Université Claude Bernard Lyon 1 2019-2020

Master de Mathématiques, 1re année
Parcours ≪Mathématiques générales≫
Analyse
Contrôle terminal
Jeudi 9 janvier 2020 – Durée : 3h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable et soit T une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

On dit que T est positif si $\langle Tx\,,\,x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

a) Montrer l'identité suivante :

$$4\langle Tx,y\rangle = \langle T(x+y),x+y\rangle - \langle T(x-y),x-y\rangle - i\langle T(x+iy),x+iy\rangle + i\langle T(x-iy),x-iy\rangle.$$

b) Montrez que si T est positif alors T est autoadjoint.

On admet que si T est positif alors il existe alors une unique application linéaire continue positive S, notée $\sqrt{T}$, telle que $S^2 = T$.

c) (i) Montrez que T^*T est autoadjoint positif.

(ii) On pose $|T| = \sqrt{T^*T}$. Montrez que $\mathrm{Ker}(|T|) = \mathrm{Ker}(T^*T) = \mathrm{Ker}(T)$.

Si T est positif, et pour un choix de base orthonormée (e_n) de $\mathcal{H}$, on pose

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_n \langle Te_n\,,\,e_n\rangle$$

(somme éventuellement infinie).

d) Montrez que si T est positif alors la quantité $\mathrm{Tr}(T)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormée (e_n). (On pourra remarquer que $\langle Te_n, e_n\rangle = \|Se_n\|^2$ où $S = \sqrt{T}$.)

e) Soit T une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Soit (e_n) une base orthonormée de $\mathcal{H}$.

(i) Montrer que e_n converge faiblement vers 0.

(ii) Montrez que (Te_n) converge faiblement vers 0.

(iii) Montrez que si T est compact alors (Te_n) converge fortement vers 0 (raisonnez par l'absurde).

On admet la réciproque du résultat ci-dessus : si (Te_n) converge vers 0 pour toute base orthonormée (e_n) alors T est compact.

f) Montrez que si T est positif et $\mathrm{Tr}(T) < \infty$, alors $\sqrt{T}$ est un opérateur compact. En déduire que T est compact aussi.

Exercice 2. Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

a) Montrez que l'espace ℓ^p est complet pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

b) Soit c_0 l'espace des suites réelles qui tendent vers 0 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que le dual de c_0 s'identifie à ℓ^1.

c) On considère l'espace de Banach $E = C^0([0,1])$ muni de la norme infinie. Montrez qu'il n'existe pas de produit scalaire sur E tel que $\|f\|_\infty^2 = \langle f, f\rangle$ pour tout $f \in E$.

d) Soit X un espace vectoriel normé. Soit $A \subset X$ une partie de X. Montrez que cette partie A est bornée si et seulement si, pour tout $f \in X'$ on a $\sup\{|f(a)|;\ a \in A\} < \infty$.

e) Soit T une application linéaire sur un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$. Montrez que si

$$\langle Tx, y\rangle = i\langle x, Ty\rangle$$

pour tous $x, y \in \mathcal{H}$, alors T est continue.

f) On considère l'espace $X = c_{00}$ des suites à valeurs complexes, nulles à partir d'un certain rang. On considère les normes ℓ^p usuelles sur X. On considère l'application S de X dans X définie par

$$(Sx)_n = x_{n+1}$$

pour tout n.

(i) Calculez la norme de S vue comme application de $(X, \|\cdot\|_p)$ dans $(X, \|\cdot\|_q)$, avec $1 \leq p < q < \infty$.

(ii) Que peut-on dire de la norme de S vue comme application de $(X, \|\cdot\|_p)$ dans $(X, \|\cdot\|_1)$, avec $1 < p < \infty$.