Feuille de TD 6

Exercice 1
Soient H un espace de Hilbert et $u \in B(H)$. Montrer l'équivalence entre

a) u est une isométrie, c'est à dire $||u(x)||_2 = ||x||_2$ pour tout $x \in H$.
b) Pour tout $x, y \in H$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
c) $u^*u = Id$

(Indication :penser à l'identité de polarisation).

Exercice 2
Soient H un espace de Hilbert et $v \in B(H)$. Montrer l'équivalence entre

a) Pour tout $x \in Ker(v)^\perp$, on a $||v(x)||_2 = ||x||_2$
b) $v^*vv^* = v^*$
c) $vv^*v = v$
d) Pour tout $x \in Ker(v^*)^\perp$, on $||v^*(x)||_2 = ||x||_2$

On dit que v est une isométrie partielle si a) est vérifié. Nous avons donc montré que l'adjoint d'une isométrie partielle est une isométrie partielle.

Exercice 3 Soit H un espace de Hilbert séparable. Montrer que tout ensemble orthonormal E est au plus dénombrable. (Indication : si G est dénombrable dense, construire une injection de E dans G en considérant des boules de rayon $\frac{1}{2}$.)

Exercice 4 Soit H un espace de Hilbert.

a) Soit $x, y \in H$ avec $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2$. Montrer que $x = y$.

Soient (x_n) et (y_n) deux suites de H vérifiant $\|x_n\| \leqslant 1$ et $\|y_n\| \leqslant 1$.

b) On suppose que $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$ quand $n \to \infty$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.
c) On suppose que $\|x_n + y_n\| \to 2$ quand $n \to \infty$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.

Exercice 5 Soient H un espace de Hilbert séparable, (e_n) une base hilbertienne et (f_n) une suite orthonormale. On suppose que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|e_n - f_n\|^2 < \infty.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que (f_n) est aussi une base hilbertienne.

a) Soient $g \in H$, $N \in \mathbb{N}$ et $f_n \perp g$ pour tout $n \geqslant N$. Montrer l'inégalité

$$\|\sum_{n\geqslant N} \langle e_n, g\rangle e_n\|^2 \leqslant \|g\|^2 \sum_{n\geqslant N} \|e_n - f_n\|^2.$$

On choisit maintenant un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n\geqslant N} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

b) Montrer que tout vecteur g orthogonal à $e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}$ et $f_N, f_{N+1}, \ldots$ est nul.

c) On considère les vecteurs

$$\eta_n = e_n - \sum_{k \geqslant N} \langle e_n, f_k \rangle f_k, \quad n < N.$$

Montrer que tout vecteur g orthogonal à $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}$ et $f_N, f_{N+1}, \dots$ est nul.

d) Soit S l'orthogonal de l'espace engendré par les vecteurs $f_N, f_{N+1}, \dots$. Montrer que $\eta_n \in S$ pour tout $n < N$ et que S est engendré par $\eta_0, \dots, \eta_{N-1}$.

e) Montrer enfin que (f_n) est une base hilbertienne.

Exercice 6 On note par X l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{iwt} \in \mathbb{C}$ où w parcourt $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in X$ on pose

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) \overline{g(t)} \, dt.$$

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur X.

b) Vérifier que la famille $(e^{iwt})_{w \in \mathbb{R}}$ est orthonormale.

c) X est-il un espace de Hilbert ?

Exercice 7 Soient E et F deux sous-espaces fermés orthogonaux d'un espace de Hilbert. Montrer que $E + F$ est fermé.

Exercice 8 Soient E et F deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert. Montrer les égalités suivantes :

$$(E + F)^{\perp} = E^{\perp} \cap F^{\perp}, \qquad (E \cap F)^{\perp} = \overline{E^{\perp} + F^{\perp}}.$$

Exercice 9 Soient $H = L^2(0, 1)$ et

$$V = \{ f \in H \ ; \ \int_0^1 f = \int_0^{\frac{1}{2}} f = 0 \}.$$

a) Montrer que V est fermé dans H. Déterminer une base de $V^{\perp}$.

b) Soit $f(x) = x$. Calculer la projection orthogonale de f sur V, puis $d(f, V)$.

Exercice 10 Soit H un espace de Hilbert $T : H \to H$ linéaire et continue. Déterminer l'adjoint T^* dans les cas suivants :

a) T est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé V.

b) $H = \mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$ et T est de matrice A dans une base orthonormée.

c) $H = L^2(X, \mu)$ et $Tf = hf$ avec h bornée donnée.

d) $H = L^2(X, \mu)$ et $Tf(x) = \int_X K(x, y) f(y) \, d\mu(y)$ où $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$ s'appelle le noyau intégral de T.