Université Claude Bernard Lyon 1 2018-2019

Master de Mathématiques, 1re année
Parcours ≪Mathématiques générales≫
Analyse
Contrôle continu
Jeudi 11 octobre 2018 – Durée : 1h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Question de cours.

a) Définition sous-espaces topologiques supplémentaires.

b) Montrer que dans un espace de Banach, la projection sur un sous-espace vectoriel qui admet un supplémentaire topologique est continue.

Exercice 1.

On munit $C^0([0,1])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

a) Montrer que $C^0([0,1])$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

b) Montrer que l'application linéaire $T_1 : (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, $T_1(f) = \int_0^1 f(t)dt$ est continue.

c) Montrer que si l'on munit $C^0([0,1])$ de la norme, $\|\cdot\|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$, alors l'application linéaire $T_2 : (C^0([0,1]), \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$, $T_2(f) = f(0)$ n'est pas continue.

d) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes sur $C^0([0,1])$?

Exercice 2.

a) On définit $\ell^1 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \ ; \ \sum_{n\geq 1} |x_n| < \infty\}$ l'espace des suites sommables et on le munit de

$$\|x\|_1 = \sum_{n\geq 1} |x_n|.$$

Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme et que ℓ^1 muni de cette norme est un espace de Banach.

b) On définit $c_0 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \ ; \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ l'espace des suites qui tendent vers 0 à l'infini et on le munit de

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$$

Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme et que c_0 muni de cette norme est un espace de Banach.

c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur ℓ^1 ?

d) Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$. Montrer que l'application $T_\alpha : c_0 \to \mathbb{R}$

$$c_0 \ni x = (x_n)_{n\geq 1} \longmapsto T_\alpha(x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n x_n$$

est linéaire et continue. Montrer de plus que $\|T_\alpha\| = \sum_{n\geq 1} |\alpha_n|$.

e) Réciproquement, soit $S : c_0 \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. On pose $\alpha_n = S(e_n)$ où e_n est la suite nulle sauf à l'indice n où elle vaut 1 :

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\text{position } n}{1}, 0, 0, \dots)$$

(i) Que vaut

$$S(\text{sign}(\alpha_1), \text{sign}(\alpha_2), \dots, \text{sign}(\alpha_N), 0, \dots)$$

où $\text{sign}(a)$ est la fonction signe qui vaut 1 si $a > 0$, -1 si $a < 0$ et 0 si $a = 0$.

(ii) Utiliser la question précédente pour montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leq \|S\|$ et en déduire que $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 1} \in \ell^1$.

(iii) Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in c_0$ une suite qui tend vers 0. On définit x^N la suite égale à x_n jusqu'à l'indice N et 0 après :

$$x^N = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots).$$

Montrer que $x^N \to x$ dans c_0 lorsque $N \to \infty$.

(iv) Montrer enfin que $S = T_\alpha$.

f) Les questions précédentes nous permettent d'identifier le dual de c_0 à ℓ^1. En adaptant le raisonnement précédent, montrer maintenant que le dual de ℓ^1 s'identifie à ℓ^∞. On a noté par ℓ^∞ l'espace des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.