Analyse fonctionnelle 1

Master Mathématiques Générales, 1ère année
Université Lyon 1

Dragoș Iftimie

Table des matières

Mise à jour le 8 novembre 2024.

1 Rappels et compléments de topologie des espaces vectoriels normés

1.1 Topologie et espaces métriques

Définition 1.1 (espace topologique). *Une topologie sur un ensemble X est une famille de sous-ensembles de X qui contient $\emptyset$ et X et qui est stable par union arbitraire et intersection finie. Les éléments de la topologie sont appelés ouverts. Un espace topologique est un ensemble muni d'une topologie.*

Définition 1.2 (distance, espace métrique). *Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$:*

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(séparabilité) ;*

ii) $d(y, x) = d(x, y)$ *(symétrie) ;*

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et d est une distance sur X.

Remarque. Nous avons l'inégalité triangulaire inverse suivante :

$$\forall x, y, z \in X,\ |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Définition 1.3. *Soit (X, d) un espace métrique, soit $x \in X$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble*

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in X,\ d(x, y) < r\} \\ \textit{resp.}\quad B_f(x, r) &= \{y \in X,\ d(x, y) \leq r\}. \end{aligned}$$

Les espaces métriques sont des espaces topologiques. Un ensemble A est dit ouvert si pour tout $x \in A$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Les ensembles fermés sont les complémentaires des ensembles ouverts.

L'adhérence d'un ensemble A, noté par $\overline{A}$, est le plus petit fermé qui contient A. C'est aussi l'intersection de tous les fermés qui contiennent A, ou encore l'ensemble des limites de suites de A. De même, l'intérieur de A, noté par $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert inclus dans A, ou encore l'union de tous les ouverts inclus dans A. Un point appartient à l'intérieur de A si et seulement s'il y toute une boule autour du point qui est dans A. Nous avons que A est fermé si et seulement s'il est égal à son adhérence. Il est ouvert si et seulement s'il est égal à son intérieur. Les notions d'adhérence et d'intérieur sont stables par inclusion. Nous avons que

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

mais seulement

$$\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$$

en général.

On peut définir le produit au plus dénombrable d'espaces métriques.

Définition 1.4 (produit fini d'espaces métriques). *Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$ un nombre fini d'espaces métriques. Le produit de ces espaces métriques est l'ensemble $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ muni de la distance*

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \cdots + d_n(x_n.y_n).$$

Définition 1.5 (produit dénombrable d'espaces métriques)**.** *Soient* $(X_k, d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *un nombre dénombrable d'espaces métriques. Le produit de ces espaces métriques est l'ensemble* $X = \prod_{k=0}^{\infty} X_k$ *muni de la distance*

$$d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)}.$$

Proposition 1.6. *a) L'application* d *définie au-dessus est une distance.*

b) La convergence pour cette distance est la convergence composante par composante : $x^n \to x$ *quand* $n \to \infty$ *si et seulement si pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *nous avons que* $x_k^n \to x_k$ *quand* $n \to \infty$*.*

1.2 Espaces normés

Dans le reste de ce manuscrit, nous noterons par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.7 (espace vectoriel)**.** *Un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *est un ensemble* E *muni de deux opérations :*

- *l'addition* $+$ *avec les propriétés suivantes :*
  - *elle est associative :* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *;*
  - *elle est commutative :* $x + y = y + x$ *;*
  - *il existe un élément neutre* x *:* $x + 0 = x$ *;*
  - *tout* x *admet un unique opposé* $-x$ *:* $x + (-x) = 0$*.*
- *la multiplication par des scalaires* $\lambda \in \mathbb{K}$ *avec les propriétés suivantes :*
  - $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ *;*
  - $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ *;*
  - $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ *;*
  - $1 \cdot x = x$*.*

Définition 1.8 (norme, espace normé)**.** *On appelle norme sur* E *une application de* E *dans* $\mathbb{R}_+$ *habituellement notée* $\|\cdot\|$ *vérifiant pour tout* $x, y \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$

a) $\|x\| = 0 \Rightarrow (x = 0)$ *(séparation) ;*

b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *(homogénéité) ;*

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$ *où* E *est un espace vectoriel et* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* E*.*

Un espace normé est aussi un espace métrique pour la distance $d(x,y) = \|x - y\|$. Nous avons la réciproque suivante de l'inégalité triangulaire :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Définition 1.9 (normes équivalentes)**.** *Deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sont dites équivalentes s'il existe deux constantes* $C_1, C_2 > 0$ *telles que*

$$\|x\|_1 \leq C_1\|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x. \tag{1.1}$$

On vérifie aisément que deux normes équivalentes engendrent la même topologie. La réciproque est également vraie.

Exemples.

— L'espace $\mathbb{R}^d$ muni de
$$\|x\|_p = \big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}}$$
si $1 \leq p < \infty$, ou
$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|$$
si $p = \infty$, est un espace normé.

