Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2025-2026**

L3 - Mathématiques UE : Équations différentielles

Examen – 16 décembre 2025

Durée : 1 h 30

Les documents, téléphones, calculatrices, objets connectés etc. sont interdits.
Les exercices sont indépendants.

Questions de cours.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^2$.
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ ayant une valeur propre réelle double λ et telle que $A \neq \lambda I_2$.
On note (H) $y'(t) = Ay(t),\ t \in \mathbf{R}$.

1. Montrer qu'il existe une base (v_1, v_2) de $\mathbf{R}^2$ telle que $Av_1 = \lambda v_1$ et $Av_2 = v_1 + \lambda v_2$.
2. Pour $k = 1, 2$, on définit $\varphi_k \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,\ t \mapsto e^{tA}v_k$. Montrer que (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions de (H), et que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}v_1$ et $\varphi_2(t) = te^{\lambda t}v_1 + e^{\lambda t}v_2$.
3. (Cette question n'est pas exactement une question de cours).
   On suppose de plus que $\lambda < 0$. Soit $y \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ une solution de (H).
   Montrer qu'il existe $K \geq 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $\|y(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}$.

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = (x(t)^3 - x(t))\exp(-x(t)^2) - y(t), \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases} \tag{1}$$

1. Déterminer les points d'équilibre du système (1).
2. Étudier leur stabilité au moyen du théorème de Lyapounov.
3. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que l'équation différentielle (1) admet une unique solution maximale $(x, y) \colon J \to \mathbf{R}^2$ telle que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, définie sur un intervalle ouvert J.
   On note $J =]\tau, T[$, avec $\tau < 0 < T$ finis ou non.
4. On définit $\psi \colon J \to \mathbf{R}$ par : pour tout $t \in J$, $\psi(t) = \frac{1}{2}y(t)^2 + \frac{1}{2}x(t)^2e^{-x(t)^2}$.
   Montrer que ψ est décroissante.
5. En déduire que y est bornée sur $[0, T[$.
6. On suppose que $T < +\infty$. Montrer que x est bornée sur $[0, T[$.
7. Montrer que $T = +\infty$.

Tourner la page.

Exercice 2.

Soit $\theta\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\theta(t)|dt < +\infty$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 3y'(t) + (2 + \theta(t))y(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

1. Justifier que toute solution maximale de (2) est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, puis donner la structure de l'ensemble des solutions maximales de (2).
2. On suppose que $u\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une solution de (2). On pose pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$w(t) = e^{-t} \int_0^t e^s \theta(s) u(s) ds - e^{-2t} \int_0^t e^{2s} \theta(s) u(s) ds\,.$$

   (a) Justifier que w est dérivable et calculer w'.

   (b) Justifier que w est deux fois dérivable et calculer w''.

   (c) On note $v = u + w$. Vérifier que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = 0$.

   (d) En déduire qu'il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|v(t)| \leq Ce^{-t}$.

   (e) On note $\varphi\colon t \mapsto e^t|u(t)|$. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi(t) \leq C + 2 \int_0^t |\theta(s)|\, \varphi(s)\, ds\,.$$

   (f) En déduire que φ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

   (g) En déduire que $u(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.