action multiplicative d'un groupe unimodulaire de matrices entières. Nous introduirons des exposants d'approximation qui mesurent la densité de l'orbite dans l'espace des matrices réelles de format donné. L'estimation de ces exposants reste un problème ouvert, même pour une orbite et un point cible génériques. On indiquera quelques résultats récents sur cette question obtenus par diverses méthodes.

Samuel LE FOURN, *La méthode de Runge en dimension supérieure*

Résumé : Cette méthode de géométrie diophantienne est initialement conçue pour les courbes projectives lisses sur les corps de nombres, sur lesquelles elle donne (lorsqu'elle s'applique) des résultats explicites et d'une certaine manière "uniformes". Sa démonstration étant sur le principe assez élémentaire, il est naturel de chercher à la généraliser à des variétés, mais cela pose de nombreux problèmes à la fois théoriques et pratiques. Dans cet exposé, je présenterai les difficultés qui apparaissent par rapport au cas des courbes, et un théorème qui permet de les contourner, avec en ligne de mire une application concrète à une certaine variété modulaire.

Olivier MATHIEU, *Self similarity for τ-groups.*

Résumé :

Guillaume MAURIN, *Intersections singulières de sous-tores et de sous-variétés.*

Résumé : Nous présentons un nouveau résultat sur les intersections singulières de sous-tores et de sous-variétés de dimensions complémentaires dans les tores multiplicatifs. Etant donné une sous-variété X d'un tore A, le problème consiste à démontrer la non-densité dans X de la réunion de toutes les intersections de ce type lorsque la sous-variété est X et qu'on fait varier le sous-tore. Nous montrons que ce type d'énoncé est vrai dans le cas des courbes (dim (X)=1) et des hypersurfaces (codim(X)=1), sans restriction sur la dimension de A. L'ingrédient principal est un théorème de hauteur bornée issu des travaux de Bombieri, Masser et Zannier. Nous expliquerons ensuite le lien avec la conjecture de Zilber-Pink et discuterons de plusieurs généralisations possibles de ce type de problème.

Erhard NEHER, *Conjugacy of Cartan subalgebras in Lie tori and extended affine Lie algebras* ,

Résumé : Lie tori are Lie algebras that generalize finite-dimensional split simple, twisted and untwisted loop algebras, certain multiloop algebras, and toroidal Lie algebras. They are a key ingredient in thhe construction of extended affine Lie algebras. Both Lie tori and extended affine Lie algebras are defined in terms of certain Cartan subalgebras. This leads to the natural question of conjugacy of these Cartan subalgebras, a fundamental result in the aforementioned examples. In this talk I will describe the present state of the conjugacy problem, both for Lie tori and extended affine Lie algebras, and explain some of the methods used.

Florin NICOLAE, *Are number fields determined by Artin L-functions ?*

Résumé :

Federico PELLARIN, *Valeurs et fonctions zêta pour les corps globaux de caractéristique non nulle.*

Résumé : Dans cet exposé nous présenterons une nouvelle théorie de l'interpolation de valeurs zêta et L en caractéristique non nulle. Les fonctions que l'on construit présentent des analogies et des différences avec les fonctions L de Dirichlet classiques et permettent d'accéder, par le biais de leur propriétés analytiques, à des informations arithmétiques.

Arturo PIANZOLA, *Belavin-Drinfeld quantum groups and Lie bialgebras : Galois cohomology considerations.*

Résumé :

Anne PICHEREAU, *Structures de Poisson $\mathbb{Z}_2$-gradués et cohomologie.*

Résumé : Cet exposé présente un travail en commun avec Michaël Penkava (Univ. Wisconsin-Eau Claire). Nous considérons des structures de Poisson $\mathbb{Z}_2$-graduées, définies sur des algèbres polynomiales graduées commutatives, avec m générateurs pairs et n générateurs impairs (algèbres symétriques d'espaces vectoriels $\mathbb{Z}_2$-gradués de dimension $m|n$). Après avoir rappelé les définitions de ces structures et de la cohomologie qui leur est associée, nous expliquerons certains des résultats que nous avons pu obtenir en petites dimensions (0|1, 1|1, 2|1, ...) : classifications de ces structures de Poisson, cohomologie. Nous nous attacherons particulièrement à mettre en évidence certaines des différences et des analogies entre le cadre $\mathbb{Z}_2$-gradué et le cadre classique, par exemple concernant les liens, présents dans les deux cas, entre singularités et cohomologie de Poisson.

