Calcul Différentiel et Analyse Complexe

—

Examen partiel, 20 mars 2019

Durée : 2h ; calculettes interdites ; seule une feuille A4 (recto-verso) de notes personnelles est autorisée ; chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.

Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté. Le barème dépasse largement 20, il n'est pas obligatoire de résoudre tous les exercices. Les questions avec une étoile portent plus sur l'analyse complexe, faite en CM mais pas en TD, valent 2 points chacune (déjà comptabilisés dans la valeur de chaque exercice) et il est peut-être judicieux de les traiter dans un deuxième temps. Sans ces questions, le barème est donc de 24 points.

Exercice 1 (10 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x, y) = (e^{2x} \cos y, e^x \sin y).$$

1. Justifier que f est une fonction C^∞ et écrire sa matrice Jacobienne.
2. Prouver que f est localement un difféomorphisme autour de chaque point de $\mathbb{R}^2$.
3. Trouver toutes les images réciproques des points $(0, 0), (0, 1)$ et $(1, 0)$. La fonction f est-elle injective ? surjective ? globalement un difféomorphisme ?
4. * On identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. La fonction f est-elle holomorphe ?
5. * Trouver tous les points de $\mathbb{C}$ où f admet une dérivée complexe.

Exercice 2 (5 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Prouver que f est différentiable en tout point mais pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les dérivées partielles de f sont-elles bornées sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Exercice 3 (9 points)**.** Considérer la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(\theta) := (\cos(\theta), \sin(3\theta)).$$

1. Prouver que cette courbe est régulière.
2. Est-elle parametrée par longueur d'arc ?
3. En distinguant le cas $|\theta - k\pi| \leq \pi/12$ et $|\theta - k\pi| > \pi/12$, prouver que l'on a $\|\gamma'(\theta)\|^2 \geq \min\{\sin^2(\pi/12), 9/2\}$. En déduire $\|\gamma'(\theta)\| \geq 0.2$.
4. Donner une expression de la courbure de γ comme fonction de θ à l'aide de fonctions élementaires, et justifier qu'elle ne dépasse jamais 1500.
5. Soit $L(\gamma)$ la longueur de cette courbe. Prouver que l'on a
$$2\sqrt{5} + 2\sqrt{11 - 4\sqrt{3}} + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{3}} \leq L(\gamma) \leq 2\pi\sqrt{10}.$$
6. * On considère maintenant cette courbe comme un chemin dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Trouver l'indice par rapport à cette courbe des points $z_0 = 0, -3/4, 1 + i$.

Exercice 4 (6 points)**.** Considérer la courbe plane

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^4 - y^3 + 5x^2y + 1 = 0\}.$$

1. Montrer qu'il existe une paramétrisation locale de C au voisinage du point $(0, 1)$ sous la forme d'un graphe $y = \varphi(x)$.
2. Trouver le developpement de cette fonction φ à l'ordre 2 au voisinage du même point.
3. Trouver la courbure de la courbe C au point $(0, 1)$.

Calcul Différentiel et Analyse Complexe

—

Examen partiel, 20 mars 2019

Durée : 2h ; calculettes interdites ; seule une feuille A4 (recto-verso) de notes personnelles est autorisée ; chaque exercice est à composer sur une feuille distincte.

Les exercices et les questions ne sont pas forcément en ordre de difficulté. Le barème dépasse largement 20, il n'est pas obligatoire de résoudre tous les exercices. Les questions avec une étoile portent plus sur la théorie développée en CM que sur les TD, et il est peut-être judicieux de les traiter dans un deuxième temps.

Exercice 1 (8 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x, y) = (e^{2x} \cos y, e^x \sin y).$$

1. Justifier que f est une fonction C^∞ et écrire sa matrice Jacobienne.
2. Prouver que f est localement un difféomorphisme autour de chaque point de $\mathbb{R}^2$.
3. Trouver toutes les images réciproques des points $(0, 0), (0, 1)$ et $(1, 0)$. La fonction f est-elle injective ? surjective ? globalement un difféomorphisme ?
4. * On identifie maintenant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. La fonction f est-elle holomorphe ?
5. * Trouver tous les points de $\mathbb{C}$ où f admet une dérivée complexe.

