

Corrigé du partiel du 21 octobre 2025

DURÉE : 1 h 30

Question de cours.

Soit I un intervalle ouvert et $A: I \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ continue. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad t \in I \quad (H)$$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions maximales de (H).

1. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}^d$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale de (H) telle que $y(t_0) = y_0$ et que cette solution est globale.

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^d$ et $\|\|\cdot\|\|$ la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.

Le champ de vecteurs associé à (H) est $f: I \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, $(t, x) \mapsto A(t)x$. A étant continue, f est continu sur $I \times \mathbf{R}^d$. De plus, pour tout $t \in I$, tout $x \in \mathbf{R}^d$, tout $y \in \mathbf{R}^d$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|\|A(t)\|\| \|x - y\|$$

Par composition, la fonction $k: I \rightarrow \mathbf{R}_+$, $t \mapsto \|\|A(t)\|\|$ est continue sur I donc f est globalement lipschitzien en la variable d'état.

Ainsi, par le théorème de Cauchy-Lipschitz et une conséquence du théorème d'explosion en temps fini, il existe une unique solution maximale de (H) telle que $y(t_0) = y_0$, et cette solution est globale.

2. Sans preuve, donner la structure de $\mathcal{S}_H$.

$\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}^d)$ de dimension d .

Exercice 1. On note $I =]0, +\infty[$, et on considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = -(y(t))^2 + \frac{y(t)}{t} - \frac{1}{t^2}, \quad t \in I \quad (1)$$

1. On note $x: I \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto \frac{1}{t}$. Montrer que x est solution de (1).

x est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} -(x(t))^2 + \frac{x(t)}{t} - \frac{1}{t^2} &= -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t^2} \\ &= x'(t) \end{aligned}$$

donc x est solution de (1).

2. Montrer que l'équation différentielle (1) admet une unique solution maximale $y: J \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $y(1) = 2$, définie sur un intervalle ouvert J .

On écrit le champ de vecteurs associé à (1) :

$$f: \begin{array}{ccc} I \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (t, x) & \longmapsto & -x^2 + \frac{x}{t} - \frac{1}{t^2} \end{array}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times \mathbf{R}$, et $1 \in I$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation différentielle (1) admet une unique solution maximale $y: J \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $y(1) = 2$, définie sur un intervalle ouvert J .

3. On note $u: J \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto y(t) - x(t)$. Montrer que u est strictement positive sur J .

$x: I \rightarrow \mathbf{R}$ est une solution globale et (1), et $y: J \rightarrow \mathbf{R}$ est une solution maximale de (1).

De plus, $y(1) = 2$ et $x(1) = 1$ donc $y(1) > x(1)$. D'après une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz (f est $\mathcal{C}^1$), les trajectoires de solutions maximales d'une équation différentielle sont ordonnées. Par conséquent, pour tout $t \in J$, $y(t) > x(t)$, c'est-à-dire $u(t) > 0$.

4. On note $v: J \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto \frac{1}{u(t)}$. Montrer que v est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{v(t)}{t} + 1, & t \in I \\ v(1) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

u est dérivable sur J , et comme u ne s'annule pas sur J , v est aussi dérivable sur J ; pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} u'(t) &= y'(t) + \frac{1}{t^2} = -y(t)^2 + \frac{y(t)}{t} = -y(t) \left(y(t) - \frac{1}{t} \right) \\ &= -y(t)u(t) = - \left(u(t) + \frac{1}{t} \right) u(t) \\ v'(t) &= -\frac{u'(t)}{u(t)^2} = \frac{(u(t) + \frac{1}{t})}{u(t)} \\ &= 1 + \frac{v(t)}{t} \end{aligned}$$

De plus, $v(1) = y(1) - 1 = 1$ donc v est solution du problème de Cauchy (2).

5. En déduire l'expression explicite de y et l'intervalle J .

La fonction v est donc solution d'une équation linéaire scalaire d'ordre 1 avec second membre.

On détermine d'abord l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée : $v'(t) = \frac{v(t)}{t}$, $t \in I$.

$a: t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur I , une primitive de a sur I est $A: t \mapsto \ln t$, les solutions de cette équation homogène sont donc les fonctions de la forme : pour tout $t \in I$, $v_H(t) = ce^{\ln t} = ct$, avec $c \in \mathbf{R}$.

On cherche maintenant une solution particulière par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire une solution qui s'écrit, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $v_p(t) = c(t)t$ où $c: I \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable.

v_p est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, $v_p'(t) = c'(t)t + c(t)$. Alors,

$$\begin{aligned} v_p \text{ est solution} &\iff \forall t \in I \quad c'(t)t + c(t) = \frac{c(t)t}{t} + 1 = c(t) + 1 \\ &\iff \forall t \in I \quad c'(t) = \frac{1}{t} \end{aligned}$$

On peut choisir pour tout $t \in I$, $c(t) = \ln t$.