Vincent PILLONI, *Formes modulaires de Siegel de poids non régulier.*

Résumé : Les travaux de Wiles ont permis de montrer la modularité des courbes elliptiques définies sur $\mathbb{Q}$. On parlera de la question analogue et non résolue pour les surfaces abéliennes.

Nicolas RESSAYRE, *Sur la complexité déterminantale symétrique du permanent.*

Résumé : Tout polynôme peut s'écrire comme déterminant de formes affines. Dans la théorie de L. Valiant, la taille d'un tel déterminant, appelé complexité déterminantale, est une mesure de sa complexité algébrique. La principale question est alors de minorer la complexité déterminantale du permanent. Des travaux de Mulmuley-Sohoni souligne l'importance des symétries de ces polynômes, le déterminant et le permanent. Dans cet exposé, on s'intéresse aux représentations déterminantales du permanent qui respectent ces symétries.

Sandra ROZENSZTAJN, *Congruences of modular forms modulo p and a variant of the Breuil-Mézard conjecture*

Résumé : In this talk I will explain how a problem of congruences modulo p in the space of modular forms $S_k(\Gamma_0(p))$ is related to the geometry of some deformation spaces of Galois representations and can be solved by using a variant of the Breuil-Mézard conjecture.

Hadi SALMASIAN, *The Capelli problem, invariant differential operators, and superalgebras.*

Résumé : I will talk about various invariant differential operators which act on the algebras of functions on various symmetric spaces, and their spectrum. I will also consider analogous problems in the case of Lie superalgebras. We describe a precise relationship between these spectra and well-known polynomials such as the Jack functions and their super-variants discovered by Sergeev and Veselov. The super version of the Capelli problem of Howe and Umeda plays a key role in this connection.

Alistair SAVAGE, *Heisenberg categorification and its applications.*

Résumé : The Heisenberg algebra plays a vital role in many areas of mathematics and physics. In this talk, we will give an overview of current research into its categorification, and discuss applications to various areas of mathematics. We will begin with an exposition of a categorification of the Heisenberg algebra in terms of planar diagrams which is closely modeled on the representation theory of wreath product algebras. We will then explain some applications of this categorification in the field of symmetric functions. Finally, we will discuss work in progress on higher level Heisenberg categorification and connections to categorification of Kac-Moody algebras.

Paul VOUTIER : *Arithmetic properties of elliptic division polynomials and divisibility sequences.*

Résumé : Binary linear recurrences such as the Lucas sequences, which have played an important role in number theory since its earliest days, are associated with twists of the multiplicative group, $\mathbb{G}_m$.

Similarly, one can associate sequences to other algebraic groups. An example is the algebraic group $E(\mathbb{Q})$ where $E/\mathbb{Q}$ is an elliptic curve. If $E(\mathbb{Q})$ is of positive rank, we take a non-torsion point, $P \in E(\mathbb{Q})$, put $[n]P = A_n/B_n^2$ with $(A_n, B_n) = 1$, $B_n \geq 1$ and consider $\{B_n\}_{n \geq 0}$. This sequence is called an *elliptic divisibility sequence* and is closely related to the so-called *elliptic division polynomials*, Ψ_n.

These sequences provide us with much important information about the arithmetic geometry of the underlying curve, E and the point, P.

In this talk, we present results on some arithmetic properties of these objects – in particular, on explicit valuations of the elliptic division polynomials and on primitive divisors of elliptic divisibility sequences – and discuss what these results tell us about the associated curves.

This is joint work with Minoru Yabuta.