Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2025-2026**

L3 - Mathématiques UE : Équations différentielles

Corrigé de l'examen du 16 décembre 2025

Durée : 1 h 30

Questions de cours.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\boldsymbol{R}^2$.
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\boldsymbol{R})$ ayant une valeur propre réelle double λ et telle que $A \neq \lambda I_2$.
On note (H) $y'(t) = Ay(t),\ t \in \boldsymbol{R}$.

1. *Montrer qu'il existe une base (v_1, v_2) de $\boldsymbol{R}^2$ telle que $Av_1 = \lambda v_1$ et $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$.*
   Voir le cours.
2. *Pour $k = 1, 2$, on définit $\varphi_k \colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2,\ t \mapsto e^{tA}v_k$. Montrer que (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions de (H), et que pour tout $t \in \boldsymbol{R}$, $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}v_1$ et $\varphi_2(t) = te^{\lambda t}v_1 + e^{\lambda t}v_2$.*
   Voir le cours.
3. (Cette question n'est pas exactement une question de cours).
   On suppose de plus que $\lambda < 0$. Soit $y \colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ une solution de (H).
   Montrer qu'il existe $K \geq 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $t \in \boldsymbol{R}_+$, $\|y(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}$.
   Par la question précédente, il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $y = a\varphi_1 + b\varphi_2$.
   Soit $t \in \mathbf{R}_+$. On a

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &= \left\|ae^{\lambda t}v_1 + b\left(te^{\lambda t}v_1 + e^{\lambda t}v_2\right)\right\| \\ &\leq |a|e^{\lambda t}\|v_1\| + |b|te^{\lambda t}\|v_1\| + |b|e^{\lambda t}\|v_2\|\end{aligned}$$

   Soit $\alpha \in]0, -\lambda[$. Alors $\alpha + \lambda < 0$ donc par croissances comparées, $se^{(\alpha+\lambda)s} \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, la fonction $s \mapsto se^{(\alpha+\lambda)s}$ est continue, elle est donc bornée sur $\mathbf{R}_+$: il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $s \in \mathbf{R}_+$, $se^{(\alpha+\lambda)s} \leq C$, ou encore $se^{\lambda s} \leq Ce^{-\alpha s}$.
   De plus, $\lambda < -\alpha$ donc $e^{\lambda t} \leq e^{-\alpha t}$, donc

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq |a|e^{-\alpha t}\|v_1\| + |b|Ce^{-\alpha t}\|v_1\| + |b|e^{-\alpha t}\|v_2\| \\ &\leq Ke^{-\alpha t}\end{aligned}$$

   avec $K = (|a| + |b|C)\|v_1\| + |b|\|v_2\|$.

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = (x(t)^3 - x(t))\exp(-x(t)^2) - y(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

1. *Déterminer les points d'équilibre du système* (1).
   Le champ de vecteurs (autonome) associé à (1) est $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto \Big(y, (x^3 - x)e^{-x^2} - y\Big)$,

Soit $(x^*, y^*) \in \mathbf{R}^2$,

$$(x^*, y^*) \text{ équilibre pour } (1) \iff \begin{cases} y^* = 0 \\ ((x^*)^3 - x^*)e^{-(x^*)^2} - y^* = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^* = 0 \\ (x^*)^3 - x^* = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y^* = 0 \\ x^* = 0 \text{ ou } x^* = 1 \text{ ou } x^* = -1 \end{cases}$$

Le système (1) admet donc trois points d'équilibres : $(x^*, y^*) = (0, 0)$, $(x^*, y^*) = (1, 0)$ et $(x^*, y^*) = (-1, 0)$.

2. *Étudier leur stabilité au moyen du théorème de Lyapounov.*

   f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. On calcule la jacobienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{-x^2}\big(-2x(x^3 - x) + 3x^2 - 1\big) & -1 \end{pmatrix}$$

   On a

   — $A_1 = Jf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$: le polynôme caractéristique de A_1 est $X^2 + X + 1$, donc A_1 a pour valeurs propres $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, de parties réelles strictement négatives ; le théorème de Lyapounov assure que l'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable ;

   — $A_2 = Jf(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{e} & -1 \end{pmatrix}$: le déterminant de A_2 vaut $-\frac{2}{e} < 0$, donc A_2 a deux valeurs propres réelles de signes opposés ; l'une d'elle est donc strictement positive et le théorème de Lyapounov assure que l'équilibre $(1, 1)$ est instable ;

   — $A_3 = Jf(-1, 0) = A_2$: on conclut de même que l'équilibre $(-1, 0)$ est instable.