Ainsi, on obtient, pour tout $t \in I$, $v_p(t) = t \ln t$.

Les solutions de l'équation $v'(t) = \frac{v(t)}{t} + 1$, $t \in I$ sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto ct + t \ln t$ avec $c \in \mathbf{R}$.

On en déduit donc qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in J$, $v(t) = ct + t \ln t$. De plus $v(1) = c = 1$ donc $v(t) = t + t \ln t$.

Pour tout $t > 0$, $t + t \ln t = 0 \iff 1 + \ln t = 0 \iff t = 1/e$. La fonction v ne s'annule pas sur J et $1 \in J$ donc $J \subset]\frac{1}{e}, +\infty[$, et pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{t + t \ln t} \\ y(t) &= u(t) + \frac{1}{t} = \frac{1}{t + t \ln t} + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t+t \ln t} + \frac{1}{t}$ est bien définie et dérivable sur $] \frac{1}{e}, +\infty[$ donc on en déduit que $J =] \frac{1}{e}, +\infty[$ et

$$\forall t \in J, v(t) = \frac{1}{t+t \ln t} + \frac{1}{t}.$$

Exercice 2.

Soit $y_0 \in \mathbf{R}$ tel que $y_0 < 0$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(e^{y(t)} - 1), & t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

1. Montrer que le problème (3) admet une unique solution maximale $y: J \rightarrow \mathbf{R}$, définie sur un intervalle ouvert J contenant 0.

On note $J =]\alpha, \beta[$ avec α, β finis ou infinis.

On écrit le champ de vecteurs associé à (3) :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (t, x) & \longmapsto & x(e^x - 1) \end{array}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy (3) admet une unique solution maximale $y: J \rightarrow \mathbf{R}$ et J est un intervalle ouvert contenant 0.

2. Montrer que y est strictement négative et strictement croissante sur J .

On remarque que la fonction nulle $\theta: t \mapsto 0$ est solution sur $\mathbf{R}$ (donc maximale) de l'équation différentielle $x'(t) = x(t)(e^{x(t)} - 1)$. De plus, par hypothèse, $y_0 = y(0) < 0 = \theta(0)$. D'après une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz (f est $\mathcal{C}^1$), les trajectoires de solutions maximales d'une équation différentielle sont ordonnées. Par conséquent, pour tout $t \in J$, $y(t) < 0$.

On en déduit que pour tout $t \in J$, $e^{y(t)} - 1 < 0$ et donc $y'(t) = y(t)(e^{y(t)} - 1) > 0$. Ainsi, y est strictement croissante sur J .

3. Montrer que $\beta = +\infty$.

Par la question précédente, pour tout $t \in [0, \beta[$, $y_0 \leq y(t) < 0$ donc y est bornée sur $[0, \beta[$. Par le théorème d'explosion en temps en fini, on en déduit que $\beta = +\infty$.

4. Montrer que y admet une limite finie en $+\infty$ puis déterminer la valeur de cette limite.

y est strictement croissante et bornée sur $\mathbf{R}_+$ donc elle admet une limite finie en $+\infty$. On la note ℓ .

Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $y'(t) = y(t)(e^{y(t)} - 1)$ et y tend vers ℓ en $+\infty$, d'où $y'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell(e^\ell - 1)$.

y est $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbf{R}_+$, et y' admet une limite en $+\infty$; d'après un résultat du cours, on en déduit que $y'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Par unicité de la limite de y' en $+\infty$, on a donc $\ell(e^\ell - 1) = 0$, donc $\ell = 0$.

5. Montrer que pour tout $t \in J$, $y'(t) \leq -y(t)$.

Soit $t \in J$. On écrit $y'(t) = y(t)e^{y(t)} - y(t) \leq -y(t)$ car $y(t) < 0$ et $e^{y(t)} > 0$.

6. En déduire que pour tout $t \in]\alpha, 0]$, $y(t) \geq y_0 e^{-t}$.

On note $z: J \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto e^t y(t)$. Alors z est dérivable et pour tout $t \in J$, $z'(t) = e^t(y'(t) + y(t)) \leq 0$.

Ainsi, z est décroissante sur J et donc pour tout $t \in]\alpha, 0]$, $z(t) \geq z(0) = y_0$, et ainsi, $y(t) \geq y_0 e^{-t}$.

7. Montrer que $\alpha = -\infty$ et que $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$.

Supposons $\alpha < 0$ fini. Alors, par le théorème d'explosion en temps fini, $|y(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \alpha^+]{} +\infty$. Or y est négative donc $y = -|y|$ et $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \alpha^+]{} -\infty$. Par la question précédente, pour tout $t \in]\alpha, 0]$, $y(t) \geq y_0 e^{-t} \geq y_0 e^{-\alpha}$ (car $y_0 < 0$). On aboutit donc à une contradiction. Ainsi, $\alpha = -\infty$.

