Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Calcul différentiel et Analyse complexe

Contrôle Continu no 3

Exercice 1. Soit C le cercle unité parcouru dans le sens direct et soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant le disque fermé $\overline{D(0,1)}$.

a) Exprimer l'intégrale
$$I = \int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz$$
en fonction des valeurs $f(0)$ et $f'(0)$.

b) Déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\, \cos^2(t/2)\, dt.$$

Exercice 2. Soit f une fonction entière. On suppose f périodique de période 1 et i. Montrer que f est constante.

Corrigé de l'exercice 1.

a) D'après les formules de Cauchy, on a

$$I = 2\int_C \frac{f(z)}{z}\,dz + \int_C f(z)\,dz + \int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i\,(2f(0) + 0 + f'(0)).$$

b) On paramétrise le cercle unité par l'application $\gamma(t) = e^{it}$, avec $t \in [0, 2\pi]$. On trouve alors

$$I = \int_0^{2\pi} (2 + e^{it} + e^{-it})\, f(e^{it})\, i\, dt = 4i \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2)\, dt.$$

On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\; \cos^2(t/2)\, dt = \pi^2(2f(0) + f'(0)).$$

Corrigé de l'exercice 2.

L'idée est de montrer que f est bornée, on conclut alors que f est constante en appliquant le théorème de Liouville.

Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, appellons n la partie entière de x, et m la partie entière de y. Puisque f est 1-périodique on a $f(z) = f(z - n)$, et puisque f est i-périodique, on a $f(z) = f(z - n - im)$.

Mais $z - n - im$ est un nombre complexe de partie réelle comprise entre 0 et 1 et de partie imaginaire comprise entre 0 et 1. Notant K le carré de sommets $0, 1, 1+i, i$, on en déduit que $|f(z)| \leq \sup_{w\in K} |f(w)|$.

Puisque f est continue sur le compact K, la valeur $\sup_{w\in K} |f(w)|$ est finie, ce qui achève la preuve que f est bornée.