Analyse complexe, CT du 22 mai 2023

Corrigé.

Exercice 1 :

a) On a $\operatorname{Im}(f-g) = \operatorname{Im} f - \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} \bar{g}$

$= \operatorname{Im}(f+\bar{g}) = 0 \Rightarrow f-g \in \mathbb{R}$.

Donc $f-g = P + i\,0$. Par les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Donc P constant et $f-g$ aussi.

b) On écrit

$$\frac{f}{g} = \frac{f}{\bar{g}} \cdot \frac{\bar{g}}{g} = \frac{f\bar{g}}{|g|^2} \in \mathbb{R}.$$

Comme $\frac{f}{g}$ est holomorphe, on en déduit comme dans la question a) que $\frac{f}{g} = \text{const}$.

c) Soit $f = P + iQ$. Si $f(U) \subset D$ alors

$$aP + bQ + c = 0$$

On dérive en x et on utilise les équations de Cauchy-Riemann :

$$a\frac{\partial P}{\partial x} + b\frac{\partial Q}{\partial x} = a\frac{\partial P}{\partial x} - b\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

De même, en dérivant en y on obtient

$$a\frac{\partial P}{\partial y} + b\frac{\partial Q}{\partial y} = a\frac{\partial P}{\partial y} + b\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Les quantités $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$ vérifient un système linéaire homogène 2×2 de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ qui est inversible (son déterminant vaut $a^2+b^2 \neq 0$)

Donc $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ sur U $\Rightarrow P =$ constant.

De même, $Q =$ constant. Donc f constant.

Exercice 2 :

On utilise le théorème de Rouché avec les polynômes $P = z^4 + 5z + 3$, $Q = 5z$ et la courbe $\gamma = C(0,1)$ (cercle unité).

Sur γ nous avons : $|P - Q| = |z^4 + 3| \leq$

$\leq |z^4| + 3 = 4 < 5 = |Q|$.

On peut donc appliquer le théorème de Rouché, P et Q ont le même nombre de racines ds le disque unité. Or Q a une seule racine, donc P aussi (dans ce disque).

Exercice 3 :

a) Supposons par l'absurde que $a \in \Omega$.

On a $h^2(z) = (z-a)(z-b) \Rightarrow h^2(a) = 0$
$$\Rightarrow h(a) = 0.$$

On dérive : $2\, h(z)\, h'(z) = z-a + z-b$

On pose $z=a$: $2\, h(a)\, h'(a) = a-b$
$$0 = a-b$$
$$a = b \quad \text{contradiction.}$$

Donc $a \notin \Omega$ et de même $b \notin \Omega$.

b) Par le rappel de cours nous avons les équivalences suivantes :

f existe $\iff \int_\gamma \frac{R'}{R} = 0 \quad \forall \gamma$ lacet de Ω

$\iff \int_\gamma \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) = 0 \quad \forall \gamma$ lacet de Ω

$\iff \int_\gamma \frac{1}{z-a} = \int_\gamma \frac{1}{z-b} \quad \forall \gamma$ lacet de Ω

$\iff \mathrm{Ind}(a,\gamma) = \mathrm{Ind}(b,\gamma) \quad \forall \gamma$ lacet de Ω

c) (i) $g = e^{f/2}$ convient

(ii) $g^2 = R(z) = \frac{z-a}{z-b}$

$\Rightarrow \quad g^2 (z-b)^2 = (z-a)(z-b) = P(z)$

Donc $h(z) = g(z)(z-b)$ convient.

d) Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus [a,b]$ et γ un lacet de Ω.

Alors $\mathbb{C} \setminus \gamma \supset [a,b]$ qui est connexe par arcs donc connexe. Donc le segment $[a,b]$ est inclus dans une seule composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, donc a et b sont

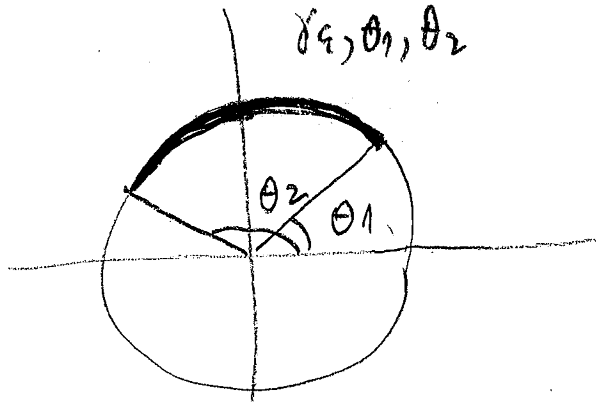
dans une même composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.
L'indice étant constant sur les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, il s'ensuit que

$$\mathrm{Ind}(a, \gamma) = \mathrm{Ind}(b, \gamma) \quad \forall \gamma \text{ lacet de } \Omega.$$

La condition du b) est donc satisfaite.

