Feuille de TD 2

Exercice 1 Soit E un evn de dim finie et F un evn.

1) Montrez que toutes les normes sur E sont équivalentes.

2) Soit $u : E \to F$ linéaire, montrez que u est continue.

3) Soit $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\,;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Sur E on définit $N_0(a + b\sqrt{2}) = \left|a + b\sqrt{2}\right|$ et $N_1(a + b\sqrt{2}) = \max\{|a|, |b|\}$.

a) Montrez que ce sont des normes sur E.

b) Soit $x = \sqrt{2} - 1$, montrez que $x^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ et $a_n b_n < 0$. En déduire que $(\sqrt{2} + 1)^n = |a_n| + |b_n|\sqrt{2}$.

c) Montrez que N_0 et N_1 ne sont pas équivalentes sur E. Pourtant E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie, qu'en pensez-vous ?

Exercice 2 Soient E, F deux evn.

1) Montrez que si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet (en particulier E' est toujours complet).

2) Montrez que si $\overline{B}_E(0, 1)$ compact alors $\dim E < \infty$.

Exercice 3 Soit E un evn et $f \in E'$, $f \neq 0$. Soit $H = \mathrm{Ker} f$.

1) Montrez que $|f(x)| \leqslant \|f\|\, d(x, H)$.

2) Soit $u \in E \setminus H$, en utilisant $y = x - \frac{f(x)}{f(u)}u$ montrez que pour tout $x \in E$

$$d(x, H) = \inf\{\|x - h\|\,;\ h \in H\} = \frac{|f(x)|}{\|f\|}\,.$$

3) Soit $E = C_0$, l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0, muni de la norme uniforme.

a) Montrez que E est un espace de Banach.

b) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_n x_n/2^n$. Soit $H = \mathrm{Ker} f$. Montrez que $f \in E'$. Donnez une expression de $d(x, H)$. La norme $\|f\|_{E'}$ est elle atteinte ?

Exercice 4 Soit $E = C^1([0, 1])$, sur le quel on définit

$$N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\, dt\right)^{1/2}$$

et la norme $\|\cdot\|_\infty$ usuelle.

1) Montrez que N est une norme.

2) Montrez que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2} N(f)$.

3) Montrez que N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 5 Soit E un espace métrique complet tel que $\forall \varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon ε. Montrez que E est compact.

Montrez qu'un espace métrique compact est séparable.

Exercice 6 Soit E un evn et K une partie convexe de E, avec $0 \in K$. On pose

$$K^* = \{f \in E'\,;\ \forall x \in K\,,\ f(x) \leqslant 1\}$$
$$K^{**} = \{y \in E\,;\ \forall f \in K^*\,,\ f(y) \leqslant 1\}\,.$$

Montrez que $K^{**} = \overline{K}$.

Exercice 7 L'objet de cet exercice est de montrer qu'en dimension infinie on ne peut pas toujours séparer deux convexes fermés.

On considère l'espace de Banach ℓ^1 des suites. On pose :

$$A_0 = \{x \in \ell^1 \, ; \, \forall n \, , \, x_{2n} = 0\}$$
$$B = \{x \in \ell^1 \, ; \, \forall n \, , \, x_{2n} = 2^{-n} x_{2n-1}\} \, .$$

1) Montrez que A_0 et B sont convexes, fermés et que $\ell^1 = \overline{A_0 + B}$.

2) Soit $c \in \ell^1$ tel que $c_{2n-1} = 0$ et $c_{2n} = 2^{-n}$, $\forall n$. Montrez que $c \notin A_0 + B$. Montrez que si $A = A_0 - c$ on a $A \cap B = \emptyset$. Montrez que A et B ne peuvent pas être séparés au sens large.

Exercice 8 Soit E l'espace vectoriel $L^2([0,1])$ muni de la norme $||.||_1$ (induite par $L^1([0,1])$) et soit F l'espace vectoriel $L^2([0,1])$ muni de la norme $||.||_2$ usuelle. Montrer que l'application $L : E \to F$ définie par $L(x) = x$ admet un graphe fermé mais qu'elle n'est pas continue. Que peut-on en déduire sur $(E, ||.||_1)$?

Exercice 9 Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ linéaire. Montez que si $\forall f \in F'$ on a $f \circ T \in E'$ alors T est continue.

Exercice 10 Soit $E = C([0,1)]$ muni de $\| \cdot \|_\infty$. Soit F un sev fermé de E qui ne contient que des fonctions dérivables. On va montrer que F est de dim finie.

1) Soit $x_0 \in [0,1]$ fixé. Pour $y \neq x_0$ on définit l'opérateur

$$\Lambda_y \, : \, f \mapsto \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \, .$$

Montrez que $\Lambda_y \in E'$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $|\Lambda_y(f)| \leqslant M \|f\| \; \forall f \in F$, $\forall y \neq x_0$.

2) Montrez que la boule unité fermée B de F est équicontinue :

$$\forall x \in [0,1], \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \, ; \; \forall y \in B(x,r) \, , \; \forall f \in B \, , \; |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon \, .$$

3) Montrez que B est compacte. Conclure.

Exercice 11 1) Soit E un espace de Banach et soit (F_n) une suite de fermés de E telle que $E = \cup_n F_n$. Montrez que $\cup_n \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense de E.

2) Soit $(f_n) \subset C(\mathbb{R})$ telle que $f_n \to f$ simplement sur $\mathbb{R}$. On va montrer que f est continue sur une partie dense de $\mathbb{R}$.

Pour $\delta > 0$, on pose $F_{n,\delta} = \{x \in \mathbb{R} \; : \; \forall i,j \geqslant n \, , \; |f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \delta\}$. Montrez que $U_\delta = \cup_n \overset{\circ}{F}_{n,\delta}$ est un ouvert dense et que f est continue sur $U = \cap_k U_{1/k}$.

3) Soit $f \in C(\mathbb{R})$ dérivable partout. Montrez que f' est continue sur une partie dense de $\mathbb{R}$.