Université Claude Bernard Lyon 1 2018-2019

Master de Mathématiques, 1re année
Parcours ≪Mathématiques générales≫
Analyse
Contrôle continu
Mercredi 14 novembre 2018 – Durée : 1h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Question de cours.

Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ linéaire et continu. Montrer qu'il existe une unique application linéaire et continue $T^* : H \to H$ avec la propriété suivante :

$$\langle x, T(y)\rangle = \langle T^*(x), y\rangle \quad \forall x, y.$$

Montrer de plus que $\|T\| = \|T^*\|$. Comment appelle-t-on T^* ?

Exercice 1.

a) Soit $E_2 = L^2([-1,1])$ muni de la norme L^2. On définit l'ensemble

$$F_2 = \{f \in E_2\ ;\ \int_0^1 f(x)\,dx = 1\}.$$

Montrer que F_2 admet un unique élément de norme minimale.

b) Soit $E_1 = L^1([-1,1])$ muni de la norme L^1. On définit l'ensemble

$$F_1 = \{f \in E_1\ ;\ \int_0^1 f(x)\,dx = 1\}.$$

(i) Montrer que F_1 est un convexe fermé de E_1.

(ii) Montrer que pour tout $f \in F_1$ nous avons que $\|f\|_{L^1([-1,1])} \geq 1$.

(iii) Montrer que F_1 admet une infinité d'éléments de norme $L^1([-1,1])$ minimale.

Exercice 2. On rappelle que les fonctions en escaliers sont denses dans $L^2(I)$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x - 2k)$ si $x \in [2k, 2k+1]$, $f(x) = 2k + 2 - x$ si $x \in [2k+1, 2k+2]$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

a) Représenter la fonction f.

b) On pose $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = f(nx)$. Si $[a,b] \subset [0,2]$ déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

c) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge faiblement dans $L^2([0,2])$ et calculer sa limite faible.

d) Montrez que $(f_n)_n$ ne converge pas fortement dans $L^2([0,2])$.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace fermé. Soit P un projecteur sur F. Montrer l'équivalence entre :

a) P est la projection orthogonale sur F ;

b) $\forall x \in H$, $\|P(x)\| \leq \|x\|$.