

---

Feuille de TD 5

---

**Exercice 1**

1. Montrer  $\{1_A, A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$  est un sous-ensemble fermé de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ .
2. Montrer que  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  n'est pas séparable.
3. Montrer que  $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1_{(1/n+2), 1/(n+1]}$  définit une isométrie  $T : \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow L^\infty([0, 1])$  et en déduire que  $L^\infty([0, 1])$  n'est pas séparable.

**Exercice 2** Soit  $X$  un espace normé et  $Y$  un espace de Banach. Montrer que si  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $X$ , alors toute application linéaire et continue de  $V$  dans  $Y$  se prolonge de manière unique en une application linéaire et continue de  $\bar{V}$  dans  $Y$ .

**Exercice 3** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $V$  un s.e.v. de  $H$ . Montrer directement (sans utiliser Hahn-Banach) que toute forme linéaire et continue sur  $V$  se prolonge en une forme linéaire et continue sur  $H$ .

**Exercice 4** Soit  $X$  un espace normé et  $E$  un s.e.v. de dimension finie.

1. Soit  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ . Montrer qu'il existe  $f_1, \dots, f_n \in X'$  telles que  $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$  pour tous  $i, j$ .
2. Montrer qu'il existe une projection linéaire et continue de  $X$  sur  $E$  de norme au plus égale à  $\sum_{i=1}^n \|f_i\| \|e_i\|$ .

**Exercice 5** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces de Banach et  $T : X \rightarrow Y$  linéaire et continue. Pour tout  $f \in Y'$  on définit  $g = f \circ T$ .

1. Montrer que si  $f \in Y'$  alors  $g \in X'$  et que l'application  $T'(f) = g$  est linéaire et continue de  $Y'$  dans  $X'$ .
2. Montrer que  $\|T'\| = \|T\|$ .
3. Montrer que  $T'$  est injectif si et seulement si  $T(X)$  est dense dans  $Y$ .

**Exercice 6 Identités de polarisation :** Soit  $E$  un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $\| \cdot \|$  la norme associée.

1. Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , montrer que l'on a pour tout  $x, y \in E$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$$

2. Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , montrer que l'on a pour tout  $x, y \in E$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [+\|x + y\|^2 - \|-x + y\|^2 - i\|ix + y\|^2 + i\|-ix + y\|^2].$$

3. En déduire que l'on peut toujours retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

**Exercice 7** On considère un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{R}$  muni d'une norme  $\| \cdot \|$  vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

L'objectif est de montrer que  $E$  muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire et compte tenu de l'exercice on pose

$$\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2].$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout  $x, y \in E$  on a  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$  et  $\langle -x, y \rangle = \langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle$ .
2. Montrer que pour  $x, y, z \in E$  on a  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  (On pourra montrer d'abord l'égalité suivante :  $\langle x + y, z \rangle = 2\langle y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle$ .)
3. Montrer, en utilisant b), que si  $x, y \in E$  et  $r \in \mathbb{Q}$  on a  $\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle$  et, en utilisant un argument de continuité, que c'est encore vrai pour  $r \in \mathbb{R}$ .
4. En déduire que  $\langle x, y \rangle$  définit bien un produit scalaire sur  $E$  qui donne la norme  $\| \cdot \|$ .

### Exercice 8

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $F \subset H$  un sous-espace fermé. Soit  $P$  une projection de  $H$  sur  $F$ .

Montrer l'équivalence entre

1.  $P$  est la projection orthogonale
2.  $\|P\| = 1$
3.  $|\langle P(x), x \rangle| \leq \|x\|^2$  pour tout  $x \in H$ .

### Exercice 9 Polynômes de Laguerre

Soit  $\mu$  la mesure sur  $[0, \infty[$  de densité  $e^{-x}$  par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire  $\mu(A) = \int_A e^{-x} dx$ . Soit

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^n).$$

Montrer que  $L_n$  est une famille orthogonale de polynômes de  $L^2([0, \infty[, \mu)$ .

### Exercice 10 Deux Identités du parallélogramme généralisées

Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $x_1, \dots, x_n \in H$

1. Montrer que pour  $t \in ]0, 1[$ , on a :

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\|^2 + t(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 = t\|x_1\|^2 + (1-t)\|x_2\|^2.$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \|\epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

3. Supposez par l'absurde qu'il existe  $T : \ell^p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$  un isomorphisme (linéaire) et considérer  $x_i = T(e_i)$  et obtenir une contradiction si  $1 \leq p < 2$
4. Montrer que si  $p \neq 2$ , on a  $\ell^p(\mathbb{N}) \not\cong \ell^2(\mathbb{N})$ .

### Exercice 11

Soit  $H = L^2(\Omega, \mu, \mathbb{R})$ . On pose  $C = \{f \in H : f \geq 0 \text{ p.p.}\}$ .

Montrer que  $C$  est un convexe fermé et que  $P_C(f) = f1_{\{f \geq 0\}}$ .