Université Claude Bernard Lyon 1 2023-2024

Master de Mathématiques, 1re année
Parcours ≪Mathématiques générales≫
Analyse fonctionnelle 1
Examen terminal
Vendredi 12 janvier 2024 – Durée : 3h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Question de cours. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ et que $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g}$.
(On justifiera soigneusement les arguments de la preuve, la convergence des intégrales, etc.)

Exercice 1. Dans cet exercice les suites sont supposées être réelles. On définit $c_0 = \{x = (x_n)_{n\geq 0}\ ;\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ l'espace des suites réelles qui tendent vers 0 à l'infini et on le munit de

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|$$

a) Montrer que c_0 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

b) Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$. Montrer que l'application $T_\alpha : c_0 \to \mathbb{R}$

$$c_0 \ni x = (x_n)_{n\geq 0} \longmapsto T_\alpha(x) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n x_n$$

est linéaire et continue et que sa norme vaut $\|T_\alpha\| = \sum_{n\geq 0} |\alpha_n|$.

c) Réciproquement, soit $S : c_0 \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. On pose $\alpha_n = S(e_n)$ où e_n est la suite nulle sauf à l'indice n où elle vaut 1 :

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\text{position } n}{1}, 0, 0, \dots)$$

(i) Calculer

$$S(\text{signe}(\alpha_0), \text{signe}(\alpha_1), \dots, \text{signe}(\alpha_N), 0, \dots)$$

où signe(a) est la fonction signe qui vaut 1 si $a > 0$, -1 si $a < 0$ et 0 si $a = 0$.

(ii) Utiliser la question précédente pour montrer que $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$.

d) Montrer enfin que l'application $\ell^1 \ni \alpha \mapsto T_\alpha \in (c_0)'$ est une bijection linéaire isométrique de ℓ^1 dans $(c_0)'$ qui permet donc d'identifier ℓ^1 au dual de c_0.

Exercice 2. Soit $H = L^2([0,1];\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel et T l'opérateur de primitivation défini par $Tf = g$ où

$$g(x) = \int_0^x f(y)\,dy \quad \forall x \in [0,1].$$

Montrer que T est linéaire et continu de H dans H et déterminer T^*.

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'étudier l'équation suivante :

$$x^2 u = 1, \quad u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \tag{$*$}$$

On rappelle (cf. TD), que la transformée de Fourier de vp$\dfrac{1}{x}$ est égale à $-i\pi$ fois la fonction signe.

a) Montrer que la solution générale de l'équation

$$v'' = 0, \quad v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$$

est donnée par $v = Ax + B$ avec $A, B \in \mathbb{C}$ des constantes arbitraires.

b) Calculer les transformées de Fourier de δ et de δ' où $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ désigne la masse de Dirac en 0.

c) En déduire la solution générale de l'équation homogène

$$x^2 w = 0, \quad w \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}).$$

d) Montrer que pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}$$

existe. On définit $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}$, la partie finie de $\frac{1}{x^2}$, par

$$\langle \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Montrer que $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

e) Montrer que $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}$ est une solution de $(*)$ et en déduire toutes les solutions de $(*)$.

f) Montrer l'égalité suivante au sens des distributions : $\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\right)' = -\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}$.

g) Calculer la transformée de Fourier de $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}$.