ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES SUR DES DOMAINES MINCES TRIDIMENSIONNELS ET ESPACES ANISOTROPES

DRAGOŞ IFTIMIE

Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont les suivantes:

$$\textit{(N-S)}\begin{cases} \partial_t u + u\cdot\nabla u - \nu\Delta u &= -\nabla P \text{ pour } (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\Omega,\\ \operatorname{div} u(t,\cdot) &= 0 \text{ pour } (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\Omega,\\ u|_{t=0} &= u_0 \text{ sur } \Omega.\end{cases}$$

Ici, $u(t,\cdot)$ est un champ de vecteurs sur Ω, u_0 est la donnée initiale et $P:\mathbb{R}_+\times\Omega\to\mathbb{R}$ est la pression. Le domaine Ω sera $\mathbb{R}^d$ ou bien $\mathbb{R}^2\times]0,2\pi\varepsilon[$, ou bien le tore avec une minceur ε dans la troisième direction $\mathbb{T}_\varepsilon=]0,2\pi[\times]0,2\pi[\times]0,2\pi\varepsilon[$, $\varepsilon>0$. Le terme de force est supposé nul seulement par souci de simplicité; les théorèmes qu'on donne peuvent être énoncés avec un terme de force. L'étude mathématique rigoureuse des ces équations a été commencée par Leray [8]. Malheureusement, le problème de savoir si ces équations admettent des solutions globales pour toutes données initiales assez régulières reste non-résolu, sauf pour la dimension 2 où on sait qu'il existe une unique solution globale si la donnée initiale est de carré intégrable. Pour les dimensions supérieures ou égales à 3, on connaî t l'existence d'une solution globale faible non-unique pour des données initiales de carrés intégrables et l'existence d'une solution locale forte unique pour des données initiales assez régulières. Si, en plus de la régularité de la donnée initiale, on prend comme hypothèse la petitesse de celle-ci, alors la solution forte locale est en fait globale et le problème est résolu. Dans ce qui suit, on se propose d'améliorer cette condition de petitesse ainsi que la régularité de la donnée initiale.

Raugel, Sell [11], [12] ont eu l'idée d'utiliser les bonnes propriétés du système 2-dimensionnel pour trouver des bonnes propriétés pour le système 3-dimensionnel. Evidemment, ceci ne suffit pas pour démontrer que le système 3-dimensionnel est bien posé: on trouve seulement que les données initiales peuvent être choisies "grandes" si on travaille sur un domaine "mince". Les résultats de G. Raugel et R. Sell sont difficiles à énoncer, donc on donne une approximation seuleument. Ils se plaçent sur un domaine du type $\omega\times]0,\varepsilon[$, ω étant un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$, et ils considèrent plusieurs types de conditions aux limites; leurs meilleurs résultats s'énonçent sur le tore de minceur ε $\mathbb{T}_\varepsilon$ et ils démontrent qu'il existe une unique solution globale si l'on suppose que

$$\|Mu_0\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}\le C\varepsilon^{-\frac{5}{24}} \text{ et } \|(I-M)u_0\|_{H^1(\mathbb{T}_\varepsilon)}\le C\varepsilon^{-\frac{5}{48}}$$

ou

$$\|Mu_0\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}\le C\varepsilon^{-\frac{17}{32}},\ \left\|Mu_0^3\right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\le C\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

et
$$\|(I-M)u_0\|_{H^1(\mathbb{T}_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{8}},$$
où M est la projection sur l'espace des fonctions qui ne dépendent pas de la troisième variable et Mu_0^3 est la troisième composante de Mu_0.

L'idée de leur preuve est d'améliorer les constantes des inclusions de Sobolev en tenant compte de la minceur du domaine. Le même problème d'amelioration des inclusions de Sobolev sera abordé d'une autre manière dans ce travail. Au lieu d'utiliser des espaces de Sobolev classiques, on préfere introduire des espaces anisotropes afin de particulariser et séparer la régularité dans la troisième variable. Ceci nous permettra de calculer de manière *optimale* les constantes des inclusions de Sobolev en fonction de la minceur en la troisième variable. De plus, on pourra prendre des régularités minimales sur la donnée initiale, à savoir régularité L^2 sur la partie 2-dimensionnelle Mu et régularité $H^{\frac{1}{2}}$ sur le reste $(I-M)u$. Le prix à payer est que la nature des espaces qu'on utilise nous contraint à travailler sur des domaines sans frontières et qu'il faut refaire l'existence des solutions dans ces espaces inhabituels. Il se trouve que ces espaces anisotropes ont un intêret même sur des domaines qui ne sont pas minces. Ils permettent de prendre des données initiales avec toute la régularité concentrée sur la troisième variable. Comme il n'y a pas de régularité requise (autre que L^2) dans les deux premières variables, on est en droit d'attendre que nos espaces ne soient pas inclus dans d'autres espaces de faible régularité utilisés comme espaces de données initiales pour Navier-Stokes. C'est effectivement le cas, comme la proposition 2 le montre.