Solution

1. La fonction f est C^∞ car chacune de ses composantes est un produit de fonctions usuelles C^∞. Sa matrice Jacobienne est donnée par
$$\begin{pmatrix} 2e^{2x} \cos y & -e^{2x} \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$
.
2. Le déterminant de la matrice Jacobienne ci-dessous est donné par $e^{3x}(2\cos^2 y + \sin^2 y) > 0$ et ne s'annule pas. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale qui garantit que f est localement un difféomorphisme autour de chaque point de $\mathbb{R}^2$.
3. Le point $(0, 0)$ n'appartient pas à l'image de f : pour que les deux composantes s'annulent, en effet, il faudrait annuler en même temps le sinus et le cosinus, ce qui est impossible. On regarde maintenant $(0, 1)$. Supposons $f(x, y) = (0, 1)$. En regardant la première compostante on trouve $\cos y = 0$. Alors on a $\sin y = \pm 1$ et on doit imposer $\pm e^x = 1$. On trouve $x = 0$ et le signe du sinus doit être positif. On trouve donc $f(x, y) = (0, 1)$ si et seulement si $x = 0$ et $y = \pi/2 + 2k\pi$ (il faut $\cos y = 0$ et $\sin y = 1$). Pour le point $(1, 0)$ l'argument est similaire. On trouve d'abord $\sin y = 0$, puis $\cos y = 1$ et $x = 0$. On a donx $f(x, y) = (1, 0)$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 2k\pi$. La fonction f n'est donc pas surjective (car $(0, 0)$ n'est pas dans l'image) ni injective (car $(0, 1)$ et $(1, 0)$ ont une infinité de pré-images) et ce n'est pas un difféomorphisme global, donc.
4. Pour qu'une fonciton différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ soit holomorphe il faut que les deux termes sur la diagonale de la matrice Jacobienne soient égaux et les deux hors-diagonale soient opposés, ce qui n'est pas le cas en général (prendre par exemple $x = 0$ et $y = \pi/2$).
5. La fonction f admet une dérivée complexe en tout point où les deux conditions ci-dessus sur la matrice Jacobienne sont satisfaites, c'est-à-dire où l'on a
$$\begin{cases} 2e^{2x} \cos y = e^x \cos y, \\ e^x \sin y = e^{2x} \sin y. \end{cases}$$

La première condition est satisfaite si $\cos y = 0$ ou $2e^{2x} = e^x$, c'est-à-dire $e^x = 1/2$, donc $x = -\log 2$. La deuxième si $\sin y = 0$ ou $e^x = e^{2x}$, donc $x = 0$. Comme on ne peut pas avoir $x = -\log 2$ et $x = 0$ en même temps, ni $\cos y = 0$ et $\sin y = 0$ en même temps, les points où f admet une dérivée complexe sont $(0, \pi/2 + k\pi)$ et $(-\log 2, k\pi)$.

Exercice 2 (4 points)**.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Prouver que f est différentiable en tout point mais pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les dérivées partielles de f sont-elles bornées sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Solution

1. La fonction f est C^∞ en déhors de $(0,0)$ par composition de fonctions usuelles. En $(0,0)$ on utilise $f(0,0) = 0$ avec $|f(x,y)| \leq ||(x,y)||^2$ (on déduit cela de $|\sin t| \leq |t|$ pour le premier sinus et $|\sin t| \leq 1$ pour le deuxième), ce qui montre que la fonction est différentiable avec différentielle nulle. Calculons, pour $(x,y) \neq (0,0)$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos(x^2+y^2)\sin((x^2+y^2)^{-1}) - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\sin(x^2+y^2)\cos((x^2+y^2)^{-1})$$
et ensuite pour $x \neq 0$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\cos(x^2)\sin(x^{-2}) - \frac{2}{x^3}\sin(x^2)\cos(x^{-2}).$$
On voit que dans cette expression, lorsque $x \to 0$, le premier terme tend vers 0 alors que le deuxième est le produit d'un terme oscillant entre -1 et 1 et un terme d'ordre x^{-1}. Cette dérivée partielle ne tend donc pas vers 0, qui est sa valeur en $(0,0)$ et $f \notin C^1$.
2. Le même exemple ci-dessus montre que $\partial f/\partial x$ n'est pas bornée au voisinage de l'origine. Un calcul similaire donne la même réponse pour $\partial f/\partial y$.

