

## GRUPE DE TRAVAIL

### “INTRODUCTION AUX SCHÉMAS EN GROUPES RÉDUCTIFS”

PROJET ANR GEOLIE, 2017/2018

Faisant suite à celui de l’année dernière, ce groupe de travail se propose de présenter le début de la théorie des schémas en groupes réductifs de Demazure-Grothendieck [SGA3]. Il s’agit d’une généralisation au dessus d’un anneau  $R$  arbitraire (ou plus généralement d’un schéma) de la théorie des groupes réductifs sur un corps algébriquement clos [Ch, Sp]. Il s’agit par exemple du cas du schéma en groupe linéaire  $GL(M)$  d’un  $R$ -module projectif  $M$  de type fini, ou du groupe spécial orthogonal  $SO(q, M)$  pour une forme quadratique  $q$  non singulière.

Une première étape très importante est l’étude des sous-tores des schémas de groupes réductifs, de leur conjugaison locale pour la topologie étale. Cela amène aux systèmes de racines, aux sous-schémas en groupes de Borel dans ce cadre. Plus loin, nous aborderons les deux points fondamentaux: l’existence et l’unicité des groupes de Chevalley sur  $\mathbb{Z}$  et le problème de classification des schémas en groupes réductifs.

Nous suivrons principalement les exposés originaux de [SGA3] et le point de vue “dynamique” de Conrad pour la construction des sous-groupes radiciels attachés aux racines [Co]. Ceci étant, la thèse de Demazure [D] présente les principales définitions et les principaux résultats de la théorie.

Les prérequis sont des connaissances de base de géométrie algébrique affine (sous-schémas, topologie de Zariski), d’algèbre commutative (localisation, platitude, noethérianité, formes différentielles) et le début de la théorie des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos.

## RÉFÉRENCES

- [Br] S. Brochard, *Topologies de Grothendieck, descente, quotients, Autour des schémas en groupes, vol. I*, Panoramas et Synthèses, Soc. Math. France 2014.
- [Ch] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples*, Springer.
- [CGP] B. Conrad, O. Gabber, G. Prasad, *Pseudo-reductive groups*, Cambridge University Press, second edition.
- [CF] B. Calmès, J. Fasel, *Groupes classiques, Autour des schémas en groupes, vol II*, Panoramas et Synthèses (2016).
- [Co] B. Conrad, *Reductive group schemes*, in *Autour des schémas en groupes, vol. I*, Panoramas et Synthèses, Soc. Math. France 2014. [lien](#).
- [D] M. Demazure, *Schémas en groupes réductifs*, Bulletin de la Société Mathématique de France **93** (1965), 369-413. [lien](#).
- [DG] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, North-Holland (1970).
- [G1] P. Gille, *Introduction to reductive group schemes over rings*, [lien](#).
- [G2] P. Gille, *Sur la classification des schémas en groupes semi-simples*, “Autour des schémas en groupes, III”, Panoramas et Synthèses 47 (2015), 39-110. [lien](#).
- [Kn] M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **294** (1991), Springer.
- [J] C.J. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, 2-nd edition, AMS.
- [M] J. Milne, *Basic theory of affine group schemes*, [lien](#).
- [O] J. Oesterlé, *Schémas en groupes de type multiplicatif*, Autour des schémas en groupes. Vol. I, 63-91, Panoramas et Synthèses **42/43**, Soc. Math. France, Paris, 2014.
- [PY] G. Prasad, J.-K. Yu, *On quasi-reductive group schemes*, with an appendix by Brian Conrad, J. Algebraic Geom. **15** (2006), 507-549.
- [SGA3] *Séminaire de Géométrie algébrique de l’I.H.E.S., 1963-1964, schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lecture Notes in Math. 151-153. Springer (1970).
- [Sp] T.A. Springer, *Linear algebraic groups*, Second edition (1998), Birkhäuser.
- [Stacks] Stacks project, [lien](#).
- [Wa] W. C. Waterhouse, *Introduction to Affine Group Schemes*, Graduate Texts in Mathematics, **66**, Springer-Verlag 1979.

**Calendrier prévisionnel des exposés**  
(à l'ICJ Braconnier).

**Jeudi 14 septembre, 10h30-12h, salle Fokko du Cloux:** Philippe GILLE

*Schémas en groupes réductifs, un premier aperçu.*

**Jeudi 28 septembre, 10h30-12h, salle Fokko du Cloux:** Benoît LOISEL

*Groupes algébriques affines lisses sur un corps algébriquement clos, tores maximaux*

**Jeudi 5 octobre, salle 125, 10h30-12h :** Seidon ALSAODY

*Topologies de Grothendieck*

**Jeudi 12 octobre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:** Philippe GILLE

*Espaces homogènes, quotients.*

**Jeudi 19 octobre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:** Benoît DEJONCHEERE

*Schémas en groupes de type multiplicatif, I*

**Jeudi 26 octobre, salle Fokko du Cloux , 10h30-12h:** Benoît DEJONCHEERE

*Schémas en groupes de type multiplicatif, II*

**Jeudi 9 novembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:** Olivier TAÏBI

*Le groupe spécial orthogonal*

**Jeudi 16 novembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:** Marion JEANNIN

*Racines, coracines, I*

**Jeudi 23 novembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:** Sophie MOREL

*Racines, coracines, II*

**Jeudi 30 novembre, salle 112, 10h30-12h:**

Benoît LOISEL et Philippe GILLE

*Groupes déployés, groupes quasi-déployés, automorphismes*

**Jeudi 7 décembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:** Philippe GILLE

*Sous-groupes paraboliques*

**Jeudi 14 décembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:**

Alexandre LOURDEAUX

*Énoncés spécifiques à la caractéristique nulle*

**Jeudi 21 décembre, salle Fokko du Cloux, 10h30-12h:**

*Sur la classification des schémas en groupes semi-simples*

---