L'utilisation des espaces anisotropes impliquera l'obtention de l'existence et l'unicité globale des solutions dés que
$$\|(I-M)u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}_\varepsilon)} \exp\left(\frac{\|Mu_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{C\nu^2}\right) \leq C\nu.$$
Cette inégalité peut être interprété de plusieurs manières. Elle est vérifiée si
$$\|(I-M)u_0\|_{H^1(\mathbb{T}_\varepsilon)} \exp\left(\frac{\|Mu_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{C\nu^2}\right) \leq C\nu\varepsilon^{-\frac{1}{2}},$$
ou, si pour tout $\alpha \geq 0$,
$$\|Mu_0\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq C\nu\Big(1+\sqrt{-\alpha\log\varepsilon}\Big) \text{ et } \|(I-M)u_0\|_{H^1(\mathbb{T}_\varepsilon)} \leq C\nu\varepsilon^{-\frac{1}{2}+\alpha}.$$

Enfin, si l'on a besoin d'un Mu_0 plus grand, il suffit de prendre M_0 aussi grand qu'on veut, le désavantage étant que $(I-M)u_0$ doit être supposé exponentiellement petit.

Les méthodes de G. Raugel et R. Sell consistent à appliquer les projections M et $I-M$ à l'équation et à faire des estimations d'énergie sur les deux équations obtenues. Ils démontrent d'abord que $(I-M)u$ devient rapidement petit et ensuite ils utilisent ceci pour conclure que la solution existe globalement. Une philosophie différente sera à la base de nos démonstrations: on ne va essentiellement utiliser que l'équation sur $(I-M)u$ et ceci en localisant en fréquence et en faisant des estimations d' ´énergie sur ces localisations. L'idée de la petitesse de $(I-M)u$ n'apparaî t donc pas. En plus, on obtient que $(I-M)u_0$ peut être pris considérablement plus gros que Mu_0, ce qui n'est pas vrai pour les résultats de G. Raugel et R. Sell. Mentionnons aussi que les techniques de nos preuves sont inspirés des travaux de Chemin [3] et Chemin, Lerner [4]. Elles contiennent, en particulier, l'idée d'intégrer en temps avant de prendre les normes en espace.

Enfin, citons les travaux de Temam, Ziane [14], [15], où une grande variété de conditions aux limites et des domaines courbes sont considérés.

1. Etude des espaces anisotropes

Dans cette partie on va introduire les epaces anistropes et on étudiera leurs propriétés. Afin de se placer dans une situation commune au cas des domaines minces et au cas des domaines quelconques (mais sans frontière), on commence par prendre des fonctions périodiques sur $[0, 2\pi]^3$, tout en sachant que ce travail peut être formulé dans $\mathbb{R}^3$, par exemple. Ce sera d'ailleurs cette formulation qu'on va utiliser au moment des comparaisons avec les autres espaces de faible régularité utilisés dans la théorie des équations de Navier-Stokes. Mentionnons aussi que des théorèmes de produit, mais dans des cas sur-critiques, ont été démontrés par Sablé-Tougeron [13] pour des espaces légéremment modifiés, les espaces de Hörmander. Les applications qu'on leur trouvait étaient pour des problèmes de régularité à la frontière.

On note par M la projection orthogonale dans L^2 (ainsi que dans tout les epaces de Sobolev) sur les champs de vecteurs qui de dépendent pas de la troisième variable. Cette projection est donnée par

$$Mu(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\ dx_3.$$

On introduit la norme

$$|u|_{s,s'} = \left\| (1 + |n'|)^s (1 + |n_3|)^{s'} |u_n| \right\|_{\ell^2},$$

et l'espace normé correspondant $H^{s,s'}$ Il est clair que cette espace possède la régularité de Sobolev s dans (x_1, x_2) et la régularité de Sobolev s' dans la troisième variable x_3. On verra plus tard que l'espace $H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}$, $0 < \delta < 1$ peut être pris comme espace de données initiales pour Navier-Stokes. Il est très tentant de prendre $\delta = 0$ car alors la régularité en (x_1, x_2) est minimale, c'est à dire L^2. Malheureusement, ceci n'est pas possible dans le cadre $H^{s,s'}$, car la régularité dans la troisième variable devient $H^{\frac{1}{2}}$, donc on est amené à faire des produits de fonctions 1-dimensionnelles qui sont $H^{\frac{1}{2}}$. Or, on sait très bien que, en dimension 1, l'espace $H^{\frac{1}{2}}$ n'est pas une algèbre. Ceci nous suggère de remplacer la régularité de Sobolev par une autre régularité du même niveau et qui a la propriété d'être une algèbre. Cette régularité sera celle de Besov $B^{\frac{1}{2}}_{2,1}$. Il faut donc construire des espaces avec la régularité H^s dans (x_1, x_2) et la régularité $B^t_{2,1}$ en x_3. Pour faire ceci, on va utiliser une décomposition dyadique double, c'est à dire qu'on localise séparément les fréquences

