Université Claude Bernard Lyon 1 2020-20121

Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours «Mathématiques générales et applications»
Calcul différentiel et analyse complexe
Examen session 2
Jeudi 24 juin 2021 – Durée : 2h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $|ab| < 1$.

a) Soit $v \in \mathbb{R}$. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + a\sin(v - b\sin x)$. Montrer que g est bijective.

b) On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$. Montrer que f est un C^1 difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $A \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble donné par $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 2, 3xyz = x + y + z\}$.

a) Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage du point $(1,1,1) \in A$? Quelles variables peuvent-elles être exprimées comme fonction des autres ?

b) Prouver que A est, au voisinage du point $(1,1,1)$, l'image d'une courbe C^1 régulière et déterminer la direction de la tangente à cette courbe en ce point.

Exercice 3. Trouver le rayon de convergence de la série entière suivante

$$\sum_{n\geq 5} (2^n + 3^n)\, z^n.$$

Exercice 4.

a) Soit U un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$ et soit g une fonction holomorphe sur U et continue sur $\overline{U}$. Montrer que si $|g|$ est constante sur la frontière de U alors : g est constante ou g admet un zéro dans U.

b) Soit f une fonction entière qui envoie le cercle unité dans lui-même (i.e. si $|z| = 1$ alors $|f(z)| = 1$). On veut montrer qu'il existe un nombre complexe ω de module 1 et un $n \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega z^n$.

(i) Montrer que f a un nombre fini de zéros dans le disque unité.

(ii) On note $\{a_1, \dots, a_q\}$ l'ensemble des zéros distincts de f dans le disque unité et m_i la multiplicité de a_i. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_q\}$, on pose

$$g(z) = f(z) \prod_{i=1}^{q} \left(\frac{1 - \overline{a_i} z}{z - a_i} \right)^{m_i}.$$

Montrer que g s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

(iii) En utilisant la question a), montrer que g est constante.

(iv) En utilisant le fait que f est entière, montrer que l'ensemble $\{a_1, \dots, a_q\}$ est vide ou égal à $\{0\}$.

(v) Conclure.

Exercice 5. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\, dz$$

où $\mathscr{C}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.