Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Calcul différentiel et Analyse complexe

Contrôle Continu no 1

Exercice 1. On fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & P(A) \end{array}.$$

1. Dans cette question, $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$.
   Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
2. Dans cette question, P est quelconque.
   Montrer que f est différentiable en I (la matrice identité) et déterminer sa différentielle en I.

Exercice 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On se donne une application $f : U \to V$ bijective. On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que f est différentiable en x_0 et que f^{-1} est différentiable en $f(x_0)$. Montrer que $n = m$.

Exercice 3. Soit $\varphi :]0, \infty[\times] - \pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ le changement des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires, c'est-à-dire l'application $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$.

1. Montrer que φ est différentiable et déterminer sa matrice jacobienne.
2. Montrer que φ est inversible sur son image $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ et que φ^{-1} est différentiable.
3. Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}$ en termes des dérivées partielles $\dfrac{\partial}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$.
   Autrement dit, soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $\tilde{f} = f \circ \varphi$ son expression en coordonnées polaires. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}$.

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Calcul différentiel et Analyse complexe

Correction du CC no 1

Correction de l'exercice 1.

1. Soient $A, H \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} P(A+H) &= a(A+H)^2 + b(A+H) + cI \\ &= a(A^2 + AH + HA + H^2) + bA + bH + cI \\ &= P(A) + aAH + aHA + bH + aH^2. \end{aligned}$$

   L'application $L : H \mapsto aAH + aHA + bH$ est linéaire et l'application $\alpha : H \mapsto aH^2$ est un $o(\|H\|)$. En effet en choisissant par exemple la norme de Frobenius, on aura

$$\left\| \frac{\alpha(H)}{\|H\|} \right\| = \frac{1}{\|H\|} |a| \|H^2\| \leq \frac{1}{\|H\|} |a| \|H\|^2 = |a| \|H\|$$

   et ceci tend vers 0 lorsque H tend vers 0. Par conséquent, f est différentiable en A et $Df(A) = L$.

2. Sans donner tous les détails : on commence par le cas $P = X^k$ et on développe $(I+H)^k$ ce qui donne $I^k + kH + o(\|H\|)$. Pour le cas général, on écrit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$ et on obtient :

$$\begin{aligned} P(I+H) &= \sum_{k=0}^{d} a_k (I+H)^k \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k (I^k + kH) + o(\|H\|) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k I^k + \sum_{k=0}^{d} a_k k H + o(\|H\|) \\ &= P(I) + P'(1)H + o(\|H\|). \end{aligned}$$

   Par conséquent, f est différentiable en I et l'application $H \mapsto P'(1)H$ est sa différentielle en I.

Correction de l'exercice 2.

On note $g = f^{-1}$. On alors $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = D\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(x_0) = D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$. Ainsi ces deux applications linéaires sont bijectives (car on est en dimension finie). Par conséquent les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont de même dimension.

Correction de l'exercice 3.

1. La matrice jacobienne de φ est

$$J\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

   et toutes les dérivées partielles sont bien définies et continues sur le domaine de définition de φ, donc φ est continûment différentiable.

2. La réciproque de φ est la fonction $\varphi^{-1}(x,y) = (r,\theta)$ où

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ -\arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est continue partout et en particulier sur l'axe $\{(x,0), x > 0\}$, car

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x>0}} \pm \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \pm \arccos\left(\frac{x}{|x|}\right) = \pm \arccos 1 = 0,$$

et elle est différentiable partout car ses dérivées partielles, qu'on peut aussi déduire de la matrice jacobienne

$$J(\varphi^{-1})(x,y) = (J\varphi)^{-1}(x,y) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

sont bien définies et continues sur l'image de φ.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et posons $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Alors on a $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ et par conséquent on calcule $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = Jf(x,y)$ à partir de

$$\begin{aligned} Jf(x,y) &= J\tilde{f}(\varphi^{-1}(x,y)) \cdot J\varphi^{-1}(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r} & \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient enfin

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}. \end{aligned}$$