3. *Soit $(x_0, y_0) \in \boldsymbol{R}^2$. Montrer que l'équation différentielle (1) admet une unique solution maximale $(x, y) \colon J \to \boldsymbol{R}^2$ telle que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, définie sur un intervalle ouvert J.*

   On note $J =]\tau, T[$, avec $\tau < 0 < T$ finis ou non.

   Le champ de vecteurs f associé à (1) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le système (1) admet une unique solution maximale $(x, y) \colon J \to \mathbf{R}^2$ vérifiant $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, et cette solution est définie sur un intervalle ouvert J contenant 0.

4. *On définit $\psi \colon J \to \boldsymbol{R}$ par : pour tout $t \in J$, $\psi(t) = \dfrac{1}{2}y(t)^2 + \dfrac{1}{2}x(t)^2 e^{-x(t)^2}$.*

   Montrer que ψ est décroissante.

   Comme x et y sont dérivables, ψ est dérivable sur J par composition, et

$$\begin{aligned} \psi' &= yy' + e^{-x^2}(xx' - x^2\, xx') = yy' - e^{-x^2}(x^3 - x)x' \\ &= y\big((x^3 - x)e^{-x^2} - y\big) - e^{-x^2}(x^3 - x)y \\ &= -y^2 \leq 0 \end{aligned}$$

   donc ψ est décroissante sur J.

5. *En déduire que y est bornée sur $[0, T[$.*

   Soit $t \in [0, T[$. Comme $x(t)^2 e^{-x(t)^2} \geq 0$, on a $y(t)^2 \leq 2\psi(t) \leq 2\psi(0)$, donc $|y(t)| \leq \sqrt{2\psi(0)}$. Ainsi, y est bornée sur $[0, T[$.

6. *On suppose que $T < +\infty$. Montrer que x est bornée sur $[0, T[$.*

   Soit $t \in [0, T[$. Alors, $|x'(t)| = |y(t)| \leq \sqrt{2\psi(0)}$. De plus, x est de classe $\mathcal{C}^1$ donc

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)ds$$

d'où

$$|x(t)| \leq |x_0| + \sqrt{2\psi(0)}\, t \leq |x_0| + \sqrt{2\psi(0)}\, T$$

ainsi x est bornée sur $[0, T[$.

7. *Montrer que* $T = +\infty$.

   Supposons $T < +\infty$. Par le théorème d'explosion en temps fini, $\|(x(t), y(t))\|_1 \underset{t \to T^-}{\longrightarrow} +\infty$.
   Or pour tout $t \in [0, T[$,

$$\|(x(t), y(t))\|_1 = |x(t)| + |y(t)| \leq |x_0| + \sqrt{2\psi(0)}\,(T+1)$$

   ce qui est contradictoire. Ainsi, $T = +\infty$.

Exercice 2.

Soit $\theta \colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *une fonction continue telle que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\theta(t)| dt < \infty$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 3y'(t) + (2 + \theta(t))y(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

1. *Justifier que toute solution maximale de* (2) *est définie sur* $\boldsymbol{R}$ *tout entier, puis donner la structure de l'ensemble des solutions maximales de* (2).

   L'équation (2) est une équation différentielle linéaire scalaire du second ordre. Les coefficients $t \mapsto 3$ et $t \mapsto (2 + \theta(t))$ sont continus sur $\mathbf{R}$. Ainsi, toutes les solutions maximales de (2) sont globales, c'est-à-dire définies sur $\mathbf{R}$ tout entier. De plus, l'ensemble des solutions maximales de (2) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, de dimension 2.

2. *On suppose que* $u \colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *est une solution de* (2). *On pose pour tout* $t \in \boldsymbol{R}$,

$$w(t) = e^{-t} \int_0^t e^s \theta(s) u(s) ds - e^{-2t} \int_0^t e^{2s} \theta(s) u(s) ds\,.$$

   (a) *Justifier que* w *est dérivable et calculer* w'.

