Université Claude Bernard Lyon 1 2020-2021

Licence de Mathématiques, 3e année
Parcours ≪Mathématiques générales et applications≫
Calcul différentiel et analyse complexe
Contrôle Continu 3
Mardi 11 mai 2021 – Durée : 1h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. (9 points) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.

a) Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros distincts, tous d'ordre fini.

b) Soient $a_1, \ldots, a_p$ les zéros de f de multiplicités $m_1, \ldots, m_p$. On pose

$$g(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1} \ldots (z-a_p)^{m_p}}{f(z)}.$$

Montrer que g n'a que des fausses singularités et que g s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sans zéros.

c) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une constante C tel que $|g(z)| \leq C(1+|z|)^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

d) Montrer que g est un polynôme.

e) Montrer que g est constante et conclure que f est un polynôme.

Exercice 2. (8 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

On pourra utiliser sans démontrer les exemples faits dans le cours.

Exercice 3. (8 points) Pour chacune des relations suivantes, existe-t-il des fonctions holomorphes dans $D(0,1)$ les vérifiant ? Si oui, déterminer toutes ces fonctions.

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3}$ et $f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$ pour tout $n \geq 2$;

b) $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 2$;

c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}$ pour tout $n \geq 2$;

d) $n^{-5/2} \leq \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq 2n^{-5/2}$ pour tout $n \geq 2$.