Université Claude Bernard Lyon 1 2019-2020

Master de Mathématiques, 1re année
Parcours ≪Mathématiques générales≫
Analyse
Contrôle continu 1
Jeudi 17 octobre 2019 – Durée : 1h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Question de cours. Montrer le résultat suivant **en énonçant soigneusement les théorèmes utilisés** :
Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E telles que $(E,\|\cdot\|_1)$ et $(E,\|\cdot\|_2)$ sont des espaces de Banach. Si $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$ pour une certaine constante C, alors les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Exercice 1. On désigne par ℓ^2 l'espace des suites réelles de carré sommable muni de la norme $\|\cdot\|_2$. L'ensemble des suites réelles sommables est noté par ℓ^1 et sa norme est notée par $\|\cdot\|_1$.

a) Montrer que $\ell^1 \subset \ell^2$. Cette injection est-elle continue ? Si oui, quelle est sa norme ?

b) Montrer que ℓ^1 n'est pas fermé dans ℓ^2. Quelle est son adhérence dans ℓ^2 ?

c) Soit $x^k \in \ell^1$ et $x = (x_n)$ une suite telle que $x^k \to x$ composante par composante quand $k \to \infty$. On suppose qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que $\|x^k\|_1 \leq M$ pour tout k.
   (i) Montrer que les sommes partielles de la série $\sum_n |x_n|$ sont toutes majorées par M.
   (ii) En déduire que $x \in \ell^1$ et que $\|x\|_1 \leq M$.

d) On considère pour chaque $p \geq 1$ l'ensemble
$$F_p = \{x = (x_n) \in \ell^2 \ ; \ \sum_n |x_n| \leq p\}.$$
Montrer que l'ensemble F_p est fermé dans ℓ^2.

e) Montrer maintenant que F_p est d'intérieur vide dans ℓ^2.

f) Montrer que ℓ^1 est d'intérieur vide dans ℓ^2.

Exercice 2. Soit E un espace normé réel et (x_n) une suite d'éléments de E qui sont linéairement indépendants. Soit également (a_n) une suite de réels. On considère les deux propriétés suivantes :

$(*)$ Il existe $f \in E'$ tel que $f(x_n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$(**)$ Il existe une constante C telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \lambda_0,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R} \ : \quad \Big|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k\Big| \leq C\Big\|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k\Big\|.$$

a) Montrer que $(*)$ implique $(**)$.

Soit X le s.e.v. engendré par la suite (x_n) muni de la norme induite de E.

b) Montrer qu'il existe exactement une application linéaire $g : X \to \mathbb{R}$ telle que $g(x_n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On suppose maintenant que la relation $(**)$ est vraie. Montrer que l'application g de la question précédente est aussi continue sur X.

d) Montrer enfin que $(**)$ implique $(*)$.