— L'espace ℓ^p des suites de puissance p sommable : $\ell^p = \{x = (x_n)_n \ ; \ \sum_{n\geq 0} |x_n|^p < \infty\}$ muni de la norme
$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n\geq 0} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$
Si $p = \infty$, ℓ^∞ est l'espace des suites bornées muni de la norme
$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|.$$
On peut aussi munir ℓ^p de la norme $\|\cdot\|_q$ pour tout $q \geq p$.

— L'espace $L^p(\Omega)$ (Ω est un espace mesuré σ-fini) muni de
$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_\Omega |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
si $1 \leq p < \infty$, ou
$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{\Omega} \mathrm{ess}\, |f|$$
si $p = \infty$, est un espace normé.

— Si X est un ensemble quelconque, l'espace des fonctions bornées de X sur $\mathbb{K}$ muni de $\|f\| = \sup_X |f|$ est un espace normé.

Cela résulte des deux inégalités suivantes :

Proposition 1.10 (inégalité de Hölder)**.** *Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ alors $fg \in L^r$ et*
$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

L'inégalité de Minkowski suivante nous permet d'affirmer que les L^p sont des espaces normés.

Proposition 1.11 (inégalité de Minkowski)**.** *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g \in L^p$. Alors $f + g \in L^p$ et*
$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Remarquons que ℓ^p est un cas particulier de $L^p(\Omega)$: si $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Autre cas particulier important : Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue.

1.3 Complétude, espaces de Banach

Définition 1.12. — *Une suite x_n dans un espace métrique est dite de Cauchy si $d(x_n, x_m) \to 0$ quand $m, n \to \infty$. C'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tout $m, n \geq N$.*

— *Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

— *Un espace de Banach est un espace normé complet.*

— *Un sous ensemble d'un espace métrique est dit complet s'il est complet en tant qu'espace métrique muni de la métrique induite. Plus précisément, toute suite de Cauchy de l'ensemble doit converger vers un élément de l'ensemble.*

Un ensemble complet est toujours fermé. Dans un espace complet, un ensemble est fermé ssi il est complet.

Nous avons la caractérisation suivante de la complétude d'un espace normé en terme de séries.

Proposition 1.13. *Soit E un espace normé. L'espace E est complet si et seulement si toute série absolument convergente (c'est-à-dire si la série des normes converge) est convergente. C'est-à-dire E est un espace de Banach ssi on a l'implication suivante : $\sum_{n\geq 0}\|x_n\|$ converge implique $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge.*

Exemples.

— $\mathbb{R}^d$ muni de $\|\cdot\|_p$.

— $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ muni de $\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Mais ce n'est pas un espace de Banach si on le munit d'une norme $\|\cdot\|_q$ avec $q \neq p$. Par exemple, la suite des troncatures de $(\frac{1}{n})_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ masi ne converge pas dans ℓ^1.

— Si (Ω,μ) est un espace mesuré σ-fini alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

— L'espace des fonctions bornées sur un ensemble arbitraire muni de la norme du sup est un espace de Banach.

— Plus généralement, si X est un ensemble arbitraire et E est un espace de Banach alors $\mathscr{B}(X;E) = \{f : X \to E \ ;\ \|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in X}\|f(x)\|_E < \infty\}$ muni de $\|\cdot\|_E$ est un espace de Banach.

— L'espace $C^0([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est un espace de Banach pour $p=\infty$ mais n'est pas un espace de Banach si $p<\infty$.

Théorème 1.14 (Riesz-Fischer)**.** *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ l'espace L^p est un espace de Banach.*

La preuve de ce théorème montre aussi une sorte de réciproque au théorème de convergence dominée de Lebesgue : toute suite qui converge dans L^p admet une sous-suite qui converge presque partout et qui est dominée par une même fonction de L^p. Cela montre l'optimalité du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Fin du cours 1 (02/09/2023).

1.4 Applications linéaires et continues. Dual

Proposition 1.15. *Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si il existe une constante $M>0$ telle que*

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Corollaire 1.16. *Deux normes sur un espace vectoriel E définissent les mêmes ouverts si et seulement si elles sont équivalentes.*

Définition 1.17. *Les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ étant fixées, on note $\mathscr{L}(E;F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On appelle **dual topologique** de E et on note $E' = \mathscr{L}(E;\mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires continues sur E.*

Proposition 1.18. *L'espace $\mathscr{L}(E;F)$ est un espace normé avec la norme suivante :*

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathscr{L}(E;F)} &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1}\|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1}\|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E<1}\|f(x)\|_F \\ &= \inf\{M \ ;\ \forall x\in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E\} = \min\{M \ ;\ \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E\}.\end{aligned}$$

Nous avons toujours l'inégalité

$$\|f(x)\|_F \le \|f\|_{\mathscr{L}(E;F)}\|x\|_E.$$

La norme d'une application linéaire et continue est d'ailleurs la plus petite constante C avec la propriété que

$$\|f(x)\|_F \le C\|x\|_E.$$

Nous avons que la norme de la composition est majorée par le produit des normes.

