Université Claude Bernard Lyon 1 2020-2021

Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours «Mathématiques générales et applications»
Calcul différentiel et analyse complexe
Contrôle terminal
Mardi 25 mai 2021 – Durée : 3h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. (5 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en tout point.

b) Trouver tous les points (x,y) où f admet des dérivées partielles.

c) Trouver tous les points (x,y) où f est différentiable.

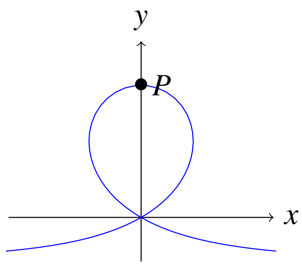
d) Déterminer le plus grand ouvert U tel que f est de classe C^1 sur U.

Exercice 2. (2 points) Trouver le rayon de convergence R et à l'intérieur du disque $B(0,R)$ calculer la somme de la série entière $\sum_0^\infty n^2 z^{2n}$.

Exercice 3. (5 points) La *trisectrice de Maclaurin* est la courbe C representée dans le dessin, obtenue comme lieu des zéros de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2y + y^3 + x^2 - 3y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit P le point de C ayant abscisse $x_0 = 0$ et ordonnée $y_0 > 0$.



a) À l'aide du théorème des fonctions implicites, trouver le D.L. à l'ordre 2 d'une paramétrisation locale de C autour du point P.

b) Calculer la courbure de C en P.

Exercice 4. (7 points) Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe où $D = D(0,1)$ est le disque unité. On suppose qu'il existe $a, b \in D$, $a \neq b$, tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Soit

$$g(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}.$$

On rappelle le lemme Schwarz suivant :

Lemme de Schwarz. Soit $\varphi : D \to D$ holomorphe telle que $\varphi(0) = 0$. Alors $|\varphi(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et $|f'(0)| \leq 1$.

a) Montrer que g est un automorphisme du disque unité, c'est-à-dire une bijection holomorphe, d'inverse holomorphe, de D dans D. (On ne se contentera pas de citer un résultat du cours ou du TD, la preuve complète est demandée.)

b) On pose $h = g^{-1} \circ f \circ g$. Montrer que h est holomorphe de D dans D, que $h(0) = 0$ et qu'il existe $c \in D \setminus \{0\}$ tel que $h(c) = c$.

c) Montrer que $z \mapsto h(z)/z$ est une fonction holomorphe de D dans $\overline{D}$.

d) En déduire que $h(z) = z$ pour tout $z \in D$, puis que $f(z) = z$ pour tout $z \in D$.

e) Est-ce que l'énoncé suivant est vrai ? Justifiez votre réponse.

   Soit $\Omega \neq \emptyset, \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Toute fonction holomorphe de Ω dans Ω avec au moins deux points fixes distincts est nécessairement l'identité.

f) Est-ce que l'énoncé suivant est vrai ? Justifiez votre réponse.

   Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec au moins deux points fixes distincts est nécessairement l'identité.

Exercice 5. (5 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos t + \sin t}\, dt.$$