Feuille de TD 4

Exercice 1 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f_0, f_1, ..., f_n$ des formes linéaires sur E. Utiliser le théorème de Hahn-Banach pour montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

1. $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in R^n$ tel que $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$;
2. $\exists M \in [0, \infty[$ tel que
$$\forall x \in E, |f_0(x)| \leqslant M \max_{i=1}^{n} |f_i(x)|,$$
3. $\cap_{i=1}^n Ker(f_i) \subset Ker(f_0)$

Indication : pour (3) implique (1) séparer $Im(f_0, ..., f_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de $(1, 0, ..., 0)$.

Exercice 2 Soit $E = C^0([0, 1])$ avec la norme $||.||_\infty$. Soit
$$C = \{u \in E : \int_0^1 |u(t)|^2 < 1\}$$
Vérifier que C est convexe ouvert symétrique ($-C = C$) et que $0 \in C$. C est-il borné ? Montrer que la jauge p de C est une norme sur E. Est-elle équivalente à $||.||_\infty$?

Exercice 3 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f_1, ..., f_k$ des formes linéaires sur E. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. Il n'y a aucun $v \in E$ tel que $f_i(v) < 0$ pour tout $i \in [1, k]$;
2. L'ensemble $\{f_i : i = 1, 2, ..., k\}$ est positivement linéairement dépendant : il existe un vecteur $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \neq 0$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ tel que $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i = 0$.

Indication : Montrer premièrement que (2) $\Rightarrow$ (1). Dans l'autre sens, utiliser le théorème de séparation de Hahn-Banach pour
$$K_1 = \{y \in \mathbb{R}^k : y_i < 0, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}\}, \quad K_2 = \{(f_1(v), f_2(v), ..., f_k(v)) : v \in E\}.$$

Exercice 4 Montrer que si $p : E \mapsto \mathbb{R}_+$ est telle que $p(\lambda x) = \lambda p(x), \lambda > 0$ et $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ et $\exists M > 0, p(x) \leqslant M\|x\|$ alors l'ensemble $\{p < 1\}$ est un convexe ouvert contenant 0 dont p est la jauge.

Exercice 5 Soit A un sous-ensemble d'un espace de Banach E. On définit $A^\circ = \{f \in E',\ \sup_{x\in A} |f(x)| \leqslant 1\}$ et $A^{\circ\circ} = \{x \in E,\ \sup_{f\in A^\circ} |f(x)| \leqslant 1\}$. Montrer que $A^{\circ\circ} = \overline{\{\sum_{k\in \text{ens. fini}} \lambda_k u_k\ ;\ u_k \in A\ \forall k,\ \sum_k |\lambda_k| \leqslant 1\}}$.

Exercice 6 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x dans E espace de Banach. On pose
$$K_n = \overline{Conv\{x_n, x_{n+1}...\}}.$$
Montrer que $\bigcap_{n=1}^\infty K_n = \{x\}$

Exercice 7 Soient x_i $(i = 0, 1, ..., n)$ des points dans un espace de Banach séparable E. Prouver qu'il existe un $f \in E'$ qui minimise $f \mapsto f(x_0)$ sur l'ensemble $\{f \in E' : ||f|| \leqslant 1, f(x_i) = 0 (i = 1, 2, ..., n)\}$.

Exercice 8 **Propriété de Schur de ℓ^1.** On veut montrer que dans ℓ^1 une suite converge faiblement si et seulement si elle converge fortement. On va utiliser le lemme de Baire. Soit $x^k = (x^k_n)_n$ une suite de ℓ^1 qui converge faiblement vers 0 dans ℓ^1 : $x^k \rightharpoonup 0$ quand $k \to \infty$. On suppose par l'absurde que x^k ne tend pas vers 0 fortement.

1. Rappeler pourquoi la convergence forte implique la convergence faible.
2. Montrer que la convergence faible dans ℓ^1 implique la convergence composante par composante.
3. Soit $\Omega = \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$. Vérifier que Ω muni de la topologie produit est un espace métrique complet. On écrit $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$.
4. Supposons que pour tout $k \geqslant p$ on a $||x^k||_1 \geqslant 3\varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Posons

$$G_k = \{\omega \in \Omega : \left|\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n x_n^k\right| \leqslant \varepsilon\}$$

et

$$F_p = \bigcap_{k\geqslant p} G_k.$$

Montrer que $\overset{\circ}{F_p} = \emptyset$.
5. En utilisant le lemme de Baire obtenir l'existence d'un $\omega \in \Omega \cap \bigcap_{p\geqslant 1} F_p^c$ et regarder ω comme une suite de $\ell^\infty = (\ell^1)'$. Trouver une sous-suite x^{p_k} telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n x_n^{p_k} \not\to 0$. Conclure.