Proposition 1.19. *Si $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont trois espaces vectoriels normés alors pour $f \in \mathscr{L}(E;F)$ et $g \in \mathscr{L}(F;G)$ la composée $g \circ f$ appartient à $\mathscr{L}(E;G)$ et on a*

$$\|g \circ f\|_{\mathscr{L}(E;G)} \le \|g\|_{\mathscr{L}(F;G)}\|f\|_{\mathscr{L}(E;F)}.$$

En particulier, cette norme sur $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E;E)$ est une norme d'algèbre.

Exemples.

a) Le dual d'un espace de dimension fini s'identifie à lui-même.

b) Le dual de ℓ^p s'identifie à $\ell^{p'}$ pour tout $1 \le p < \infty$. Ici $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. (Preuve en TD)

c) Si (Ω, μ) est un espace mesuré σ-fini, alors pour tout $1 \le p \le \infty$ nous avons que $L^{p'}(\Omega)$ est inclus dans $(L^p(\Omega))'$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $p < \infty$ on a même l'égalité $L^{p'}(\Omega) = (L^p(\Omega))'$ (sans preuve).

1.5 Compacité

Définition 1.20 (compact)**.** *Un ensemble est dit compact si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. De manière équivalente, de toute suite de l'ensemble on doit pouvoir extraire une sous suite convergente dans l'ensemble.*

Voici quelques propriétés des compacts.

Proposition 1.21. *a) Un compact est toujours fermé et complet.*

b) L'image d'un compact par une application continue est un compact.

c) Une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

d) Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Définition 1.22. *a) Un ensemble est dit relativement compact si son adhérence est compacte.*

b) Un ensemble est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut le recouvrir d'un nombre fini de boules de rayon ε.

Proposition 1.23. *Un ensemble est compact ssi il est précompact et complet.*

De même, dans un espace complet précompact et relativement compact veut dire la même chose. Enfin, produit de compacts est un compact.

Théorème 1.24. *Un produit au plus dénombrable d'espaces métriques compacts est un espace métrique compact.*

1.6 Dimension finie

Les espaces normés de dimension finie ont un certain nombre de propriétés qui les distinguent des autres espaces normés. En voici quelques-unes.

Théorème 1.25 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Dans un espace normé de dimension finie, les ensembles compacts sont les ensembles fermés et bornés.*

On a aussi la réciproque.

Théorème 1.26 (Riesz)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé (pas forcément de dimension finie). La boule unité fermée est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Voici un théorème qui regroupe d'autres propriétés des espaces normés de dimension finie.

Théorème 1.27. *a) Dans un espace normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

b) Dans un espace normé quelconque, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

c) Toute application linéaire définie sur un espace normé de dimension finie à valeurs dans un espace normé quelconque (pas forcément de dimension finie) est continue.

1.7 Séparabilité et convergences faibles

Rappelons maintenant la notion d'espace séparable.

Définition 1.28. *Un espace normé est dit séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable et dense.*

Définition 1.29. *Soit E un espace normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
- *On dit que $x_n \to x$ faiblement dans E, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si pour tout $f \in E'$ nous avons que $f(x_n) \to f(x)$.*
- *On dit que $f_n \to f$ faible$*$ dans E' si $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$ (c'est-à-dire si la suite converge simplement).*

Pour souligner la distinction entre la convergence en norme et les diverses convergences faibles, la convergence en norme est aussi appelée convergence forte car c'est une notion plus forte que la convergence faible.

Voici maintenant une proposition qui regroupe quelques propriétés des convergences faibles.

Proposition 1.30. *Soit E un espace normé.*

a) Si $x_n \to x$ en norme (convergence forte) alors $x_n \rightharpoonup x$.

b) Si $f_n \to f$ en norme dans E' alors $f_n \to f$ faible$*$.

Si E est de dimension finie, nous avons de plus :

c) $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $x_n \to x$ fortement ;

d) $f_n \to f$ faible$*$ si et seulement si $f_n \to f$ fortement.

Fin du cours 2 (06/09/2024).

Le théorème qui suit est la motivation principale pour introduire les notions de convergence faible. C'est la version en dimension infinie du théorème de Bolzano-Weierstrass qui dit qu'en dimension finie de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente. En dimension infinie, cela reste plus ou moins vrai à ceci près que la suite extraite va converger faiblement et non fortement.

Théorème 1.31 (Banach-Alaoglu, cas séparable)**.** *Soit E un espace normé séparable. De toute suite bornée de E' on peut extraire une sous-suite qui converge faible$*$.*

Remarque. L'hypothèse de séparabilité est bien nécessaire pour que la conclusion de ce théorème reste vraie. En effet, sur l'espace ℓ^∞ des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, les projections P_n sur la n-ème composante définies par $x = (x_n)_{n\geq 1} \mapsto P_n(x) = x_n$ forment une suite bornée d'applications linéaires et continues qui n'admet pas de sous-suite convergente faible$*$.