(ξ_1, ξ_2) et ξ_3. Soit u une fonction périodique avec la série de Fourier

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} u_n \exp(in \cdot x), \;\; u_n \in \mathbb{C}.$$

Pour $q \geq 0$ et $q' \geq 0$, on définit

$$\begin{aligned}
S'_q u &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} u_n \exp(in \cdot x) \chi(\frac{|n'|}{2^q}) \\
S''_q u &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} u_n \exp(in \cdot x) \chi(\frac{|n_3|}{2^q}) \\
\Delta'_q &= S'_q - S'_{q-1}, \Delta'_0 = S'_0 \\
\Delta''_q &= S''_q - S''_{q-1}, \Delta''_0 = S''_0 \\
S_{q,q'} &= S'_q S''_{q'} \\
\Delta_{q,q'} &= \Delta'_q \Delta''_{q'} \\
S_q &= S_{q,q} \\
\Delta_q &= S_q - S_{q-1}, \Delta_0 = S_0,
\end{aligned}$$

où $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction à support dans $]-1,1[$ et égale à 1 près de $[0, \frac{1}{2}]$. Avec cette définiton on peut introduire la norme

$$|u|_{HB^{s,s'}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| 2^{qs+q's'} \left\| \Delta_{q,q'} u \right\|_{L^2} \right\|_{\ell^{2,1}},$$

où la norme $\|\cdot\|_{\ell^{2,1}}$ signifie la norme ℓ^1 en q' d'abord et la norme ℓ^2 en q ensuite. L'espace correspondant est noté par $HB^{s,s'}$.

Remarquons que

$$|u|_{s,s'} \sim \left\| 2^{qs+q's'} \left\| \Delta_{q,q'} u \right\|_{L^2} \right\|_{\ell^2}.$$

Un outil important dans l'études des espaces $H^{s,s'}$, $HB^{s,s'}$ est le lemme de Littlewood-Paley suivant:

Lemme 1. *Si u est une fonction périodique sur $[0, 2\pi]^3$ telle que*

$$\operatorname{supp} \hat{u} \subset \Big\{ \xi \in \mathbb{R}^3; \;\; |\xi'| < \lambda_1, |\xi_3| < \lambda_2 \Big\},$$

$1 \leq a_1 \leq b_1 \leq \infty, \;\; 1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \infty \;\; \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *est un multi-index, alors*

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^{b_1,b_2}} \leq C \lambda_1^{\alpha_1+\alpha_2+2(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1})} \lambda_2^{\alpha_3+(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{b_2})} \|u\|_{L^{a_1,a_2}},$$

où la norme $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ signifie la norme L^q en x_3 d'abord et la norme L^p en (x_1, x_2) ensuite.

Les résultats de base sur les espaces anisotropes sont les théorèmes de produit. Ils montrent que la perte de régularité se fait séparément sur les variables (x_1, x_2) et x_3 et cette perte est celle qu'on a classiquement en dimension 2 (perte 1), respectivement 1 (perte $\frac{1}{2}$). Par conséquent, on a une perte globale de $\frac{3}{2}$, c'est à dire la perte optimale en dimension 3; ceci impliquera qu'on peut prendre la régularité minimale sur w_0, c'est à dire une régularité de niveau $\frac{1}{2}$. On peut aussi faire le produit de deux fonctions, dont l'une est indépendante de la troisième variable. Dans ce cas, le théorème de produit affirme que la perte ne se produit qu'en la variable (x_1, x_2), et cette perte est celle correspondante à la dimension 2. En d'autres termes, quand on fait le produit d'une fonction 2-dimensionnelle avec une fonction 3-dimensionnelle, la perte est celle de la dimension 2 et non pas celle de la dimension 3. Ceci est très important, c'est ce qu'il va nous permettre de prendre la régularité minimale sur v_0, c'est à dire L^2. Enfin, le théorème des produits sur les espaces $HB^{s,s'}$ montre que la propriété d'algèbre réquise est vérifiée: on peut faire le produit de deux fonctions $HB^{s,\frac{1}{2}}$ sans perdre de la régularité inutilement. Les théorèmes suivants sont vrais:

Théorème 1. *Soient* $u \in H^{s,s'}$, $v \in H^{t,t'}$ *tels que* $s < 1$, $t < 1$, $s + t > 0$, $s' < \frac{1}{2}$, $t' < \frac{1}{2}$ *et* $s' + t' > 0$. *Alors* $uv \in H^{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}}$ *et*

$$|uv|_{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}} \leq C|u|_{s,s'}|v|_{t,t'}.$$

Théorème 2. *Soient* $v \in H^s(\mathbb{T}^2)$, $w \in H^{t,t'}$ *tels que* $s < 1$, $t < 1$, $s + t > 0$. *Alors* $vw \in H^{s+t-1,t'}$ *et*

$$|vw|_{s+t-1,t'} \leq C|v|_s|w|_{t,t'}.$$

Théorème 3. *Soient* $u \in HB^{s,s'}$, $v \in HB^{t,t'}$ *tels que* $s < 1$, $t < 1$, $s + t > 0$,$s' \leq \frac{1}{2}$, $t' \leq \frac{1}{2}$, $s' + t' > 0$. *Alors* $uv \in HB^{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}}$ *et*

$$|uv|_{HB^{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}}} \leq C|u|_{HB^{s,s'}}|v|_{HB^{t,t'}}.$$

Théorème 4. *Soient* $v \in H^s(\mathbb{T}^2)$, $w \in HB^{t,t'}$ *tels que* $s < 1$, $t < 1$, $s + t > 0$. *Alors* $vw \in HB^{s+t-1,t'}$ *et*

$$|vw|_{HB^{s+t-1,t'}} \leq C|v|_s|w|_{HB^{t,t'}}.$$

Idée de la preuve du théorème 1. La démonstration immites l'argument classique dans les epaces de Sobolev mais séparément en les variables (x_1, x_2) et x_3. La modalité pratique est l'introduction d'une décomposition en paraproduit et reste analogue à celle de Bony [1], mais dans deux directions indépendantes. On rappelle la décomposition de Bony:

$$uv = T(u, v) + R(u, v) + \widetilde{T}(u, v),$$

où

$$T(u,v) = \sum_q S_{q-1}u \ \Delta_q v,$$
$$R(u,v) = \sum_{|p-q|\le 1} \Delta_p u \Delta_q v,$$
$$\widetilde{T}(u,v) = T(v,u).$$

Il est classique que, en dimension d, $T : H^s \times H^t \to H^{s+t-\frac{d}{2}}$ est bien définie et continue si $s < \frac{d}{2}$. La même chose est vraie pour R si $s+t > 0$ (voir [1], [5]). Ici on utilise l'analogue de cette décomposition

$$uv = (T' + R' + \widetilde{T}')(T'' + R'' + \widetilde{T}'')$$

où le produit est défini comme la somme de 9 termes. Il est facile de donner la définition de chaque terme, on le fait pour $T'R''$:

$$T'R''(u,v) = \sum_{i=-1}^{1} \sum_{p_1,p_2} S'_{p_1-1}\Delta'_{p_2} u \ \Delta'_{p_1}\Delta''_{p_2-i} v.$$

On démontre que chacun des termes est continu de $H^{s,s'} \times H^{t,t'}$ à valeurs dans $H^{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}}$ sous des hypothèses moins fortes qui se déduisent canoniquement des théorèmes de produit classiques. Pour le terme $T'R''$ par exemple, il suffit de supposer que $s < 1$ et $s'+t' > 0$. La preuve utilise des espaces L^p anisotropes et le lemme d'échantillonage 1 en séparant autant que possible les variables (x_1, x_2) et x_3. $\square$

Enfin, une dernière proposition nous montre comment éviter certains cas critiques au moment des estimations d'énergie.

Proposition 1. *Il existe une constante C telle que pour tous $v \in H^s(\mathbb{T}^2)$ et w tels que* $\operatorname{div} v = 0$*, $\nabla w \in H^{t,t'}$, $s < 2$, $t < 1$ et $s+t > 0$ il existe une suite $(a_{q,q'})$ telle que*

$$|< \Delta_{q,q'}(v \cdot \nabla w) | \Delta_{q,q'} w >| \ \le C a_{q,q'} 2^{-q(s+t-1)-q't'} |v|_s |\nabla w|_{t,t'} \|\Delta_{q,q'} w\|_{L^2},$$

avec $\|a_{q,q'}\|_{\ell^2} = 1$.

Des propositions similaires d'évitation de cas critiques sont démontrés dans Chemin [3] et Chemin, Lerner [4].