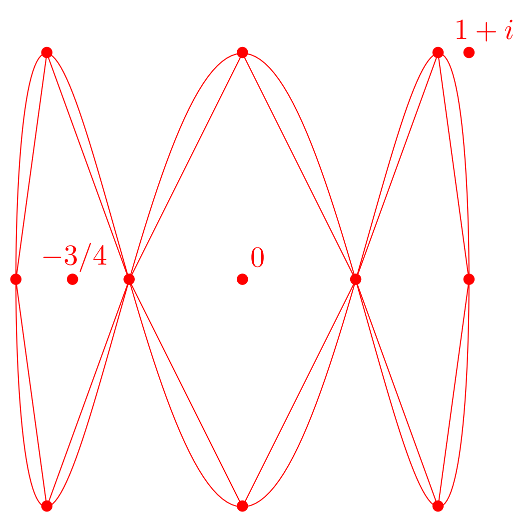
Exercice 3 (8 points)**.** Considérer la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(\theta) := (\cos(\theta), \sin(3\theta)).$$

1. Prouver que cette courbe est régulière.
2. Est-elle parametrée par longueur ?
3. Prouver que l'on a $|\gamma'(\theta)|^2 \geq \min\{\sin^2(\pi/12), 9/2\}$. En déduire $|\gamma'(\theta)| \geq 0.2$.
4. Donner une expression de sa courbure comme fonction de θ à l'aide de fonctions élementaire, et justifier qu'elle ne dépasse jamais 1500.
5. Soit $L(\gamma)$ la longueur de cette courbe. Prouver que l'on a
$$2\sqrt{5} + 4\sqrt{\frac{11}{4} - \sqrt{3}} + 4\sqrt{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \leq L(\gamma) \leq 2\pi\sqrt{10}.$$
6. * On considère maintenant cette courbe comme un chemin dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Trouver l'indice par rapport à cette courbe des points $z_0 = 0, -3/4, 1 + i$.

Solution

1. Une courbe régulière est une courbe C^1 avec $\gamma'(\theta) \neq 0$ pour tout θ. Ici on a $\gamma'(\theta) = (-\sin(\theta), 3\cos(3\theta))$. Si $\gamma'(\theta) = 0$ on a $\sin(\theta) = 0$, donc $\theta = k\pi$, donc $\cos(3\theta) = \pm 1$. Par conséquent les deux composantes de $\gamma'(\theta)$ ne peuvent pas s'annuler en même temps et la courbe est régulière.
2. On a $|\gamma'(\theta)|^2 = \sin^2(\theta) + 9\cos^2(3\theta)$. Si on calcule en $\theta = 0$ on trouve $|\gamma'(0)| = 3$. Une coube parametrée par longueur étant une courbe telle que $|\gamma'(\theta)| = 1$ pour tout θ, cette courbe ne l'est pas.
3. On distingue deux cas. Soit $|\sin\theta| < \sin(\pi/12)$, soit l'inégalité est démontrée. Or, si $|\sin\theta| < \sin(\pi/12)$, on trouve $\theta = k\pi + \alpha$ avec $|\alpha| < \pi/12$ et donc $3\theta = k'\pi + \alpha'$ avec $|\alpha'| < \pi/4$. Cela donne donc (faire une dessin !) $\cos^2(3\theta) \geq \cos^2(\pi/4) = 1/2$.On trouve donc $|\gamma'(\theta)|^2 = \sin^2(\theta) + 9\cos^2(3\theta) \geq 9/2$. Puisque $9/2 > 1 > \sin^2(\pi/12)$, pour conclure notre estimation on a besoin d'estimer par le bas $\sin^2(\pi/12)$. Pour cela on utilise $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ pour $\alpha = \pi/12$ et on trouve $2\sin^2(\pi/12) = 1 - \sqrt{3}/2 > 1 - 9/10 = 1/10$. On a donc $\sin^2(\pi/12) > 1/20 > 1/25$ et donc $\sin(\pi/12) > \sqrt{1/25} = 1/5 = 0.2$.
4. On a $\gamma'(\theta) = (-\sin(\theta), 3\cos(3\theta))$ et $\gamma''(\theta) = (-\cos(\theta), -9\sin(3\theta))$ ainsi que
$$\kappa(\theta) = \frac{|\gamma'(\theta) \wedge \gamma''(\theta)|}{|\gamma'(\theta)|^3}.$$
Or, on trouve $|\gamma'(\theta) \wedge \gamma''(\theta)| = |9\sin(\theta)\sin(3\theta) + 3\cos(\theta)\cos(3\theta)| \leq 12$ et le dénominateur vaut au moins 5^{-3}. Ceci donne
$$\kappa(\theta) = \frac{|9\sin(\theta)\sin(3\theta) + 3\cos(\theta)\cos(3\theta)|}{(\sin^2(\theta) + 9\cos^2(3\theta))^{3/2}} \leq 12 \times 5^3 = 1500.$$
5. La longueur peut être écrite comme
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(\theta)| d\theta.$$
L'inégalité $|\gamma'(\theta)| \leq \sqrt{10}$ nous donne l'estimation par le haut. Pour avoir une estimation par le bas on utilise plutôt l'expression de la longueur comme un sup de polygonale et on en choisit une particulière. On prend $\theta_k = k\pi/6$ pour $k = 0, 1, \dots, 12$. La borne inférieur est obtenue en calculant la longueur de cette polygonale (à noter que par symétrie plusieurs segments ont la même longueur).