1.8 Séparabilité des espaces L^p

Nous allons maintenant nous intéresser à la séparabilité des espaces L^p. Celle-ci est très importante dans la mesure où c'est elle qui va nous permettre d'extraire des sous-suites (faiblement) convergentes des suites bornées grâce au théorème de Banach-Alaoglu.

Nous nous plaçons dans le cadre d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ avec la mesure de Lebesgue.

Théorème 1.32. *L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.*

La preuve repose sur la densité de $C_c^0(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ et de la séparabilité de l'espace des fonctions continues sur un compact.

Proposition 1.33. *Pour tout K compact l'espace $C^0(K)$ (muni de la norme L^∞) est séparable.*

Fin du cours 3 (13/09/2024).

La séparabilité des espaces L^p nous permet d'appliquer le théorème de Banach-Alaoglu (théorème 1.31). En effet, une suite bornée dans L^p avec $1 < p \leq \infty$ peut être vue comme une suite bornée dans $\left(L^{p'}\right)'$ où $1 \leq p' < \infty$. Alors $L^{p'}$ est séparable et le théorème de Banach-Alaoglu (théorème 1.31) implique immédiatement le résultat suivant.

Théorème 1.34. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec la mesure de Lebesgue et f_n une suite bornée dans $L^p(\Omega)$.*

a) Si $1 < p < \infty$ alors la suite f_n admet une sous-suite qui converge faiblement dans $L^p(\Omega)$: il existe $f \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite f_{n_k} telle que $\int_\Omega f_{n_k} g \to \int_\Omega fg$ pour tout $g \in L^{p'}(\Omega)$.

b) Si $p = \infty$ alors la suite f_n admet une sous-suite qui converge faible$*$ dans $L^\infty(\Omega)$: il existe $f \in L^\infty(\Omega)$ et une sous-suite f_{n_k} telle que $\int_\Omega f_{n_k} g \to \int_\Omega fg$ pour tout $g \in L^1(\Omega)$.

c) Si $p = 1$, la suite f_n ne possède pas forcément une sous-suite convergente faiblement dans $L^1(\Omega)$.

Si $p = 1$, la suite f_n ne possède pas forcément une sous-suite convergente faiblement dans $L^1(\Omega)$. Un contre-exemple est donné par une suite régularisante qui converge vers une masse de Dirac (dans un sens à préciser...). Nous avons regardé jusqu'ici L^1 comme un sous espace du dual de L^∞, mais comme L^∞ n'est pas séparable on ne peut rien dire sur les suites bornées de son dual. La bonne manière de procéder est en fait de regarder $L^1(\Omega)$ comme un sous-espace du dual de $C_c^0(\Omega)$ qui lui est séparable si Ω est borné. On peut alors de même appliquer le théorème de Banach-Alaoglu et extraire de toute suite bornée dans $L^1(\Omega)$ une sous-suite qui converge faible$*$ dans le dual de $C_c^0(\Omega)$. On peut montrer (c'est le théorème de Radon-Riesz) que le dual de $C_c^0(\Omega)$ est formé de mesures. On obtient alors que de toute suite bornée dans $L^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite qui converge au sens des mesures. Si on veut extraire une sous-suite convergente (dans un sens raisonnable) d'une suite bornée de L^1, il nous faut donc sortir de L^1 et se placer dans le cadre plus général des mesures.

2 Espaces de fonctions continues

Dans cette partie on se pose la question de la topologie des espaces de fonctions continues et de leurs propriétés.

2.1 Topologie

Pour les fonctions continues sur un compact, c'est très simple, elles sont nécessairement bornées et on utilise alors la norme $\|\cdot\|_\infty$ ce qui en fait un espace de Banach.

Définition 2.1. *Soit K un compact. On définit $C^0(K) = \{f : K \to \mathbb{C},\ f \text{ continue}\}$ et on le munit de $\|f\|_\infty = \sup_K |f| = \max_K |f|$.*

On a vu les années précédentes que c'est complet.

Proposition 2.2. *L'espace $C^0(K)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.*

On peut faire de même pour les fonctions continues et bornées sur un ouvert.

Définition 2.3. *Soit Ω un ouvert. On définit $C^0_b(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ f \text{ continue et bornée}\}$ et on le munit de $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f| = \max_\Omega |f|$.*

Comme au-dessus, $C^0_b(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Malheureusement, les fonctions continues sur un ouvert ne sont pas forcément bornées. Dès lors, quelle topologie mettre sur cet espace ? Il n'y a pas de norme qui puisse convenir. Il y a cependant une distance.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K_j une suite exhaustive de compacts : $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ et $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$. On introduit la semi-norme $p_j(f) = \sup_{K_j} |f|$. La distance sur $C^0(\Omega)$ est définie par

$$d(f,g) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} \frac{p_j(f-g)}{1+p_j(f-g)}.$$

Cela en fait un espace métrique complet dont la convergence est la convergence uniforme sur les compacts. On appelle d'ailleurs cette distance la distance de la convergence uniforme sur les compacts.