   La fonction $s \mapsto e^s \theta(s) u(s)$ est continue sur $\mathbf{R}$ donc par le théorème fondamental de l'analyse $t \mapsto \int_0^t e^s \theta(s) u(s) ds$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. De même, $t \mapsto \int_0^t e^{2s} \theta(s) u(s) ds$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. Ainsi, par somme et produit, w est dérivable sur $\mathbf{R}$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} w'(t) &= -e^{-t} \int_0^t e^s \theta(s) u(s) ds + e^{-t} e^t \theta(t) u(t) + 2e^{-2t} \int_0^t e^{2s} \theta(s) u(s) ds - e^{-2t} e^{2t} \theta(t) u(t) \\ &= -e^{-t} \int_0^t e^s \theta(s) u(s) ds + 2e^{-2t} \int_0^t e^{2s} \theta(s) u(s) ds \end{aligned}$$

   (b) *Justifier que* w *est deux fois dérivable et calculer* w''.

   Les termes apparaissant dans w' sont les mêmes que ceux apparaissant dans w donc w' est dérivable et pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} w''(t) &= e^{-t} \int_0^t e^s \theta(s) u(s) ds - e^{-t} e^t \theta(t) u(t) - 4e^{-2t} \int_0^t e^{2s} \theta(s) u(s) ds + 2e^{-2t} e^{2t} \theta(t) u(t) \\ &= \theta(t) u(t) + e^{-t} \int_0^t e^s \theta(s) u(s) ds - 4e^{-2t} \int_0^t e^{2s} \theta(s) u(s) ds \end{aligned}$$

(c) *On note $v = u + w$. Vérifier que pour tout $t \in \boldsymbol{R}$, $v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = 0$.*

Soit $t \in \mathbf{R}$. En utilisant que u est solution de (2), et les calculs précédents, on a

$$\begin{aligned}
&v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) \\
&= u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) + w''(t) + 3w'(t) + 2w(t) \\
&= -\theta(t)u(t) + \theta(t)u(t) + e^{-t}\int_0^t e^s\theta(s)u(s)ds - 4e^{-2t}\int_0^t e^{2s}\theta(s)u(s)ds \\
&\qquad - 3e^{-t}\int_0^t e^s\theta(s)u(s)ds + 6e^{-2t}\int_0^t e^{2s}\theta(s)u(s)ds \\
&\qquad + 2e^{-t}\int_0^t e^s\theta(s)u(s)ds - 2e^{-2t}\int_0^t e^{2s}\theta(s)u(s)ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

(d) *En déduire qu'il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|v(t)| \leq Ce^{-t}$.*

v est solution d'une équation linéaire du second ordre homogène, à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$, ses racines sont -1 et -2. On en déduit qu'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $v(t) = ae^{-t} + be^{-2t}$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $|v(t)| \leq (|a| + |b|)e^{-t}$.

(e) *On note $\varphi\colon t \mapsto e^t|u(t)|$. Montrer que pour tout $t \geq 0$,*

$$\varphi(t) \leq C + 2\int_0^t |\theta(s)|\,\varphi(s)\,ds\,.$$

Soit $t \geq 0$. On écrit

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = e^t|u(t)| &= e^t\,|v(t) - w(t)| \\
&\leq e^t|v(t)| + e^t|w(t)| \\
&\leq C + e^t\left(e^{-t}\int_0^t e^s|\theta(s)||u(s)|ds + e^{-2t}\int_0^t e^{2s}|\theta(s)||u(s)|ds\right) \quad \text{par 1.(d)} \\
&\leq C + \int_0^t |\theta(s)|\varphi(s)ds + \int_0^t e^{-t+s}|\theta(s)|\varphi(s)ds \quad \text{en utilisant } \varphi(s) = e^s|u(s)| \\
&\leq C + \int_0^t |\theta(s)|\varphi(s)ds + \int_0^t |\theta(s)|\varphi(s)ds
\end{aligned}$$

car pour tout $s \in [0, t]$, $e^{-t+s} \leq 1$. Ainsi,

$$\varphi(t) \leq C + 2\int_0^t |\theta(s)|\,\varphi(s)\,ds\,.$$

(f) *En déduire que φ est bornée sur $\boldsymbol{R}_+$.*

On peut appliquer le lemme de Gronwall forme intégrale à φ. En effet, φ et $|\theta|$ sont continues et positives. On en déduit que pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi(t) \leq C\exp\left(\int_0^t |\theta(s)|\,ds\right) \leq C\exp\left(\int_0^{+\infty} |\theta(s)|\,ds\right)$$

Ainsi, φ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

(g) *En déduire que $u(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Comme φ est bornée sur $\mathbf{R}_+$, et que $e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $|u(t)| = e^{-t}\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.