
Feuille de TD 1

Espaces vectoriels normés, applications linéaires.

Exercice 1
Vérifier que la fonction $(x, y) \mapsto \max(|x+3y|, |x-y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinez sa boule unité.

Exercice 2 Normes sur les matrices
Pour tout élément $X \in \mathbb{R}^n$, on pose $||X||_1 = \sum_{i=1}^n |X_i|$ et $||X||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |X_i|$.
Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$||A||_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|, \quad |||A|||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

1. Montrer que :

$$||A||_\infty = \sup\{||AX||_\infty \,;\ X \in \mathbb{R}^n : ||X||_1 \leqslant 1\},$$

$$|||A|||_\infty = \sup\{||AX||_\infty \,;\ X \in \mathbb{R}^n : ||X||_\infty \leqslant 1\}.$$

2. Montrer que l'on définit ainsi des normes sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $||AB||_\infty \leqslant n||A||_\infty \,||B||_\infty$ et $|||AB|||_\infty \leqslant |||A|||_\infty \,|||B|||_\infty$.

Exercice 3
Prouver que $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension infinie. Est-ce que les polynômes forment un ouvert dans E ? Un fermé ?

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel normé (evn). Quels sont les sous-espaces vectoriels F de E qui contiennent une boule ?

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel, et soit $p : E \to [0, \infty[$ une fonction telle que

1. $p(x) = 0 \iff x = 0$
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$.

Prouver que p est une norme sur E ssi l'ensemble $C = \{x \in E : p(x) \leqslant 1\}$ est convexe, c'est-à-dire

$$\forall t \in]0, 1[, x, y \in C \Rightarrow tx + (1-t)y \in C.$$

Exercice 6 Soit Λ une forme linéaire réelle (pas forcément continue) non nulle sur E evn réel. Prouver que $\Lambda(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ quand V est un ouvert dans E.

Exercice 7 Soit E un e.v.n., et soit L un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que L est fermé.

Exercice 8 Sur les e.v.n. (E, N_1) et (F, N_2) on considère des applications linéaires $T : E \to F$. Pour chacune d'elles dire si T est continue et le cas échéant calculer $|||T|||$.

1) $E = F = C([0,1]; \mathbb{R})$ avec la norme $N(f) = \int_0^1 |f(x)|\, dx$, et l'opérateur $T(f) = fg$ où g est un élément fixé de E.

2) a) $E = F = \mathbb{R}[X]$ avec $N(P) = \sum_k |a_k|$ et $T(P) = P'$.
b) $E = F = \mathbb{R}_n[X]$ avec $N(P) = \sum_k |a_k|$ et $T(P) = P'$.

c) $E = F = \mathbb{R}[X]$ avec $N(P) = \sum_k k!\,|a_k|$ et $T(P) = P'$.

3) $E = F = C([0,1];\mathbb{R})$ avec les normes $N_1(f) = \left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)^{1/2}$ et $N_2(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ resp., et l'opérateur $T(f) = fg$ où g est un élément fixé de E.

Exercice 9 Soit $E = C^\infty([0,1];\mathbb{R})$ et $T(f) = f'$ endomorphisme de E. Montrez que quelque soit la norme sur E l'application T n'est jamais continue sur E.

Exercice 10 Le but est de montrer qu'une forme linéaire $\varphi : (E, ||\cdot||) \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.

1) Montrez le sens direct

2) Inversement on suppose que $\operatorname{Ker}\varphi$ est fermé.
   a) Montrez que $\varphi^{-1}(\{1\})$ est fermé.
   b) Montrez qu'il existe une boule $B(0,r)$ $(r > 0)$ qui n'intersecte pas $\varphi^{-1}(\{1\})$.
   c) Montrez que pour tout $x \in B(0,r)$ on a $|\varphi(x)| \leqslant 1$.
   d) Conclure

Exercice 11

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$. Pour $x \in E$, on pose $d_A(x) = d(x,A)$ où $d(x,A) = \inf\{||x-a||, a \in A\}$.

1) Justifier l'existence de $d_A(x)$ pour chaque x de E.

2) a) Montrer que si A est fermée, alors $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
   b) Montrer que si A est fermée et E est de dimension finie, $\forall x \in E, \exists a \in A \,/\, d_A(x) = ||x-a||$.

3) Si A est quelconque, comparer $d_A(x)$ et $d_{\bar{A}}(x)$.

4) Montrer d_A est continue sur E.

5) A chaque partie fermée non vide A, on associe l'application d_A définie ci-dessus. Montrer que l'application $A \mapsto d_A$ est injective.

6) Dans l'espace des applications continues sur [0,1] à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme, on considère $A = \{f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geqslant 1\}$.
   a) Calculer $d_A(0)$.
   b) Montrez que A est fermé, mais que $d_A(0)$ n'est pas atteint.

Exercice 12 Sur $M_n(\mathbb{C})$ on considère la norme usuelle $|||A|||$ des matrices et $\rho(A) = \max\{|\lambda|\,;\ \lambda \in \sigma(A)\}$ le rayon spectral.

1) a) Montrez que $\rho(A) \leqslant |||A|||$.
   b) Montrez que $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.
   c) Montrez que $\rho(A) \leqslant |||A^k|||^{1/k}$.

2) On reprend la norme $|||A|||_\infty$ des matrices, vue dans l'exercice 2. Soit $S \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \operatorname{diag}(1, d, \dots, d^{n-1})$. Montrez qu'on peut définir une norme $N(X) = |||D^{-1}S^{-1}XSD|||_\infty$ telle que $N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon$.

3) Montrez que $\rho(A) = \lim_k |||A^k|||^{1/k}$