Nous pouvons aussi nous intéresser à d'autres espaces de fonctions régulières, comme par exemple $C^k(\Omega)$ et $C^\infty(\Omega)$. L'étude est entièrement similaire en utilisant la famille dénombrable de semi-normes suivante :

$$p_{\alpha,j}(f) = \sup_{K_j} |\partial^\alpha f|$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et $\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$. Ici j varie dans $\mathbb{N}$, et dans le cas de $C^k(\Omega)$ il faut aussi imposer la condition $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \le k$. Les espaces $C^k(\Omega)$ et $C^\infty(\Omega)$ deviennent alors des espaces métriques complets dont la convergence est la convergence uniforme sur tous les compacts de Ω de toutes les dérivées (d'ordre $\le k$ dans le cas de $C^k(\Omega)$).

2.2 Densité des polynômes

Le but de cette partie est de montrer que les polynômes sont denses dans $C^0(K)$. Nous avons besoin de deux résultats préliminaires. Le premier est un résultat d'extension de fonctions continues.

Théorème 2.4 (Tietze)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact de Ω. Toute fonction continue sur K s'étend à une fonction continue à support compact définie sur Ω.*

Fin du cours 4 (20/09/2024). Le deuxième affirme la densité des polynômes dans le cas du cube $[0,1]^n$.

Théorème 2.5 (Bernstein)**.** *Soit $f : [0,1]^n \to \mathbb{C}$ continue. On introduit le polynôme de Bernstein*

$$P_k(X) = \sum_{j_1=0}^{k} \cdots \sum_{j_n=0}^{k} C_k^{j_1} \dots C_k^{j_n} f\left(\frac{j}{k}\right) x_1^{j_1}(1-x_1)^{k-j_1} \dots x_n^{j_n}(1-x_n)^{k-j_n}.$$

Alors P_k tend vers f uniformément sur $[0,1]^n$.

On en déduit via un changement de variables que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur un pavé. Comme tout compact est inclus dans un pavé, le théorème de Tietze nous permet de nous ramener au cas d'un pavé. Nous avons obtenu le théorème suivant.

Théorème 2.6 (Weierstrass)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Les polynômes sont denses dans $C^0(K)$.*

2.3 Compacité

Nous abordons enfin la question de la compacité dans les espaces de fonctions continues. D'abord une définition.

Définition 2.7. *Soient E, F deux espaces métriques, $f : E \to F$ et $\mathscr{F} \subset C^0(E,F)$.*

a) La fonction f est continue si pour tout x et $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel qu'on ait l'implication

$$d(x,y) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

b) La famille $\mathscr{F}$ est dite équicontinue si le η au-dessus ne dépend pas de $f \in \mathscr{F}$.

c) La famille $\mathscr{F}$ est dite uniformément équicontinue si le η au-dessus ne dépend pas de $f \in \mathscr{F}$ ni de x.

Si l'espace de départ est compact, alors l'équicontinuité équivaut à l'uniforme équicontinuité.

Proposition 2.8. *Soient E compact métrique et F métrique. Une famille $\mathscr{F} \subset C^0(E,F)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.*

Voici maintenant le théorème d'Ascoli qui donne une condition nécessaire pour la compacité de l'espace des fonctions continues.

Théorème 2.9 (Ascoli)**.** *Soit K un espace métrique compact et X un espace métrique. On se donne une famille $\mathscr{F}$ de fonctions continues de K dans X et on munit $C^0(K,X)$ de la distance de la convergence uniforme. La famille $\mathscr{F}$ est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

a) $\mathscr{F}$ est ponctuellement relativement compacte : pour tout $x \in K$ l'ensemble $\mathscr{F}(x) = \{f(x)\ ;\ f \in \mathscr{F}\}$ est relativement compact.

b) $\mathscr{F}$ est équicontinue, c'est-à-dire les fonctions de $\mathscr{F}$ sont uniformément continues avec les mêmes constantes : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x,y) < \delta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout $f \in \mathscr{F}$.

Remarque. Souvent on travaille avec des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas la condition de ponctuellement relativement compact est automatiquement vérifiée. La condition principale est donc l'équicontinuité.

3 Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont essentiellement des espaces de dimension infinie qui ont un produit scalaire similaire à celui de $\mathbb{R}^n$. Définissons d'abord la notion de produit scalaire.

Définition 3.1. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un produit scalaire sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ avec les propriétés suivantes :*

— *pour tout x l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;*
— *pour tout x, y nous avons $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (symétrie) ;*
— *pour tout x nous avons que $\langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité seulement si $x = 0$.*

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace préhilbertien.

Remarques.

— Un produit scalaire a la propriété que $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$. On dit que l'application $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est antilinéaire.

— Dans certains ouvrages les rôles de x et y sont inversés, c'est-à-dire que le produit scalaire est défini comme étant linéaire en y et antilinéaire en x.

Nous avons une inégalité de Cauchy-Schwarz en dimension infinie.

