CC2

Exercice 1 *(9-10 pts)* Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. On définit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} S & : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & & x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\, e_n & \longmapsto & Sx = \sum_{n\geqslant 1} x_{n-1}\, e_n \end{array}$$

1) Montrez que S est une isométrie. Est ce que S est unitaire ?

2) Pour tout $x \in \mathcal{H}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $x_n = S^n\, x$. Montrez que (x_n) converge faiblement vers 0. Montrez que (x_n) ne converge pas fortement.

3) Montrez que l'application adjointe S^* de S est donnée par

$$\begin{array}{rccc} S^* & : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & & x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\, e_n & \longmapsto & Sx = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{n+1}\, e_n \end{array}$$

4) a) Pour tout $x \in \mathcal{H}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $x'_n = (S^*)^n\, x$. Montrez que (x'_n) converge fortement vers 0.

b) Montrez que la suite d'applications linéaires $((S^*)^n)$ ne converge pas pour la norme triple de $\mathcal{L}(\mathcal{H}\,;\,\mathcal{H})$.

Exercice 2 *(7 pts)* L'objectif est de montrer que le dual de ℓ^1 s'identifie à ℓ^∞ en suivant le schema suivant.

On considère pour tout $u \in \ell^\infty$, l'application

$$\begin{array}{rcccc} T_u & : & \ell^1 & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum_n x_n\, u_n. \end{array}$$

a) Montrez que $T_u \in (\ell^1)'$.

b) Montrez que $|||T_u||| = ||u||_\infty$

Soit

$$\begin{array}{rcccc} T & : & \ell^\infty & \to & (\ell^1)' \\ & & u & \mapsto & T_u. \end{array}$$

c) Montrez que T est injective

d) Montrez que T est surjective.

e) Conclure

Exercice 3 *(5pts)* Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T : E \to F$ une application linéaire. Montrez que les 3 assertions suivantes sont équivalentes.

i) T est continue

ii) Pour toute suite $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ alors $Tx_n \rightharpoonup Tx$

iii) Pour toute suite $(x_n) \subset E$ telle que $x_n \to x$, alors $Tx_n \rightharpoonup Tx$.

(Pour iii) $\Rightarrow$ i), pensez au Théorème du graphe fermé).