Exercice 4 :

a)



Soit $a = \mathrm{Res}(g, 0) \Rightarrow g(z) = \frac{a}{z} + h(z)$

où h est holomorphe en 0.

Nous avons

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} g = a \int_{\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} \frac{1}{z}\, dz + \int_{\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} h$$

Param. de $\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}$: $\gamma(t) = \varepsilon e^{it}$, $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$

donc $\displaystyle\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} (\varepsilon e^{it})' = i(\theta_2 - \theta_1)$

Puis $\left| \int_{\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} h \right| \leq \underbrace{\sup_{\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} |h|}_{= O(1)} \; \underbrace{\operatorname{long}(\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2})}_{= \varepsilon(\theta_2 - \theta_1)}$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

<u>Conclusion</u> : $\int_{\gamma_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} g \xrightarrow{\varepsilon \to 0} a i (\theta_2 - \theta_1)$

$$= i (\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(g, 0).$$

b) La fonction $\frac{e^{iz}}{z}$ a un unique pôle simple en 0 de résidu $\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = z \cdot \frac{e^{iz}}{z} \Big|_{z=0}$

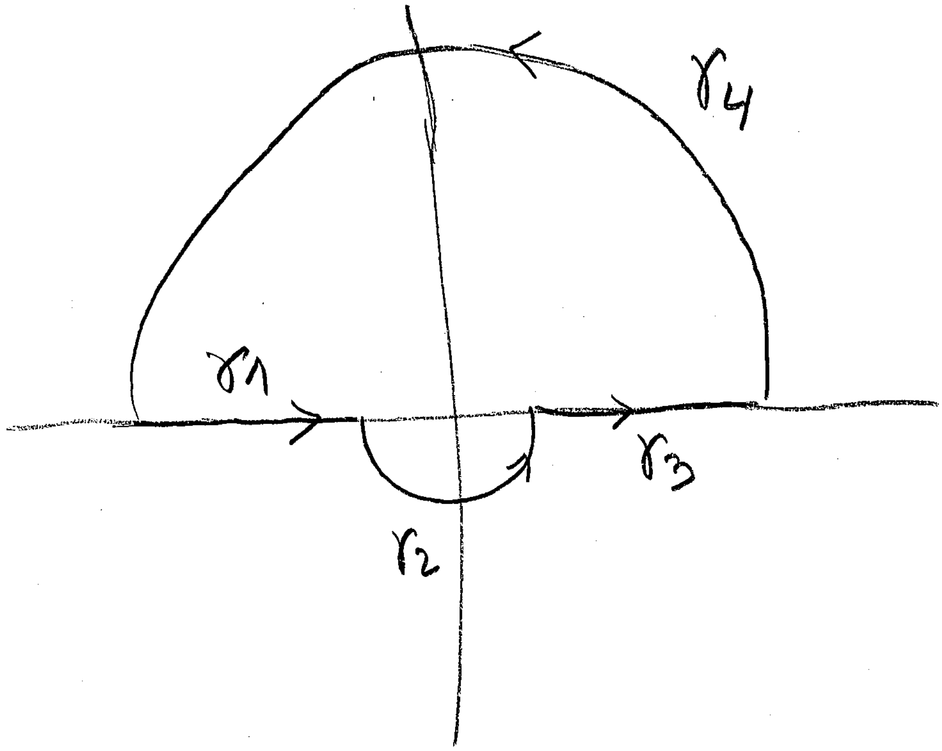
$$= e^{iz}\Big|_{z=0} = 1$$

Par le théorème des résidus, vu que γ est un lacet simple orienté dans le sens direct et que 0 est à l'intérieur de γ, l'intégrale vaut

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right)$$

$$= 2\pi i.$$

c)



On décompose γ en 4 parties, comme au-dessus.

Par b) : $\boxed{\displaystyle \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z} \quad (*) \quad = 2\pi i}$

Par a) : $\displaystyle \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z} = \int_{\gamma_{\varepsilon,\pi,2\pi}} \frac{e^{iz}}{z} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \pi i$

Puis

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{it}}{t} dt$$

$$= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos t}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos t}{t} + i \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin t}{t} dt \right)$$

$$= 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}$$

On majore enfin

$$\left| \int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \right| \underset{\substack{z = Re^{it} \\ 0 \leq t \leq \pi}}{=} \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} (Re^{it})' \right|$$

$$= \left| \int_0^\pi e^{iRe^{it}}\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^\pi \left| e^{iRe^{it}} \right| dt$$

$$= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\, dt$$

$$\xrightarrow{R \to \infty} 0$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue vu que $e^{-R\sin t} \xrightarrow{R\to\infty} 0$ pp sur $[0,\pi]$ et on a la domination $e^{-R\sin t} \leq 1 \in L^1(0,\pi)$.

En faisant $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$ dans (*) et en utilisant ce qui précède on obtient d'une part la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, et d'autre part sa valeur :

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt + \pi i = 2\pi i$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$