Proposition 3.2 (inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace préhilbertien. Alors*

a) Nous avons l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

avec égalité si et seulement si x *et* y *sont liés.*

b) La quantité $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *définit une norme sur* H*.*

c) Nous avons l'identité du parallélogramme suivante :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

La norme est définie à partir du produit scalaire mais on peut aussi retrouver le produit scalaire à partir de la norme. Cela se fait via l'identité de polarisation suivante :

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

dans le cas réel et

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2}{4}$$

dans le cas complexe.

Définition 3.3. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée.*

Exemples.

— L'espace $L^2(\Omega, \mu)$ (Ω mesuré σ-fini) muni de

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\overline{g}\, d\mu$$

est un espace de Hilbert.

— L'espace $C^0([0,1];\mathbb{C})$ muni de

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}\, dx$$

est un espace préhilbertien sans être un espace de Hilbert.

— L'espace ℓ^2 des suites de carré sommable avec le produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\overline{y_n}$$

est un espace de Hilbert.

3.1 Projection et orthogonal

Un théorème très important dans la théorie des espaces de Hilbert est le théorème de la projection qui dit que dans un espace de Hilbert, la distance à un convexe fermé est atteinte en exactement un point.

Théorème 3.4 (projection sur un convexe fermé). *Soit H un espace de Hilbert et K un convexe fermé. Alors*

a) Pour tout $x \in H$ la distance $d(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|$ est atteinte en un unique point u. On appelle u la projection de x sur K et on note $u = P_K(x)$.

b) La projection $P_K(x)$ est caractérisée par la relation suivante

$$\forall y \in K \quad \mathrm{Re}\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle \leq 0.$$

c) La projection P_K est une application 1-Lipschitzienne.

Un sous-espace vectoriel fermé est un convexe fermé, on peut donc lui appliquer le théorème de la projection sur un convexe fermé. Nous obtenons alors le corollaire suivant.

Corollaire 3.5 (projection orthogonale sur un sous-espace fermé). *Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé. Alors la projection sur F est bien définie et on peut la caractériser par :*

$$u = P_F(x) \text{ si et seulement si } u \in F \text{ et } \langle x - u, v\rangle = 0 \ \forall v \in F.$$

On dit alors que $x - P_F(x) \perp F$ ($x - P_F(x)$ est orthogonal à F) et la projection P_F est appelée projection orthogonale sur F.

Définition 3.6. *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$ un sous-ensemble. L'orthogonal de A, noté par $A^\perp$, est l'ensemble des x tels que $x \perp A$:*

$$A^\perp = \{x \in H \ ; \ \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in A\}.$$

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel fermé dans un espace de Hilbert H, alors tout $x \in H$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. Nous avons de plus que $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.

Fin du cours 5 (27/09/2024).

Proposition 3.7. *Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel.*

a) Pour tour $A \subset H$, l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.

b) $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.

c) $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

d) $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.

e) F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

3.2 Dualité

Un résultat très important dans la théorie des espaces de Hilbert dit que le dual d'un espace de Hilbert est lui-même.

Théorème 3.8 (Riesz). *Soit H un espace de Hilbert et $f \in H'$. Il existe un unique $u \in H$ tel que $f(x) = \langle x, u\rangle$ pour tout $x \in H$. Nous avons de plus que $\|f\| = \|u\|$ et l'application $H' \ni f \mapsto u \in H$ est une bijection isométrique antilinéaire.*

Nous pouvons donc identifier H' à l'espace $\widehat{H}$ qui est le même chose que H à ceci prés que l'on a remplacé la loi λx par $\overline{\lambda} x$. Ainsi, le théorème de Banach-Alaoglu peut s'appliquer pour obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 3.9. *Dans un espace de Hilbert séparable, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

3.3 Adjoint

Dans ce suit on note par $\mathscr{L}(H)$ l'ensemble des applications linéaires et continues (qu'on appelle aussi opérateurs) de H dans H. Montrons d'abord une proposition qui nous permet de définir l'adjoint.

Proposition 3.10 (définition et existence de l'adjoint)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathscr{L}(H)$ avec la propriété suivante :*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \quad \forall x, y.$$

De plus $\|T\| = \|T^*\|$. On appelle T^* l'adjoint de T.

L'adjoint pour les opérateurs joue le même rôle que la transposée pour les matrices. Voici une proposition qui regroupe quelques propriétés de l'adjoint.

Proposition 3.11. *Soit H un espace de Hilbert et $S, T \in \mathscr{L}(H)$. Nous avons que*

a) $I^* = I$.

b) $(ST)^* = T^*S^*$.

c) $(T^*)^* = T$.

d) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

Remarque. L'application $T \mapsto T^*$ est antilinéaire.

3.4 Base hilbertienne

Définition 3.12. *Soit H un espace préhilbertien.*

- *Une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ est dite orthogonale si $e_i \perp e_j$ pour tout $i \neq j$.*
- *Une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ est dite orthonormale si elle est orthogonale et si $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.*
- *Une base hilbertienne est une famille orthonormale totale (les combinaisons linéaires sont denses).*

Les familles orthonormales vérifient l'inégalité de Bessel suivante.