6. Le point 0 est à l'intérieur de la courbe γ, mais la courbe passe autour de lui dans le sens des aiguilles d'une montre. Son indice est donc -1. Le point $-3/4$ se trouve par contre à l'intérieur d'une partie de la courbe qui est parcourue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, et son indice est donc $+1$. Le point $1+i$ se trouve à l'extérieur, et son indice est donc 0.

Exercice 4 (5 points)**.** Considérer le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^4 - y^3 + 5x^2y + 1 = 0\}$$

1. Montrer qu'il existe une paramétrisation locale de E au voisinage du point $(0,1)$ sous la forme d'un graphe $y = \phi(x)$.
2. Trouver le developpement de cette fonction ϕ à l'ordre 2 au voisinage du même point.
3. Trouver la courbure de la courbe représentant E au point $(0,1)$.

Solution

1. Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer que E est localement un graphe de la forme $y = \phi(x)$ autour d'un point (x_0, y_0) lorsque $E = \{f = 0\}$ pour une fonction $f \in C^1$ et que $\partial f/\partial y(x_0,y_0) \neq 0$. Ici on a

$$f(x,y) = x^4 - y^3 + 5x^2y + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 3y^2 + 5x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 3,$$

donc on peut l'appliquer.

2. La régularité de ϕ est la même de celle de f, qui est C^∞. On peut donc écrire $\phi(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ et on trouve tout de suite $a = 1$ car $\phi(0) = 1$. Pour trouver b et c on écrit $f(x, \phi(x)) = 0$ et on ne regarde que les termes d'ordre inférieure ou égale à deux. On a donc

$$-(1 + bx + cx^2)^3 + 5x^2 + 1 + o(x^2) = 0,$$

ce qui donne $-3cx^2 - (1+bx)^3 + 5x^2 + 1 + o(x^2) = 0$ et donc $-3cx^2 - 1 - 3bx - 3b^2x^2 + 5x^2 + 1 + o(x^2) = 0$. Ceci donne $b = 0$ et $c = 5/3$. On a donc

$$\phi(x) = 1 + \frac{5}{3}x^2 + o(x^2).$$

3. Soit $\gamma(x) = (x, \phi(x))$. On a $\gamma'(x) = (1, \phi'(x))$ et $\gamma''(x) = (0, \phi''(x))$. La formule pour la courbure d'une courbe paramétrée mais pas par longueur d'arc donne

$$\kappa(x) = \frac{\gamma'(x) \wedge \gamma''(x)}{|\gamma'(x)|^3} = \frac{\phi''(x)}{(1 + \phi'(x)^2)^{3/2}}.$$

Dans ce cas précis, on regarde la courbure en $x = 0$, et on a, grâce au DL ci-dessus, $\phi'(0) = 0$ et $\phi''(0) = 10/3$ (on identifie le DL à $\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \frac{1}{2}\phi''(0)x^2 + o(x^2)$). On trouve donc $\kappa(0) = 10/3$.