2. Le cas de l'espace entier

Le but de section est d'exhiber des espaces de données initiales de régularités aussi faibles que possible. Par espace de données initiales on comprend un espace tel qu'il existe une unique solution locale pour toute donnée initiale dans cet ensemble et une unique solution globale pour toute donnée initiale petite dans cet espace. Le meilleur résultat dans l'échelle des espaces de Sobolev est donné par Fujita,Kato [6]. Ils prouvent qu'on peut choisir les données initiales dans $H^{\frac{1}{2}}$. D'autres espaces qui contiennent $H^{\frac{1}{2}}$ ont étés trouvés: Cannone [2] et Planchon [9] travaillent avec les espaces $B_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$, $2 \le p < \infty$ et Kozono, Yamazaki

[7] trouvent que les espaces $\mathcal{N}_{p,q,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$, $1 \leq q \leq p < \infty$, $p > 3$ suffisent. La norme dans les espaces $\mathcal{N}_{p,q,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$ est donnée par

$$\|u\|_{\mathcal{N}_{p,q,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}} = \left\| 2^{(-1+\frac{3}{p})j} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{p}-\frac{3}{q}} \|\Delta_j u\|_{L^q(B(x_0,R))} \right\|_{\ell^\infty},$$

où $B(x_0, R)$ est la boule de centre x_0 et rayon R. Il est clair que $B_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}} = \mathcal{N}_{p,p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$. Il est intéressant de remarquer que tous ces espaces sont inclus dans C^{-1} et sont invariants par le changement d'échelle qui laisse invariant le système de Navier-Stokes: $u(t,x) \leftrightarrow \lambda u(\lambda t, \lambda^2 x)$.

Les méthodes employées dans ce travail sont différentes de celles utilisées par M Cannone, F. Planchon, H. Kozono, M. Yamazaki. Ils réduisent tous le problème à une équation intégrale et appliquent un théorème de point fixe en prouvant la continuité de l'opérateur bilinéaire qui provient du terme non linéaire. Ici, l'idée principale consiste à localiser en fréquence, à faire des estimations d'énergie sur ces localisations et d'en déduire une inégalité différentielle qui nous permet de conclure à l'aide du lemme de Gronwall.

On démontre les théorèmes suivants.

Théorème 5. *Considérons (N-S) dans $\mathbb{R}^3$. Si $0 < \delta < 1$ et $u_0 \in H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}$ alors il existe un temps T^* >0 et une unique solution de (N-S) sur $[0, T^*]$ qui appartient à*

$$L^4(]0,T^*[; H^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}})$$

et

$$L^\infty(]0,T^*[; H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}).$$

De plus, il existe une constante C telle que $\|u_0\|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta} < C\nu$ implique $T^* = \infty$.

On a un théorème analogue pour l'espace $HB^{0,\frac{1}{2}}$.

Théorème 6. *Considérons (N-S) dans $\mathbb{R}^3$. Si $u_0 \in HB^{0,\frac{1}{2}}$ alors il existe un temps T^* >0 et une unique solution de (N-S) sur $[0, T^*]$ qui appartient à*

$$L^4(]0,T^*[; HB^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})$$

et

$$L^\infty(]0,T^*[; HB^{0,\frac{1}{2}}).$$

De plus, il existe une constante C telle que $\|u_0\|_{HB^{0,\frac{1}{2}}} < C\nu$ implique $T^* = \infty$.

Il est facile voir que $HB^{0,\frac{1}{2}} \hookrightarrow C(\mathbb{R}_{x_3}; L^2(\mathbb{R}^2))$.

La proposition suivante fait la comparaison entre les théorèmes ci-dessus et les résultats déjà connus.

Proposition 2. *i) Si $0 < \delta < \frac{1}{2}$ et $p > \max\left(\frac{1}{\delta}, \frac{1}{1-\delta}\right)$ alors*

$$H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta} \hookrightarrow B_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}} \hookrightarrow C^{-1}.$$

ii)$H^{0,\frac{1}{2}} \not\subset C^{-1}$.
iii)Si $1 \leq q \leq p < \frac{3q}{2}$, $p > 3$, *alors* $HB^{0,\frac{1}{2}} \not\subset \mathcal{N}_{p,q,\infty}^{\frac{3}{p}-1}$ *donc* $HB^{0,\frac{1}{2}} \not\subset B_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$ $\forall\, 2 \leq p < \infty$.
iv)$HB^{0,\frac{1}{2}} \hookrightarrow C^{-1}$.

La propriété $i)$ montre les solutions du théorème 5 ont déjè été construites par Cannone [2], Planchon [9] et Kozono, Yamazaki [7]. Le point $ii)$ montre que l'espace $H^{0,\frac{1}{2}}$ est très intéressant comme espace de données initiales, mais on ne peut pas l'inclure dans nos résultats. Enfin, la propriété $iii)$ dit que l'espace $HB^{0,\frac{1}{2}}$ n'est inclus dans aucun des espaces de Kozono, Yamazaki au moins pour certains p et q. L'auteur ne sait pas si ceci reste vrai dans les autres cas.