Proposition 3.13 (inégalité de Bessel)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\geq 0}$ une famille orthonormale. Alors cette famille est libre et on a l'inégalité de Bessel suivante :*

$$\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Voici quelques propriétés d'une base hilbertienne.

Proposition 3.14. *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n\geq 0}$ une famille orthonormale.*

a) La suite $\{e_n\}_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne si et seulement si nous avons l'égalité de Bessel-Parseval suivante :

$$\sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

b) On suppose que $\{e_n\}_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne. Nous avons

$$\forall x \in H \qquad x = \sum_{n\geq 0} \langle x, e_n\rangle e_n$$
$$\forall x, y \in H \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}.$$

Concernant l'existence des bases hilbertiennes, nous avons le résultat suivant d'existence dans le cas séparable.

Théorème 3.15. *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Alors H admet une base hilbertienne dénombrable $\{e_n\}_{n\geq 0}$ si et seulement si H est séparable.*

On peut montrer que les espaces de Hilbert non séparables ont aussi des bases hilbertiennes mais elles ne seront pas dénombrables. Il faut alors parler de familles sommables ce qui entraîne des difficultés supplémentaires. Étant donné que les espaces de Hilbert rencontrés en pratique sont en général séparables, nous nous passerons de ces complications.

3.5 Théorème de Lax-Milgram

Nous nous placerons dans toute cette partie dans le cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Commençons par une définition.

Définition 3.16. *Soit E un espace normé et $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.*
- *a est dite continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ pour tout $x, y \in E$;*
- *a est dite symétrique si $a(x, y) = a(y, x)$ pour tout $x, y \in E$;*
- *a est dite coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$ pour tout $x \in E$.*

Théorème 3.17 (Stampacchia)**.** *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H. Soit $K \subset H$ un convexe fermé non-vide et $\varphi \in H'$. Il existe un unique $u \in K$ avec la propriété suivante :*

$$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \quad \forall v \in K.$$

Si a est de plus symétrique, alors u est caractérisé par

$$u \in K \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v\in K}\Big(\frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v)\Big).$$

Fin du cours 6 (04/10/2024). Lorsque $K = H$ on obtient comme cas particulier le théorème de Lax-Milgram suivant.

Théorème 3.18 (Lax-Milgram)**.** *Soit H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et $f \in H'$. Il existe un unique $u \in H$ avec la propriété suivante :*

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Si a est de plus symétrique, alors u est caractérisé par

$$\frac{1}{2}a(u, u) - f(u) = \min_{v\in H}\Big(\frac{1}{2}a(v, v) - f(v)\Big).$$

4 Transformation de Fourier pour les fonctions

4.1 Cas des fonctions de L^1

Définition 4.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit la transformée de Fourier de f par*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\, dx \tag{4.1}$$

où $x \cdot \xi$ désigne le produit scalaire habituel de $\mathbb{R}^n$: $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$. On note $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier en tant qu'application, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$.

Voici une première propriété de la transformation de Fourier.

Lemme 4.2 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ alors $\widehat{f}$ est une fonction bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$, nulle à l'infini (c'est-à-dire que $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$). De plus, nous avons la majoration $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.*

Nous avons aussi la proposition suivante.

Proposition 4.3. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nous avons que*

a) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}$.

b) $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\, g = \int_{\mathbb{R}^n} f\, \widehat{g}$.

On utilise dans la preuve du lemme de Riemann-Lebesgue le résultat suivant : toute fonction continue et nulle à l'infini est uniformément continue.

Introduisons maintenant quelques notations relatives aux multi-indinces et aux dérivées dans $\mathbb{R}^n$. Un multi-indice est un élément $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Son module, ou sa longueur, est définie par $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. On note $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ et $(\mathrm{i}\partial)^\alpha = (\mathrm{i}\partial_1)^{\alpha_1} \ldots (\mathrm{i}\partial_n)^{\alpha_n}$. Aussi $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ et $(\mathrm{i}x)^\alpha = (\mathrm{i}x_1)^{\alpha_1} \ldots (\mathrm{i}x_n)^{\alpha_n}$.

Les deux propositions qui suivent montrent que la transformation de Fourier envoie les dérivées en des puissances et les puissances en des dérivées.

Proposition 4.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $(1 + |x|^k)f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$. Alors $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{x^\alpha f} = (i\partial_\xi)^\alpha \widehat{f}$ pour tout $|\alpha| \leq k$.*

Proposition 4.5. *Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ tel que $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $|\alpha| \leq k$. Alors $\widehat{\partial^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \widehat{f}$ pour tout $|\alpha| \leq k$.*

Fin du cours 7 (11/10/2024).

Un exemple très important de calcul explicite de transformée de Fourier est celui de la gaussienne :

Proposition 4.6. *Soit $a \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de partie réelle strictement positive. Nous avons que*

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|^2}) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$$

où $a^{\frac{n}{2}} = (\sqrt{a})^n$ et $\sqrt{a}$ désigne la racine carrée de a de partie réelle positive.

