

GRUPE DE TRAVAIL

“INTRODUCTION AUX SCHÉMAS EN GROUPES AFFINES ET À LEURS ALGÈBRES DE LIE”

PROJET ANR GEOLIE, 2016/2017

Les schémas en groupes affines au dessus d’un anneau permettent de donner un sens à la notion de familles de groupes paramétrés. Un exemple simple est celui d’un seul paramètre t où l’on considère l’équation

$$X^2 - tY^2 = 1.$$

En effet on peut multiplier deux solutions (x, y) et (x', y') selon la règle $(x, y).(x', y') = (xx' - ty'y', xy' + x'y)$ et on dispose aussi d’un inverse $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Ce schéma en groupes est déjà un objet intéressant, on peut le voir en effet comme un objet de géométrie complexe (en prenant les solutions complexes) ou de géométrie arithmétique (en prenant les solutions entières). On peut s’intéresser à ses représentations linéaires, à son algèbre de Lie, à ses automorphismes, aux objets ressemblant fortement du point de vue des topologies de Grothendieck (appelés formes), etc...

La principale référence sur ce thème est le livre de Demazure-Gabriel [DG] que nous suivrons aussi à travers d’autres références [G, M, Wa]. Le groupe de travail ne traite que de généralités et n’abordera presque pas la théorie des schémas en groupes réductifs de Demazure-Grothendieck [SGA3, Co]. Nous nous intéresserons cependant aux techniques de déformation, notamment à des énoncés de lissité de sous-schémas et de points fixes; un aboutissement sera un résultat récent de lissité pour les “attracteurs” de Drinfeld-Gaitsgory [DGa] pour les actions de groupes à un paramètre qui généralise un résultat de Bialynicki-Birula [BB].

Les prérequis sont des connaissances de base de géométrie algébrique affine (sous-schémas, topologie de Zariski), d’algèbre commutative (localisation, platitude, noethérianité, formes différentielles).

RÉFÉRENCES

- [BB] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. **98** (1973), 480–497.
- [BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **21** (1990), Springer.
- [Br] S. Brochard, *Topologies de Grothendieck, descente, quotients, Autour des schémas en groupes, vol. I*, Panoramas et Synthèses, Soc. Math. France 2014.
- [CGP] B. Conrad, O. Gabber, G. Prasad, *Pseudo-reductive groups*, Cambridge University Press, second edition.
- [CF] B. Calmès, J. Fasel, *Groupes classiques, Autour des schémas en groupes, vol II*, Panoramas et Synthèses (2016).
- [CR] P.-E. Chaput, M. Romagny, *On the adjoint quotient of Chevalley groups over arbitrary base scheme*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), 673–704.
- [Co] B. Conrad, *Reductive group schemes*, in *Autour des schémas en groupes, vol. I*, Panoramas et Synthèses, Soc. Math. France 2014.
- [DG] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, North-Holland (1970).
- [DGa] V. Drinfeld, D. Gaitsgory, *On a theorem of Braden*, Transform. Groups **19** (2014), 313–358.
- [G] P. Gille, *Introduction to reductive group schemes over rings*, [lien](#).
- [Kn] M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **294** (1991), Springer.
- [J] C.J. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, 2-nd edition, AMS.
- [LLR] Q. Liu, D. Lorenzini, M. Raynaud, *Néron models, Lie algebras, and reduction of curves of genus one*, Invent. Math. **157** (2004), 455–518.
- [Mg1] B. Margaux, *Vanishing of Hochschild cohomology for affine group schemes and rigidity of homomorphisms between algebraic groups*, Documenta Mathematica **14** (2009), 653–672.
- [Mg2] B. Margaux, *Smoothness of limit functors*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **125** (2015), 161–165.
- [M] J. Milne, *Basic theory of affine group schemes*, [lien](#).
- [O] J. Oesterlé, *Schémas en groupes de type multiplicatif*, Autour des schémas en groupes. Vol. I, 63–91, Panor. Synthèses **42/43**, Soc. Math. France, Paris, 2014.
- [S] J.P. Serre, *Groupe de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Publications Mathématiques de l’IHÉS **34** (1968), 37–52.
- [SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l’I.H.E.S., 1963-1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 151–153. Springer (1970).
- [Sp] T.A. Springer, *Linear algebraic groups*, Second edition (1998), Birkhäuser.
- [Stacks] Stacks project, [lien](#).
- [Th] R. W. Thomason, *Equivariant resolution, linearization, and Hilbert’s fourteenth problem over arbitrary base schemes*, Adv. in Math. **65** (1987), 16–34.
- [Wa] W. C. Waterhouse, *Introduction to Affine Group Schemes*, Graduate Texts in Mathematics, **66**, Springer-Verlag 1979.

Calendrier prévisionnel des exposés
(à l'ICJ Braconnier).

Jeudi 6 octobre, 10h30-12h, salle séminaire 1, sous-sol: Philippe GILLE

Schémas en groupes, exemples des groupes vectoriels et diagonalisables.

[O]

Jeudi 13 octobre, 10h30-12h, salle séminaire 1, sous-sol: Philippe GILLE

Suites exactes de foncteurs en groupes, produits semi-directs, restriction des scalaires.

Jeudi 20 octobre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h : Benoit DEJONCHEERE

Représentations linéaires, platitude.

Jeudi 10 novembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h: Niels BORNE

Morphismes lisses en géométrie algébrique

[BLR, §2.2]

Jeudi 17 novembre, salle séminaire 2, sous-sol, 10h30-12h: Marion JEANNIN

Fibrés tangents, algèbres de Lie I

Jeudi 24 novembre, salle séminaire 2, sous-sol, 10h30-12h: Seidon ALSAODY

Algèbres de Lie II

Jeudi 1 décembre, salle séminaire 2, sous-sol, 10h30-12h:

Alexandre LOURDEAUX

Points fixes, centralisateurs, normalisateurs

[Br]

Jeudi 8 décembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h: Coline WIATROWSKI

Cohomologie de Hochschild I

Jeudi 15 décembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h: NGUYEN Manh Tu

Cohomologie de Hochschild II

Jeudi 12 janvier, salle séminaire 2, sous-sol, 10h30-12h:

Alexandre LOURDEAUX

Lissité des points fixes, applications

[CGP, A.8.10]

Jeudi 19 janvier, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:

Philippe GILLE

Attracteurs, applications

[CGP, §2.1], [Mg2] , [DGa, §1].