De plus, comme à la question 4, on peut montrer que y admet une limite en $-\infty$, finie ou égale à $-\infty$. Supposons que cette limite soit finie, et notons-la ℓ^- . Encore comme à la question 4, on peut montrer que $\ell^- = 0$. Ce qui n'est pas possible puisque y étant strictement croissante, $\ell^- \leq y_0 < 0$. Ainsi, $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbf{R}$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t(x(t))^2(x(t) - t^2), & t \in \mathbf{R} \\ x(0) = a. \end{cases} \quad (4)$$

1. Montrer que le problème (4) admet une unique solution maximale $x_a: I_a \rightarrow \mathbf{R}$, définie sur un intervalle ouvert I_a .

On écrit le champ de vecteurs associé à (4) :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (t, x) & \longmapsto & tx^2(x - t^2) \end{array}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy (4) admet une unique solution maximale $x_a: I_a \rightarrow \mathbf{R}$ et I_a est un intervalle ouvert contenant 0.

2. On note $J_a = \{t \in \mathbf{R} : -t \in I_a\}$ et $y_a: J_a \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto x_a(-t)$. Écrire le problème de Cauchy satisfait par y_a . En déduire qu'il existe $T_a > 0$ (fini ou non) tel que $I_a =]-T_a, T_a[$ et que x_a est paire.

Par composition, y_a est bien définie et dérivable sur J_a et pour tout $t \in J_a$,

$$\begin{aligned} y'_a(t) &= -x'_a(-t) = -(-t)(x_a(-t))^2(x_a(-t) - (-t)^2) \\ &= t(y_a(t))^2(y_a(t) - t^2) \end{aligned}$$

De plus, $y_a(0) = x_a(0) = a$ donc y_a est solution du problème de Cauchy (4). Comme x_a est l'unique solution maximale de ce problème, on en déduit que $J_a \subset I_a$ et pour tout $t \in J_a$, $y_a(t) = x_a(t)$.

Soit $t \in I_a$. Par définition de J_a , on a alors $-t \in J_a$ et par l'inclusion précédente, $-t \in I_a$. Ainsi, I_a est un intervalle symétrique par rapport à 0, il s'écrit sous la forme $I_a =]-T_a, T_a[$ avec $T_a > 0$ (fini ou non).

On a donc $J_a = I_a$ et pour tout $t \in I_a$, $x_a(t) = y_a(t) = x_a(-t)$, ce qui prouve que x_a est paire.

3. Donner I_a et x_a si $a = 0$.

Si $a = 0$, alors $I_a = \mathbf{R}$ et x_a est la fonction nulle sur $\mathbf{R}$.

4. Dans cette question, on suppose que $a < 0$.

(a) Montrer que pour tout $t \in I_a$, $x_a(t) < 0$.

On utilise à nouveau la propriété utilisée dans la question 3 de l'exercice 1 et la question 2 de l'exercice 2. La fonction nulle étant solution globale de l'équation différentielle considérée, et $x(0)$ étant strictement négatif, on en déduit que pour tout $t \in I_a$, $x_a(t) < 0$.

(b) Montrer que pour tout $t \in [0, T_a[$, $\frac{x'_a(t)}{(x_a(t))^2} \leq -t^3$.

Soit $t \in [0, T_a[$, $x'_a(t) = t(x_a(t))^3 - t^3(x_a(t))^2 \leq -t^3(x_a(t))^2$, et comme $(x_a(t))^2 > 0$,

$$\frac{x'_a(t)}{(x_a(t))^2} \leq -t^3.$$

(c) En déduire que T_a est fini.

Soit $t \in [0, T_a[$, on intègre l'inégalité obtenue entre 0 et t :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{x'_a(s)}{(x_a(s))^2} ds &\leq - \int_0^t s^3 ds \\ \frac{1}{x_a(0)} - \frac{1}{x_a(t)} &\leq -\frac{t^4}{4} \\ \frac{t^4}{4} &\leq \frac{1}{x_a(t)} - \frac{1}{a} \\ \frac{t^4}{4} &\leq -\frac{1}{a} \quad \text{car } x_a(t) < 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que T_a est fini, et inférieur ou égal à $(-4/a)^{1/4}$.

(d) Que peut-on dire de $x_a(t)$ quand $t \rightarrow T_a^-$?

Comme T_a est fini, par le théorème d'explosion en temps fini, $|x_a(t)| \xrightarrow[t \rightarrow T_a^-]{} +\infty$. Or x_a est négative donc $x_a = -|x_a|$ et $x_a(t) \xrightarrow[t \rightarrow T_a^-]{} -\infty$.