On verra plus tard que cette formule reste vraie lorsque la parte réelle de a est nulle.

Théorème 4.7 (formule d'inversion dans L^1)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{f}}(-x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \quad \textit{p.p. en } x$$

Donc, pour une telle fonction la transformation de Fourier est inversible et

$$\mathcal{F}^{-1} f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi.$$

Remarque. Sous les hypothèses du théorème précédent, nous avons donc que la fonction f est aussi continue et bornée.

4.2 Cas des fonctions de L^2

Nous verrons dans cette partie que l'on peut définir la transformée de Fourier pour des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour une telle fonction la formule (4.1) ne peut plus être utilisée car l'intégrande $x \mapsto e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$ n'est pas nécessairement intégrable. Nous allons procéder d'une autre manière. Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.8. *Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|\widehat{\varphi}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L^2}$.*

Ce lemme nous dit que la transformation de Fourier restreinte à $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une isométrie linéaire à une constante près pour la norme L^2. On peut donc l'étendre par continuité à l'adhérence de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans L^2. Or $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans L^2, donc cette adhérence est L^2 tout entier. Ceci nous permet de poser la définition suivante :

Définition 4.9. *La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est l'extension par continuité pour la norme $L^2(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{F}\big|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$ tout entier.*

Concrètement, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on prend une suite de fonctions $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et on pose $\widehat{f} = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f_n}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Remarque. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ alors la transformée de Fourier de f en tant que fonction de $L^1(\mathbb{R}^n)$ coïncide avec la transformée de Fourier de f en tant que fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sur L^2, la transformée de Fourier est une isométrie bijective à une constante près.

Théorème 4.10 (Plancherel)**.** *Si $f \in L^2$ alors $\widehat{f} \in L^2$ et $\|\widehat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2}$. De plus, $\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^n f(-x)$. La transformation de Fourier est une bijection de L^2.*

Fin du cours 8 (18/10/2024).

4.3 Classe de Schwartz (fonctions à décroissance rapide) et transformation de Fourier

On appelle multi-indice un élément $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On définit $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial_{x_1}}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial_{x_n}}\right)^{\alpha_n}$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$

Définition 4.11. *On appelle espace de fonctions à décroissance rapide ou encore classe de Schwartz l'ensemble*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } x^\alpha \partial^\beta f \text{ soit bornée sur } \mathbb{R}^n \ \forall \alpha, \beta \text{ multi-indices}\}.$$

La classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel métrique complet (espace de Fréchet) avec comme distance

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$

où

$$p_n(f) = \sup_{x, |\alpha| \le n} (1+|x|)^n |\partial^\alpha f(x)|.$$

Proposition 4.12. *La classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ munie de la distance d est un espace vectoriel métrique complet.*

La convergence dans la classe de Schwartz équivaut à la convergence uniforme de tous les $x^\alpha \partial^\beta f$.
La transformation de Fourier est une bijection de la classe de Schwartz :

Théorème 4.13. *$\mathscr{F}$ est un isomorphisme topologique et algébrique de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{S}$ d'inverse*

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\, d\xi$$

La classe de Schwartz est stable par multiplication par des fonctions dites à croissance lente :

$$\mathscr{L}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } \forall \alpha\ \exists m \in \mathbb{N}, C > 0, |\partial^\alpha f(x)| \leq C(1 + |x|^m)\}.$$

Voici maintenant quelques propriétés de la transformation de Fourier et de la classe de Schwartz :

Proposition 4.14. *a) Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Alors l'application $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto f\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est linéaire et continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

b) Si $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a la continuité de l'application bilinéaire $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \ni (f, g) \mapsto f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

c) $\widehat{x^\alpha f} = (i\partial_\xi)^\alpha \widehat{f}$

d) $\widehat{\partial^\alpha f} = (i\xi)^\alpha \widehat{f}$

e) Soient φ et ψ deux fonctions à décroissance rapide. Alors

i) $\int \widehat{\varphi}\psi = \int \varphi\widehat{\psi}$

ii) $\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \int \varphi\overline{\psi} = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}} = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle_{L^2}$ (Parseval)

iii) $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$

iv) $\widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$

5 Distributions tempérées

5.1 Définition et premières propriétés

Définition 5.1. *On note par $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ou encore espace de distributions tempérées, le dual de $\mathscr{S}$, c'est-à-dire l'ensemble*

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C},\ u \text{ linéaire et continue }\}.$$

Pour $u \in \mathscr{S}'$, $\varphi \in \mathscr{S}$ on note $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle_{\mathscr{S}', \mathscr{S}}$.

Proposition 5.2. *Nous avons l'équivalence entre les deux affirmations qui suivent :*

— $u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ est distribution tempérée ;

— u est linéaire et $\exists C > 0, m \in \mathbb{N}$ tels que $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C p_m(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$.

Fin du cours 9 (08/11/2024).