Université Claude Bernard Lyon 1 2018-2019

Master de Mathématiques, 1re année
Parcours «Mathématiques générales»
Analyse
Contrôle continu
Mercredi 12 décembre 2018 – Durée : 1h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Question de cours.
Rappelez la définition des topologies faibles et faibles$*$.

Exercice 1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n qui vaut $1/2n$ sur l'intervalle $[-n,n]$ et 0 ailleurs.

a) Etudiez la convergence et la limite éventuelle de (h_n) dans $L^2(\mathbb{R})$.

b) Montrez que (h_n) tend vers 0 au sens des mesures de Radon sur $\mathbb{R}$. La suite (h_n) converge-t-elle fortement dans L^1 ? Et faiblement ?

c) En déduire que
$$\left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\,;\, \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0 \right\}$$
est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

a) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$.
   (i) Montrer que $f \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 \le p \le \infty$.
   (ii) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble A_ε de mesure non-nulle tel que $|f| > \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon$ p.p. sur A_ε.
   (iii) Montrer enfin que $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

b) On suppose maintenant que $f \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 \le p < \infty$ et qu'il existe une constante C indépendante de p telle que $\|f\|_{L^p} \le C$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

Exercice 3. Soient $1 < p_1, p_2 < \infty$ et soit T une application linéaire continue de $L^{p_1}(\mathbb{R})$ dans $L^{p_2}(\mathbb{R})$.
On considère les exposants conjugués $1/q_i + 1/p_i = 1$, $i = 1,2$.

a) Montrez que pour tout $g \in L^{q_2}(\mathbb{R})$, l'application $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} (Tf)(x)\,g(x)\,dx$ est une forme linéaire continue sur $L^{p_1}(\mathbb{R})$.

b) Montrez qu'il existe une unique application linéaire continue $S : L^{q_2}(\mathbb{R}) \to L^{q_1}(\mathbb{R})$ telle que
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,(Sg)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (Tf)(x)\,g(x)\,dx$$
pour tout $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}), g \in L^{q_2}(\mathbb{R})$.

c) Montrez que $|||S||| \le |||T|||$, puis que $|||S||| = |||T|||$.