3. Le cas périodique sans hypothèse de minceur

Le but de cette partie est de montrer que si l'on prend une petite perturbation d'une donnée initiale 2-dimensionnelle de carré intégrable, alors on obtient une donnée initiale qui génère une unique solution globale. On donne aussi une estimation de la taille de l'erreur. Il est clair maintenant pourquoi on a besoin d'équations périodiques; autrement une fonction 2-dimensionnelle de carré intégrable n'est pas de carré intégrable en tant que fonction 3-dimensionnelle, constante dans la troisième variable. Des résultats de stabilité ont déjà été démontrés par Ponce, Racke, Sideris,Titi [10] mais la norme de la perturbation n'est pas estimée et la partie 2-dimensionnelle est prise dans $H^1 \cap L^1$ et non pas dans L^2, l'hypothèse optimale. La raison de cette perte de regularité est que les espaces de Sobolev usuels ne sont pas bien adaptés pour faire le produit d'une fonction 2-dimensionnelle avec une fonction 3-dimensionnelle. Cette difficulté est évitée ici en utilisant les espaces anisotropes. Ces espaces sont en même temps plus grands que les espaces de Sobolev usuels, donc on obtient aussi des théorèmes plus généraux.

Considérons une donnée initiale u_0 qui s'écrit comme la somme d'une fonction 2-dimensionnelle v_0 et d'un reste w_0. On écrit le système de Navier-Stokes comme deux systèmes couplés; le système de Navier-Stokes 2-dimensionnel avec donnée initiale v_0 et le système sur w qui se déduit.

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v & = & -\nabla p' \\
\operatorname{div} v(t,\cdot) & = & 0 \\
v|_{t=0} & = & v_0
\end{array}
\right.
\tag{1}
$$

et

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\partial_t w + w \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v + v \cdot \nabla w - \nu \Delta w & = & -\nabla p'' \\
\operatorname{div} w(t,\cdot) & = & 0 \\
w|_{t=0} & = & w_0.
\end{array}
\right.
\tag{2}
$$

Comme v est 2-dimensionnel et comme les estimations d'énergie usuelles suffisent pour assurer l'unicité des solutions 2-dimensionnelles, il s'ensuit que l'équation sur v n'est pas importante. Donc seule l'équation sur w compte vraiment. C'est sur cette équation qu'on va appliquer les méthodes développées dans le cas de l'espace entier. On montre le théorème suivant.

Théorème 7. *Il existe une constante $C = C(\delta)$ telle que si la donnée initiale se décompose $u_0 = v_0 + w_0$, où v_0 et w_0 sont de moyenne et divergence nulle, $v_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$, $w_0 \in H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}$ et*

$$|w_0|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta} \exp\left(\frac{\|v_0\|_{L^2}^2}{C\nu^2}\right) < C\nu, \tag{3}$$

alors le système (N-S) admet une unique solution globale avec w dans

$$L^4(]0,\infty[;H^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}) \cap L^\infty(]0,\infty[;H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}),$$

où v, w sont les solutions des systèmes couplés (1) et (2). De plus, si on rénonçe à la condition de petitesse, on obtient alors une solution locale avec les mêmes propriétés.

Un théorème analogue est vrai dans le cadre des espaces $HB^{s,s'}$, c'est à dire si l'on prend v_0 de carré intégrable et $w_0 \in HB^{0,\frac{1}{2}}$.

Esquisse de la preuve. Dans ce qui suit on donne une idée de la preuve et on montre comment la condition de petitesse (3) apparaî t naturellement.

En appliquant $\Delta_{q,q'}$ à l'équation de w et en multipliant par $\Delta_{q,q'}w$ on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\Delta_{q,q'}w\|_{L^2}^2 + \nu\|\Delta_{q,q'}\nabla w\|_{L^2}^2 \leq C|\langle\Delta_{q,q'}(I-M)(w\cdot\nabla w)|\Delta_{q,q'}w\rangle|\\ + C|\langle\Delta_{q,q'}(v\cdot\nabla w)|\Delta_{q,q'}w\rangle| + C|\langle\Delta_{q,q'}(w\cdot\nabla v)|\Delta_{q,q'}w\rangle|.\end{aligned}$$

En sommant sur q, q', en utilisant la caractérisation des espaces $H^{s,s'}$ par couronnes dyadiques, les théorèmes de produits ainsi que la proposition 1 on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 &+ 2\nu|\nabla w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2\\ &\leq C|v|_1|\nabla w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta} + C|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}|\nabla w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2\\ &\leq \frac{C}{\nu}|v|_1^2|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 + C|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}|\nabla w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 + \frac{\nu}{2}|\nabla w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{d}{dt}|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 + \frac{3\nu}{2}|\nabla w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 \leq \frac{C}{\nu}|v|_1^2|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 + C|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}|\nabla w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2.$$

