Ex 12 On donne ici à chaque fois une primitive. Si F est une primitive de f, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des $F+c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

(a) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ entier, donc admet des primitives sur tout intervalle.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int 1dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \arctan(x)$$

(b) $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ a deux racines réelles de multiplicité 1 : 1 et 2. En particulier, $x \mapsto \dfrac{x}{x^2-3x+2}$ admet des primitives sur les intervalles $]-\infty, 1[$, $]1,2[$ et $]2,+\infty[$. De plus, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{X}{X^2-3X+2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} \tag{1}$$

Multipliant (1) par $X-1$ et évaluant en 1, on obtient $-1 = a$.

Multipliant (1) par $X-2$ et évaluant en 2, on obtient $2 = b$.

Finalement,

$$\frac{X}{X^2-3X+2} = \frac{-1}{X-1} + \frac{2}{X-2}$$

d'où

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{2}{x-2}dx = -\ln(|x-1|) + 2\ln(|x-2|). \tag{2}$$

(c) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ entier, donc admet des primitives sur tout intervalle.

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x/2)^2+1}dx = \frac{1}{2}\arctan(x/2). \tag{3}$$

(d) $X^2 - 4X + 9 = (X-2)^2 + 5$ donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ entier et admet des primitives sur tout intervalle.

$$\int \frac{1}{x^2-4x+9}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+5}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x/\sqrt{5}-2/\sqrt{5})^2+1}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(x/\sqrt{5}-2/\sqrt{5}). \tag{4}$$

(e) La fonction $x \mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2023}\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Elle admet donc des primitives sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0,+\infty[$. On a de plus

$$\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2023}\frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{2024}\int 2024\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2023}\frac{-1}{x^2}dx = \frac{-1}{2024}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2024}.$$

(f) $x \mapsto \frac{x^3}{x^4+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. De plus,

$$\int \frac{x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}dx = \frac{1}{4}\ln(1+x^4).$$

Ex 13

(a)

$$\int_0^1 xe^{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[e^{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{e^2-e}{2}.$$

(b)

$$\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int_1^e \ln'(x)\sin'(\ln x)dx = [\sin(\ln x)]_1^e = \sin(1).$$

(c) On fait des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}dx &= \left[-(x^3+1)e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -3x^2e^{-x}dx = -2e^{-1}+1+\int_0^1 3x^2e^{-x}dx \\ &= 1-2e^{-1}+\left[-3x^2e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -6xe^{-x}dx = 1-5e^{-1}+\int_0^1 6xe^{-x}dx \\ &= 1-5e^{-1}+\left[-6xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -6e^{-x}dx = 1-11e^{-1}-\int_0^1 -6e^{-x}dx \\ &= 1-11e^{-1}+6\left[-e^{-x}\right]_0^1 = 7-17e^{-1}.\end{aligned}$$

(d)

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_0^{\pi/2}\cos'(x)\frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos^2(x)}dx.$$

Il suffit donc de trouver une primitive de $u \mapsto \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$. Mais

$$\frac{1-X^2}{1+X^2} = \frac{2-(1+X^2)}{1+X^2} = \frac{2}{1+X^2} - 1$$

d'où

$$\int \frac{1-u^2}{1+u^2}du = 2\arctan(u) - u$$

et

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = -\left[2\arctan(\cos x)-\cos x\right]_0^{\pi/2} = 2\arctan(1)-1 = \frac{\pi}{2}-1.$$

Remarque. Cela revient exactement à faire le changement de variable $u = \cos(x)$.

(e)

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx &\overset{x=\cos\theta}{=} \int_{\pi/3}^0 \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}(-\sin\theta)d\theta = \int_0^{\pi/3}\frac{|\sin\theta|}{\cos^2\theta}\sin\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta \quad \text{car } \sin\theta \geq 0 \text{ pour } \theta \in [0,\pi/3] \\ &= \int_0^{\pi/3}\frac{1}{\cos^2\theta} - 1d\theta = [\tan\theta - \theta]_0^{\pi/3} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$