Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soit $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable, *i.e.* $\int_{-\infty}^{+\infty} |q(t)|dt < \infty$.
On considère l'équation différentielle linéaire :

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0,\ t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

1. Réécrire l'équation (1) sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 en dimension 2 : $X'(t) = A(t)X(t),\ t \in \mathbf{R}$, où $A : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Justifier que toute solution maximale de (1) est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, puis donner la structure de l'ensemble des solutions maximales de (1).
3. Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de (1). On définit leur wronskien w par : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $w(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$.
   Faire le lien avec la notion de wronskien pour le système différentiel de la question 1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par w.
4. Soit $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une solution bornée de (1). Montrer que $\lim_{t\to+\infty} x'(t) = 0$.
5. Montrer que l'équation (1) admet des solutions non bornées. *Indication : on pourra considérer un système fondamental de solutions et leur wronskien.*

Exercice 2. Soit $\theta\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} |\theta(t)|dt < \infty$.
On considère l'équation différentielle linéaire :

$$x''(t) + (1 + \theta(t))x(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

On suppose que $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une solution de (2). On pose pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g(t) = f(t) + \int_0^t \theta(s)f(s)\sin(t-s)ds.$$

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g''(t) + g(t) = 0$.
2. En déduire qu'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|f(t)| \leq A + \int_0^t |\theta(s)| \cdot |f(s)|ds$.
3. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 3. Dans les trois cas suivants, déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle $y'(t) = Ay(t),\ t \in \mathbf{R}$:

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas (i), déterminer la solution vérifiant $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $\|u\|_2 = 1$. Pour deux vecteurs x et y dans $\mathbf{R}^3$, on note $x \cdot y$ leur produit scalaire (canonique). On rappelle la définition du produit vectoriel de deux vecteurs x et y dans $\mathbf{R}^3$: $x \wedge y$ est le vecteur de $\mathbf{R}^3$ tel que pour tout $z \in \mathbf{R}^3$, $\det(x, y, z) = (x \wedge y) \cdot z$; le vecteur $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y. De plus, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors on a aussi $x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$.
On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + u \wedge x(t) = 0, \ t \in \mathbf{R} \tag{3}$$

où $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$.

1. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^3$. Justifier que l'équation (3) admet une unique solution maximale vérifiant $x(0) = x_0$ et que cette solution est définie sur $\mathbf{R}$. On note x cette solution.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\|x(t)\|_2 = \|x_0\|_2$.
3. Montrer que l'application $t \mapsto x(t) \cdot u$ est constante sur $\mathbf{R}$.
4. Réécrire (3) sous la forme $x'(t) = Ax(t)$.
5. Calculer explicitement la solution dans le cas $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dessiner la trajectoire dans un repère de $\mathbf{R}^3$.
6. Donner l'expression de x dans le cas général.

Exercice 5. *Deux équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*

1. *En dimension 1.* Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et T-périodique (avec $T > 0$). On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire suivante

$$u'(t) = f(t)u(t), \ t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

   (a) *Préliminaire.* On note F une primitive de f sur $\mathbf{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit T-périodique.

   (b) Donner la forme des solutions de (4). En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que les solutions de (4) soient toutes bornées.

   (c) Dans cette question, on cherche à retrouver ce résultat par une autre méthode.

      i. Trouver $b \in \mathbf{R}$ et $q\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+*}$ une application dérivable et T-périodique telle que u est solution de (4) si et seulement si $v\colon t \mapsto q(t)u(t)$ est solution de $v' = bv$.

      ii. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que les solutions de (4) soient toutes bornées.

2. *En dimension 2.* On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

   (a) Soit $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ une solution de $u'(t) = A(t)u(t)$. Trouver une équation différentielle satisfaite par $r : t \mapsto r(t) = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$ où $(u_1(t), u_2(t))$ sont les composantes de $u(t)$.

   (b) En déduire que les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont toutes bornées sur $\mathbf{R}$.

Exercice 6. ($\star$) *Une autre équation différentielle linéaire à coefficients périodiques en dimension 2*
On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et une application $Q : \mathbf{R} \to \mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ 4π-périodique (où $\mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ est le groupe des matrices orthogonales réelles de dimension 2) telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$A(t) = Q(t)MQ(t)^T.$$

2. Soit u une solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ et soit $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,\ t \mapsto v(t) = Q(t)^T u(t)$. Montrer que v est solution d'un système linéaire à coefficients constants $v' = Bv$, où $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est une matrice que l'on déterminera.
3. Réciproquement, soit v une solution de $v' = Bv$. Montrer que $u : t \mapsto Q(t)v(t)$ est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$.
4. Les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont-elles bornées sur $\mathbf{R}^+$? sur $\mathbf{R}^-$? sur $\mathbf{R}$?
   Indication : on pourra étudier le spectre de B.

L'étude menée dans les exercices 5 et 6 sur des cas particuliers en dimension $d \leq 2$ peut être généralisée à une dimension d quelconque.