Supposons que

$$|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta} \leq \frac{\nu}{2C}.$$

Ceci entraî ne

$$\frac{d}{dt}|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 + \nu|\nabla w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 \leq \frac{C}{\nu}|v|_1^2|w|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2,$$

d'où, par Gronwall,

$$|w(t)|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 \leq |w_0|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta}^2 \exp\Big(\int_0^t \frac{C}{\nu}|v(\tau)|_1^2\, d\tau\Big).$$

Or, les estimations d'énergie classiques montrent que

$$\int_0^t |v(\tau)|_1^2 \, d\tau \leq \frac{C}{\nu} \|v_0\|_{L^2}^2,$$

ce qui conduit à

$$|w(t)|^2_{\delta,\frac{1}{2}-\delta} \leq |w_0|^2_{\delta,\frac{1}{2}-\delta} \exp\Big(\frac{C}{\nu^2}\|v_0\|^2_{L^2}\Big).$$

Par conséquent, si le terme de droite est assez petit, on peut en déduire que w_0 reste petit en norme $H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}$ pour tout temps. D'où l'existence globale de la solution forte. □

4. Le cas du tore mince

Le but de cette section est de faire l'étude asymptotique des équations de Navier-Stokes sur $\mathbb{T}_\varepsilon = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi\varepsilon]$ quand $\varepsilon \to 0$. Par étude asymptotique on comprend la démonstration de l'existence et de l'unicité globale des solutions pour des données initiales dans des ensembles optimaux, dont les diamètres devraient converger vers l'infini quand l'épaisseur converge vers 0. Pour faire ceci, il est naturel de travailler dans des espaces où la troisième variable est distinguée. Il apparaî t que les espaces anisotropes introduits sont de nouveau bien-adaptés. Afin d'avoir une dépendance optimale de ε des normes de w, il faut avoir de l'homogèneité dans la troisième direction, à savoir $Mw = 0$. Or, si ceci est vrai à l'instant initial, rien ne dit que ça reste vrai pour tout temps dans le cadre des systèmes (1), (2). C'est pour cette raison qu'il faut les remplacer par d'autres systèmes couplés. Ils s'obtiennent en notant $v = Mu$, $w = (I-M)u$ et en appliquant les projections M et $I - M$ à l'équation vérifiée par u.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v + v\nabla v + M(w\nabla w) - \nu\Delta v &=& \nabla p_1 \\ \text{div } v &=& 0 \\ v|_{t=0} &=& v_0 \ (= Mu_0) \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t w + v\nabla w + w\nabla v + (I-M)(w\nabla w) - \nu\Delta w &=& \nabla p_2 \\ \text{div } w &=& 0 \\ w|_{t=0} &=& w_0 \ (= Mw_0). \end{array} \right.$$

Afin d'avoir une dépendance optimale de ε, il faut travailler avec des normes homogènes. Il faut tout redéfinir canoniquement, afin d'obtenir des espaces "naturels". Dorénavant, toutes les constantes sont supposées indépendantes de ε. Pour une fonction périodique u qui s'écrit sous la forme

$$u(x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} u_n \exp\Big(i(n_1x_1 + n_2x_2 + \frac{n_3}{\varepsilon}x_3)\Big),$$

on redéfinit

$$\|u|_{s,s'} = \left\| u_n (1+|n'|)^s (\frac{n_3}{\varepsilon})^{s'} \right\|_{\ell^2},$$

$$Mu(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi\varepsilon} u(x)\; dx_3,$$

$$\Delta_{q,q'}u(x) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} u_n \exp\Big(i(n_1x_1+n_2x_2+\frac{n_3}{\varepsilon}x_3)\Big)\,\phi(\frac{|n'|}{2^q})\phi(\frac{|n_3|}{\varepsilon 2^{q'}}),$$

avec ϕ une fonction appropriée. La norme homogène $\|\cdot|_{s,s'}$ s'applique à des fonctions homogènes dans la troisième variable ($Mu = 0$) et est équivalente à la norme $|\cdot|_{s,s'}$.

Théorème 8. *Considérons les équations de Navier-Stokes sur le tore T_ε et $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$. Il existe une constante $C = C(\delta)$ indépendante de ε telle que si l'on considère une donnée initiale u_0 de moyenne et divergence nulle, $v_0 = Mu_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$, $w_0 = (I-M)u_0 \in H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}$ et*

$$\|w_0|_{\delta,\frac{1}{2}-\delta} \exp\left(\frac{\|v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{C\nu^2}\right) < C\nu,$$

alors les équations de Navier-Stokes ont une unique solution globale avec $w = (I-M)u$ appartenant à l'espace

$$L^4(]0,\infty[; H^{\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2}-\delta}) \cap L^\infty(]0,\infty[; H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}).$$

Un théorème analogue est vrai avec v_0 de carré intégrable et $w_0 \in HB^{0,\frac{1}{2}}$.

