Feuille de TD 8

Exercice 1 **Transformée de Fourier** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction intégrable. On note $\langle \xi, x\rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$ le produit scalaire usuel.

1. Montrer que la fonction suivante
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)dx$$
est bien définie et appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. Montrer que $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini : $\lim_{||x||\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

Exercice 2 On fixe $1 \leqslant p < q < \infty$.

1. Soit $f \in L^q(]0,1[)$. Montrer que $f \in L^p(]0,1[)$ et que $\lim\limits_{p\to q, p\leqslant q} ||f||_p = ||f||_q$.
2. On suppose maintenant $g \in L^\infty(]0,1[)$. Montrer que $\lim\limits_{p\to\infty} ||g||_p = ||g||_\infty$. (On pourra considérer l'ensemble $\{x, |g(x)| \geqslant \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$.)
3. On suppose que $f \in L^q(]0,1[)$ pour tout $1 < q < \infty$ et qu'il existe $C > 0$ tel que $||f||_q \leqslant C$ pour tout $1 < q < \infty$. Montrer que $f \in L^\infty(]0,1[)$.
4. Trouver une fonction dans $L^q(]0,1[)$ pour tout $1 < q < \infty$ mais pas dans $L^\infty(]0,1[)$.

Exercice 3 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$, et que l'injection est continue.

Exercice 4 Soit $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. Montrer que $\{f \in L^p(\Omega); ||f||_q \leqslant 1\}$ est fermé dans $L^p(\Omega)$. (On pourra utiliser le lemme de Fatou.)

Exercice 5 Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$.

1. Montrer que $L^q([0,1])$ est un sous-espace strict de $L^p([0,1])$.
2. Peut-on comparer pour l'inclusion $L^q(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{R})$ en d'autres termes est ce qu'on a une inclusion entre les deux (justifier) ?
3. Construire un sous-espace de $L^p([0,1])$ isométrique à $\ell^p(\mathbb{N})$.

Exercice 6 **Convolution** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n), g \in L^p(\mathbb{R}^n), h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $1/p + 1/q = 1$.

1. Soit $\check{f}(x) = f(-x)$. Montrer que :
$$\int (g * f)h = \int g(h * \check{f}).$$
2. Montrer que si $p = 1$, $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$. (Notation ex 1 de la transformée de Fourier)

Exercice 7 Soit ρ_n une suite régularisante et $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$:
$$\sup_{x\in K} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| \to 0$$
quand $n \to \infty$.

2. En déduire que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $||.||_\infty$ induite par $C_b^0(\mathbb{R}^d)$.
3. Montrer que l'adhérence de $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $C_b^0(\mathbb{R}^d)$ est

$$C_0^0(\mathbb{R}^d) = \{f \in C_b^0(\mathbb{R}^d) : \lim_{||x|| \to \infty} |f(x)| = 0\}.$$

Exercice 8 Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$. Montrer que $f * \varphi_\varepsilon \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ où φ_ε est une suite régularisante. (Indication : commencer par supposer f régulière à support compact, puis raisonner par densité.)

Exercice 9 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\int_a^b f = 0 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^x f(t)\,dt\Big) g'(x)\,dx = 0$$

2. Soit maintenant $h \in L^\infty(\mathbb{R})$. On pose

$$h_n = \big(\chi_{[-n,n]} h\big) * \varphi_{\frac{1}{n}}$$

où $\varphi_{\frac{1}{n}}$ est une approximation de l'identité paire. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f h_n = 0$$

3. En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} f * \varphi_{\frac{1}{n}}\ \chi_{[-n,n]} h = 0$$

4. Montrer que $\chi_{[-n,n]} h \to h$ faible$*$ dans L^∞ et $f * \varphi_{\frac{1}{n}} \to f$ fortement dans L^1. (On pourra utiliser la densité de C_c^∞ dans L^1.) Montrer aussi que $h_n \to h$ faible$*$ dans L^∞.
5. En déduire que $\int fh = 0$ et conclure que $f = 0$ p.p. (On pourra utiliser que le dual de L^1 est L^∞.)
6. Montrer la même chose lorsque f est défini sur un intervalle de $\mathbb{R}$ seulement.

Exercice 10 On fixe $1 \leqslant p < \infty$.

Soit $AC^p([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $g \in L^p([a,b])$ avec $f(t) = f(a) + \int_a^t g(u)du$. L'exercice précédent montre que g est unique p.p. On pose alors

$$||f||_{AC^p}^p = |f(a)|^p + \int_a^b |g(t)|^p dt.$$

Montrer que $AC^p([a,b])$ est un espace de Banach.