

Partiel – 21 octobre 2025

DURÉE : 1 h 30

Les documents, téléphones, calculatrices, objets connectés etc. sont interdits.

Les exercices sont indépendants.

Question de cours.

Soit I un intervalle ouvert et $A: I \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ continue. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad t \in I \quad (\text{H})$$

On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions maximales de (H).

1. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}^d$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale de (H) telle que $y(t_0) = y_0$ et que cette solution est globale.
2. Sans preuve, donner la structure de $\mathcal{S}_H$.

Exercice 1. On note $I =]0, +\infty[$, et on considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = -(y(t))^2 + \frac{y(t)}{t} - \frac{1}{t^2}, \quad t \in I \quad (1)$$

1. On note $x: I \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto \frac{1}{t}$. Montrer que x est solution de (1).
2. Montrer que l'équation différentielle (1) admet une unique solution maximale $y: J \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $y(1) = 2$, définie sur un intervalle ouvert J .
3. On note $u: J \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto y(t) - x(t)$. Montrer que u est strictement positive sur J .
4. On note $v: J \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto \frac{1}{u(t)}$. Montrer que v est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{v(t)}{t} + 1, & t \in I \\ v(1) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

5. En déduire l'expression explicite de y et l'intervalle J .

Exercice 2.

Soit $y_0 \in \mathbf{R}$ tel que $y_0 < 0$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)(e^{y(t)} - 1), & t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3)$$

1. Montrer que le problème (3) admet une unique solution maximale $y: J \rightarrow \mathbf{R}$, définie sur un intervalle ouvert J contenant 0.

On note $J =]\alpha, \beta[$ avec α, β finis ou infinis.

2. Montrer que y est strictement négative et strictement croissante sur J .
3. Montrer que $\beta = +\infty$.
4. Montrer que y admet une limite finie en $+\infty$ puis déterminer la valeur de cette limite.
5. Montrer que pour tout $t \in J$, $y'(t) \leq -y(t)$.
6. En déduire que pour tout $t \in]\alpha, 0]$, $y(t) \geq y_0 e^{-t}$.
7. Montrer que $\alpha = -\infty$ et que $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbf{R}$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t(x(t))^2(x(t) - t^2), & t \in \mathbf{R} \\ x(0) = a. \end{cases} \quad (4)$$

1. Montrer que le problème (4) admet une unique solution maximale $x_a: I_a \rightarrow \mathbf{R}$, définie sur un intervalle ouvert I_a .
2. On note $J_a = \{t \in \mathbf{R} : -t \in I_a\}$ et $y_a: J_a \rightarrow \mathbf{R}$, $t \mapsto x_a(-t)$. Écrire le problème de Cauchy satisfait par y_a . En déduire qu'il existe $T_a > 0$ (fini ou non) tel que $I_a =]-T_a, T_a[$ et que x_a est paire.
3. Donner I_a et x_a si $a = 0$.
4. Dans cette question, on suppose que $a < 0$.
 - (a) Montrer que pour tout $t \in I_a$, $x_a(t) < 0$.
 - (b) Montrer que pour tout $t \in [0, T_a[$, $\frac{x'_a(t)}{(x_a(t))^2} \leq -t^3$.
 - (c) En déduire que T_a est fini.
 - (d) Que peut-on dire de $x_a(t)$ quand $t \rightarrow T_a^-$?