Feuille de TD 3

Exercice 1
Soit $E = \{u \in C^0([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$ avec la norme $||.||_\infty$

1. Montrer que E est un espace de Banach.
2. Montrer que $f(u) = \int_0^1 u(t)dt$ définit $f \in E'$.
3. Montrer que $||f||_{E'} = 1$.
4. Montrer qu'il n'existe pas $u \in E$ avec $f(u) = 1$ et $||u||_\infty = 1$.
5. Existe-il $v \in E''$ tel que $v(f) = 1$ et $||v||_{E''} = 1$?
6. On rappelle qu'il existe une application canonique $T : E \to E''$, $u \mapsto T_u$, telle que pour $u \in E$, $f \in E'$: $T_u(f) = f(u)$. En déduire que $T(E) \neq E''$ (E n'est pas réflexif).

Exercice 2 Soit $1 \leqslant p < \infty$.

1. Montrer que le dual de ℓ^1 s'identifie à ℓ^∞.
2. Déduire de l'injection continue dense $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$ que l'on a l'injection continue $(\ell^p(\mathbb{N}))' \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.
3. En utilisant Hölder, vérifiez que pour q tel que $1/p + 1/q = 1$, $T : \ell^q(\mathbb{N}) \to (\ell^p(\mathbb{N}))'$ avec $T(u)(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n x_n$.
4. Montrez que
$$||x||_{\ell^q(\mathbb{N})} = \sup\{\sum_{n=0}^\infty x_i y_i, ||y||_{\ell^p(\mathbb{N})} \leqslant 1, \, y \in \ell^1(\mathbb{N})\}$$
puis que tout élément de $(\ell^p(\mathbb{N}))' \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ est une suite de $\ell^q(\mathbb{N})$ et que l'on a l'isométrie $\ell^q(\mathbb{N}) \simeq (\ell^p(\mathbb{N}))'$.

Exercice 3 Il est clair que $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ (suite qui tendent vers 0) est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (suites bornées), $\ell^1(\mathbb{N})$ (suite absolument sommables) est un sous-espace de c_0. Soit $c := \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \lim_{n\to\infty} u_n \text{ existe}\} \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$

1. Est-ce que ce sont des sous-espaces fermés ? denses ?
2. Soit pour $u \in c$, $l(u) = \lim_{n\to\infty} u_n$. Montrer que l est une forme linéaire continue sur c.
3. En utilisant le théorème de Hahn-Banach, obtenir une forme linéaire $\phi \in (\ell^\infty(\mathbb{N}))'$ tel que $\phi \notin \ell^1(\mathbb{N})$.
4. Soit $T : c \to c_0$ l'application telle que $T(f) = g$ avec $g(0) = l(f)$ et $g(n) = (f(n-1) - l(f))/2$ pour $n > 1$.
   Montrer que $||T|| \leqslant 1$, T est inversible et $||T^{-1}|| \leqslant 3$.

Exercice 4 Soit $1 < p < \infty$. Montrer qu'une suite d'éléments de ℓ^p converge faiblement vers 0 dans ℓ^p si et seulement si elle est bornée dans ℓ^p et converge vers 0 composante par composante. (On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.)