Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est une suite divergente qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.

1. Deux preuves différentes pour montrer que cette suite est divergente :

   (a) On peut repartir de la définition de la convergence et faire un raisonnement par l'absurde. Supposons en effet que (u_n) converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$. Alors :

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon \tag{1}$$

   Ce qu'il faut comprendre comme : "si je me donne une distance $\varepsilon > 0$ aussi petite que je veux, il y aura forcement un indice $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) seront proches de l d'une distance inférieure à ε". On voit bien que c'est impossible ici : la partie paire de la suite part à l'infini, donc même si l est très grand, il est fixé et la partie paire de la suite s'éloignera de l. Utilisant cette idée, on peut montrer proprement que (1) est absurde. Prenons par exemple $\varepsilon = 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geq N, \quad |u_n - l| \leq 1.$$

   Soit $n \geq N$. Alors par l'inégalité triangulaire :

   $$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + |l|.$$

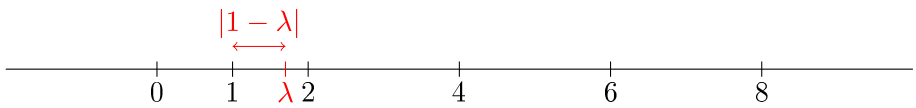
   En particulier, pour tout $n \geq N/2$, $2n \leq 1 + |l|$, ce qui est absurde (prendre par exemple $n = \max(\lceil N/2 \rceil, 1 + \lceil (1 + |l|)/2 \rceil)$).

   (b) On peut utiliser le résultat suivant : "si une suite converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$, toutes ses sous-suites convergent vers l". Ici si on suppose $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, on en déduit $2n = u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, ce qui est absurde.

2. Il est clair que (u_n) admet au moins une valeur d'adhérence (qui est 1) puisque $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. Il reste à montrer que 1 est la seule valeur d'adhérence. On va donner deux preuves également.

   (a) Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, tel que λ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Cela signifie qu'une sous suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'approche arbitrairement près de λ, ce qui semble impossible d'après le dessin : les termes d'indice pair seront rapidement très loins de λ, et les termes d'indice impair (égaux à 1) sont au mieux à une distance $|1 - \lambda|$ de λ.
   Notons $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite qui converge vers λ. Posons $\varepsilon = |1 - \lambda|/2$. Il existe alors $K \in \mathbb{N}$ tel que :

   $$\forall k \geq K, \quad |u_{n_k} - \lambda| \leq \varepsilon.$$

   Soit $k \geq K$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|u_{n_k}| \leq \varepsilon + |\lambda|.$$

Or, pour tout $k \geq 1 + \lfloor \varepsilon + |\lambda| \rfloor$, on a $n_k \geq k > |\lambda| + \varepsilon$. Ainsi :

$$\forall k \geq \max(K, 1 + \lfloor \varepsilon + |\lambda| \rfloor), \quad u_{n_k} = 1.$$

En particulier,

$$|1 - \lambda| \leq \varepsilon = \frac{|1 - \lambda|}{2}$$

ce qui est absurde car $|1 - \lambda| \neq 0$.

(b) Soit λ une valeur d'adhérence de (u_n), et (u_{n_k}) une sous suite telle que $u_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Considérons l'ensemble $\{n_k, \quad k \in \mathbb{N}\}$. Il est infini, donc contient une infinité de termes pairs ou une infinité de termes impairs (évidemment, ce n'est pas un "ou" exclusif !).

i. Supposons que l'ensemble $\{n_k, \quad k \in \mathbb{N}\}$ contienne une infinité de termes pairs. On extrait ces termes pairs : on obtient alors une sous-suite $(u_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n_{k_i}} \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$ (car la seule valeur d'adhérence d'une suite convergente est la limite de la suite), et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_{n_{k_i}} = n_{k_i}$ (car tous les indices de la sous-suite sont pairs !). Ce qui est absurde puisque $n_{k_i} \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

ii. Ainsi, l'ensemble $\{n_k, \quad k \in \mathbb{N}\}$ contient une infinité de termes impairs. En procédant de même que précédemment, on obtient une sous-suite $(u_{n_{k_i}})$ telle que $u_{n_{k_i}} \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_{n_{k_i}} = 1$. Donc par unicité de la limite, $\lambda = 1$.