

Feuille de TD 4

Exercice 1 Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f_0, f_1, \dots, f_n des formes linéaires sur E . Utiliser le théorème de Hahn-Banach pour montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

1. $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$;

2. $\exists M \in [0, \infty[$ tel que

$$\forall x \in E, |f_0(x)| \leq M \max_{i=1}^n |f_i(x)|,$$

3. $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f_0)$

Indication : pour (3) implique (1) séparer $\text{Im}(f_0, \dots, f_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de $(1, 0, \dots, 0)$.

Exercice 2 Soit $E = C^0([0, 1])$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit

$$C = \{u \in E : \int_0^1 |u(t)|^2 < 1\}$$

Vérifier que C est convexe ouvert symétrique ($-C = C$) et que $0 \in C$. C est-il borné ? Montrer que la jauge p de C est une norme sur E . Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 3 Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et f_1, \dots, f_k des formes linéaires sur E . Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il n'y a aucun $v \in E$ tel que $f_i(v) < 0$ pour tout $i \in [1, k]$;

2. L'ensemble $\{f_i : i = 1, 2, \dots, k\}$ est positivement linéairement dépendant : il existe un vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq 0$ avec $\lambda_i \geq 0$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i = 0$.

Indication : Montrer premièrement que (2) \Rightarrow (1). Dans l'autre sens, utiliser le théorème de séparation de Hahn-Banach pour

$$K_1 = \{y \in \mathbb{R}^k : y_i < 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}, \quad K_2 = \{(f_1(v), f_2(v), \dots, f_k(v)) : v \in E\}.$$

Exercice 4 Montrer que si $p : E \mapsto \mathbb{R}_+$ est telle que $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda > 0$ et $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ et $\exists M > 0, p(x) \leq M\|x\|$ alors l'ensemble $\{p < 1\}$ est un convexe ouvert contenant 0 dont p est la jauge.

Exercice 5 Soit A un sous-ensemble d'un espace de Banach E . On définit $A^\circ = \{f \in E', \sup_{x \in A} |f(x)| \leq 1\}$ et $A^{\circ\circ} = \{x \in E, \sup_{f \in A^\circ} |f(x)| \leq 1\}$. Montrer que $A^{\circ\circ} = \overline{\{\lambda_1 u + \lambda_2 v; (u, v) \in A^2, |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1\}}$.

Exercice 6 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x dans E espace de Banach. On pose

$$K_n = \overline{\text{Conv}\{x_n, x_{n+1}, \dots\}}.$$

Montrer que $\bigcap_{n=1}^\infty K_n = \{x\}$

Exercice 7 Soient x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) des points dans un espace de Banach séparable E . Prouver qu'il existe un $f \in E'$ qui minimise $f \mapsto f(x_0)$ sur l'ensemble $\{f \in E' : \|f\| \leq 1, f(x_i) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)\}$.

Exercice 8 Propriété de Schur de $\ell^1(\mathbb{N})$. On veut montrer que dans $\ell^1(\mathbb{N})$ une suite converge faiblement si et seulement si elle converge fortement. On va utiliser le lemme de Baire.

1. Rappeler pourquoi la convergence forte implique la convergence faible.
2. Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{Z}, |z| = 1\}$. $\Omega = \Gamma^{\mathbb{N}}$. Vérifier que Ω muni de la topologie produit est un espace métrique complet. On écrit $\omega = (Z_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$.
3. Supposons que pour tout $q \geq p$ $\|f_q\|_1 \geq 3a$ pour $a > 0$. Posons

$$G_q = \left\{ \omega \in \Omega : \left| \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) f_q(n) \right| \leq a \right\}$$

et

$$F_p = \bigcap_{q \geq p} G_q.$$

Montrer que $\overset{\circ}{F}_p = \emptyset$.

4. En utilisant le lemme de Baire obtenir $\omega \in \Omega \cap \bigcap_{p \geq 1} F_p^c$ et regarder ω comme une suite de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Trouver une sous-suite f_{p_k} tel que $\omega(f_{p_k}) \not\rightarrow 0$. Conclure.