Idée de la preuve. La remarque essentielle est que les constantes des théorèmes de produits écrites en normes homogènes ne dépendent pas de ε. Comme les preuves qu'on donne reposent sur ces théorèmes de produit, il s'ensuit que la constante qui sort à la fin est indépendante de ε. C'est exactement l'énoncé du théorème.

Montrons que la constante du théorème 1 ne dépend pas de ε. Soit $u_\varepsilon(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{\varepsilon}u(x_1,x_2,\varepsilon x_3)$. Calculons la norme $\|\cdot|_{s,s'}$ de u en fonction de la norme $\|\cdot|_{s,s'}$(pour $\varepsilon = 1$) de u_ε. On a

$$\|u|_{s,s'} = \left\| u_n(1+|n'|)^s(\frac{n_3}{\varepsilon})^{s'} \right\|_{\ell^2} = \varepsilon^{-s'} \left\| u_n(1+|n'|)^s n_3^{s'} \right\|_{\ell^2} = \varepsilon^{-s'}\|u_\varepsilon|_{s,s'}.$$

Avec ces remarques, le théorème 1 écrit en norme homogène et pour $\varepsilon = 1$ implique trivialement celui pour ε arbitraire. En effet,

$$\|uv|_{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}} = \varepsilon^{\frac{1}{2}-s'-t'}\|(uv)_\varepsilon|_{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}} = \varepsilon^{-s'-t'}\|u_\varepsilon v_\varepsilon|_{s+t-1,s'+t'-\frac{1}{2}}$$

et

$$\|u|_{s,s'}\|v|_{t,t'} = \varepsilon^{-s'}\varepsilon^{-t'}\|u_\varepsilon|_{s,s'}\|v_\varepsilon|_{t,t'}.$$

D'où le résultat. □

Un corollaire immédiat dit

Corollaire 1. *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que si*

$$|w_0|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}_\varepsilon)} \exp\left(\frac{\|v_0\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{C\nu^2}\right) < C\nu,$$

alors les équations de Navier-Stokes admettent une unique solution globale avec donnée initiale u_0.

Preuve. Il résulte immédiatement de la remarque $H^{\frac{1}{2}} \subset H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}$. $\square$

Références

[1] J.-M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Annales de l'École Normale Supérieure, **14**, 1981, pp. 209-246.

[2] M. Cannone, *Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot éditeur, Arts et Sciences, 1995.

[3] J.-Y. Chemin, *Remarques sur l'existence globale pour le systeme de Navier-Stokes Incompressible*, SIAM J. Math. Anal. **23**, No.1, pp. 20-28, 1992.

[4] J.-Y. Chemin et N. Lerner, *Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes*, Journal of Differential Equations, **121**, 1995, pages 314–328.

[5] J.-Y. Chemin, *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque, **230**, 1995.

[6] H. Fujita et T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem I*, Archiv for Rationnal Mechanic Analysis, **16**, 1964, pp. 269-315.

[7] H. Kozono et M. Yamazaki, *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. in Partial Differential Equations, **19**, 1994, pp. 959-1014.

[8] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace*, Acta Mathematica, **63**, 1934, pages 193-248.

[9] F. Planchon, *Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$*, Ann. Inst. Henri Poincare, Anal. Non Lineaire, **13**, Nr. 3, 1996, pp. 319-336.

[10] G. Ponce, R. Racke, T.C. Sideris et E.S. Titi, *Global stability of large solutions to the 3D Navier-Stokes equations*, Comm. in Mathematical Physics, **159**, 1994, pages 329-341.

[11] G. Raugel et G. R. Sell, *Navier-Stokes equations on thin 3D domains. I: Global attractors and global regularity of solutions*, Journal of the A.M.S., **6**,1993, pages 503-568.

[12] G. Raugel et G. R. Sell, *Navier-Stokes equations on thin 3D domains. II: Global regularity of spatially periodic solutions*, Pitman Res. Notes Math., **299**, 1994, pages 205-247.

[13] M. Sablé-Tougeron, *Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **36**, 1, 1986, pp. 39-82.

[14] R. Temam et M Ziane, *Navier-Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions*, Adv. Diff. Eqns., **4**, 4, 1996, pp. 499-546.

[15] R. Temam et M Ziane, *Navier-Stokes equations in thin spherical domains*, Contemporary Mathematics, **209**, 1997, pp. 281-314.

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.