Exercice 1

a) On observe d'abord que pour tout $n \geqslant 0$ $\quad a_n \neq 0$

Ceci incite à examiner $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!}{(2n)!} \dfrac{(n!)^2}{[(n+1)!]^2}$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}.$$ Quand $n \to +\infty$ $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 4$

On en déduit que le rayon de convergence cherché est $\dfrac{1}{4}$

b) Pour $m \neq -1$, la fonction $z \mapsto z^m$ définie sur $\mathbb{C}^*$ (au moins) admet une primitive sur son domaine de définition, $z \mapsto \frac{z^{m+1}}{m+1}$, et donc $\int_\gamma z^m dz = 0$

Pour $m = -1$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it} dt}{e^{it}} = 2i\pi.$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On développe:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} z^k}{z^n} \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} \left(\int_\gamma z^{k-n} \frac{dz}{z} \right)$$ Vu le b) les intégrales figurant dans la somme sont nulles sauf pour $k-n=0$

d'où $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = \binom{2n}{n} = a_n$

d) i) $$\frac{1}{uX^2+(2u-1)X+u} = \frac{25}{4} \frac{1}{\left(X-\frac{1}{4}\right)(X-4)}$$

Les techniques rodées de décomposition en éléments simples donnent sans mal: $a = \dfrac{5}{3}$ et $b = -\dfrac{5}{3}$

ii) $$\int_\gamma \frac{dz}{uz^2+(2u-1)z+u} = a\int_\gamma \frac{dz}{z-4} + b\int_\gamma \frac{dz}{z-\frac{1}{4}}$$

$= 2i\pi a \operatorname{Ind}(\gamma,4) + 2i\pi b \operatorname{Ind}\left(\gamma,\frac{1}{4}\right) = 2i\pi b$

On en déduit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{4}{25}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n = -b = \frac{5}{3}$

e) i) Soit $n \geq 0$

Vu le c)

$$a_n U^n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{U^n (1+z)^{2n}}{z^n}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[\frac{U(1+z)^2}{z}\right]^n \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[U\left(\frac{1}{z}+2+z\right)\right]^n \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left[U\left(2+z+\frac{1}{z}\right)\right]^n \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \left[U\left(2+e^{it}+e^{-it}\right)\right]^n \frac{ie^{it}\,dt}{e^{it}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[2U(1+\cos t)\right]^n dt$$

ii) Sur $[0,2\pi]$ $|1+\cos t|$ admet son maximum aux bornes, et celui-ci vaut 2

donc $\|f_n\|_\infty = |2U \times 2|^n = |4U|^n$

Puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} |4U|^n < +\infty$ car $|U| < \frac{1}{4}$

Ceci prouve la convergence normale, et celle-ci justifie l'échange $\sum / \int$.

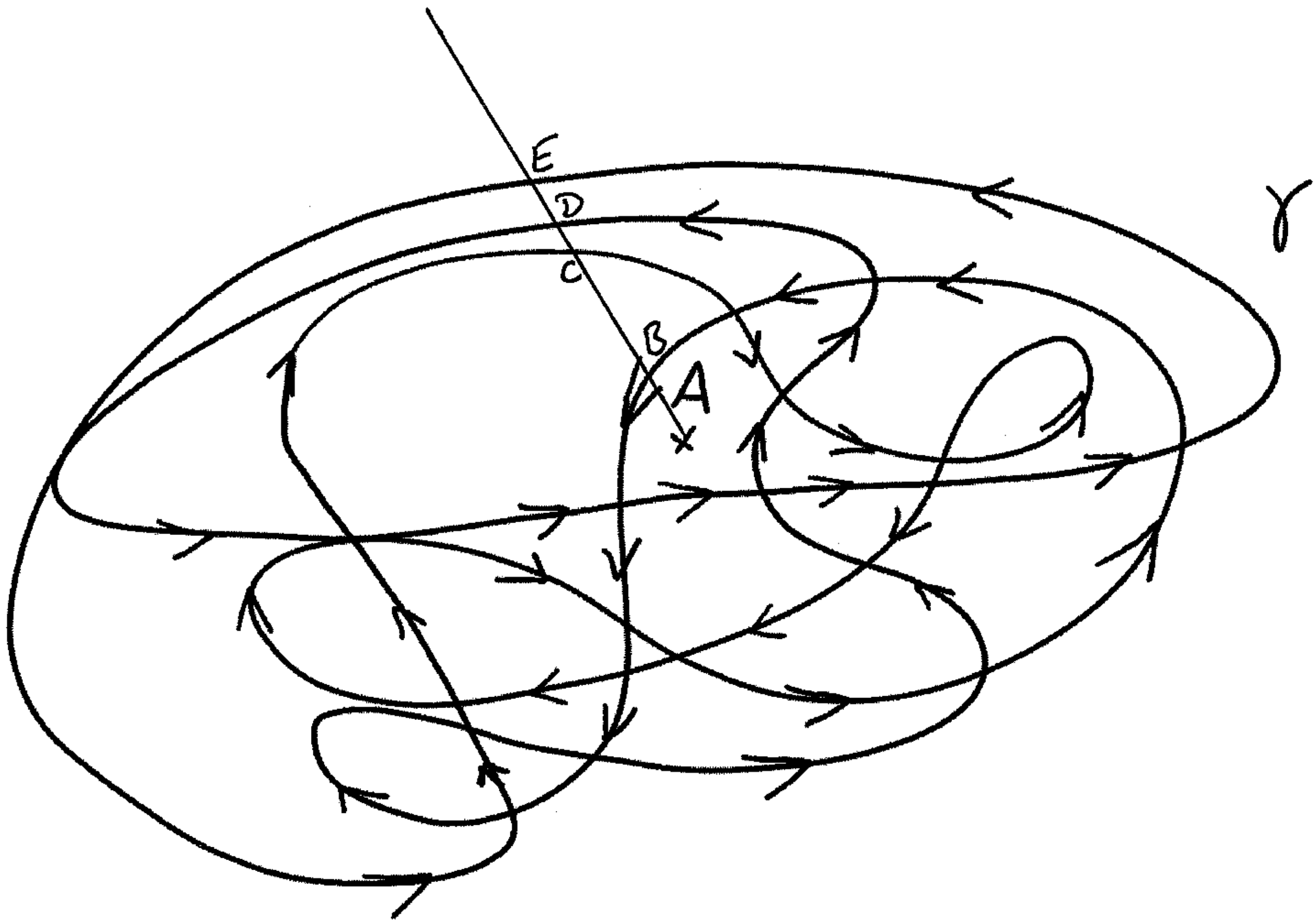
iii) En explicitant la somme de série géométrique dans la formule qui précède

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n U^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2U(1+\cos t)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-U(2+e^{it}+e^{-it})}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{-Ue^{it}+(1-2U)-Ue^{-it}} = -\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{Ue^{it}+(2U-1)+Ue^{-it}}\,\frac{ie^{it}}{e^{it}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{Ue^{2it}+(2U-1)e^{it}+U}\,ie^{it}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{Uz^2+(2U-1)z+U}\,dz.$$



Exercice 2

On trace une demi-droite issue de A et on compte d'une part les point où la courbe la coupe dans le sens direct : il y en a trois (notés B, D et E sur la figure), d'autre part le point où la courbe coupe la demi-droite dans le sens rétrograde : il y en un (noté C).

L'indice à calculer vaut $3 - 1 = 2$.